

01;09

Сложная динамика двухрезонаторного клистрона-генератора с запаздывающей обратной связью

© Н.М. Рыскин, А.М. Шигаев

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,
410012 Саратов, Россия
e-mail: RyskinNM@info.sgu.ru

(Поступило в Редакцию 8 апреля 2005 г.)

Рассмотрена сложная динамика модели двухрезонаторного клистрона-генератора с запаздывающей обратной связью. Проведен теоретический анализ условий самовозбуждения и стационарных режимов генерации. Представлены результаты численного моделирования автомодуляционных и хаотических режимов, подробно изучены сценарии перехода к хаосу в центре и вблизи границы зон генерации. Обсуждается влияние сил пространственного заряда на динамику генератора.

PACS: 52.80.Pi

Введение

В последние годы возрос интерес к исследованию и применению сложных, в том числе хаотических, режимов генерации сверхвысокочастотных (СВЧ) электронных приборов. Внимание к этой проблеме связано прежде всего с перспективами применения источников шумоподобного хаотического СВЧ излучения в системах передачи и обработки информации на базе динамического хаоса [1–4] и радиолокации [5], а также для генерации помех, СВЧ нагрева и др. Для указанных приложений одними из наиболее перспективных представляются автогенераторы с запаздывающей обратной связью (ЗОС) на базе пролетных клистронов, обладающих высоким уровнем мощности и КПД. Ранее в работах [6–8] были предложены математические модели двух- и многорезонаторных клистронных автогенераторов в виде систем дифференциальных уравнений с запаздыванием. Численное моделирование показало, что по мере увеличения тока пучка или глубины обратной связи происходит переход к хаосу, причем основным сценарием является последовательность бифуркаций удвоения периода автомодуляции. Также было проведено экспериментальное исследование генератора на основе многорезонаторного клистрона [6,8,9], результаты которого качественно согласуются с теорией. Однако необходимо отметить, что представленные в [6–8] результаты не дают полного представления о поведении системы в широком диапазоне управляющих параметров. В частности, анализ в основном ограничивается центром зоны генерации. Вместе с тем известно, что для автоколебательных систем с запаздыванием характерна чрезвычайно сложная и богатая картина нелинейной динамики. Как правило, для подобных систем при изменении основных управляющих параметров наблюдается многократное чередование регулярных и хаотических автомодуляционных режимов генерации с переходами к хаосу по различным сценариям (см., например, [10]). Такое поведение типично и для многих других распределенных систем электронной

природы, в частности ЛОВ и ЛБВ генераторов [11–13]; следует ожидать, что оно должно быть присуще и клистрону-генератору с ЗОС.

Настоящая работа содержит результаты подробного анализа сложной динамики модели двухрезонаторного клистрона-генератора, предложенной в [6]. В разделе 1 приведена математическая модель генератора, а также основные результаты ее теоретического анализа. Раздел 2 содержит результаты численного моделирования. Подробно изучены сценарии переходов к хаосу в центре и вблизи границы зон генерации. Кроме того, в разделе 3 обсуждается важный с практической точки зрения вопрос об учете сил пространственного заряда (ПЗ). Предложена эффективная методика, основанная на приближенной нелинейной волновой теории В.А. Солнцева [14,15], и показано, что влияние сил ПЗ может приводить к подавлению автомодуляции и срыву генерации.

1. Основные уравнения и результаты теоретического анализа

Рассмотрим двухрезонаторный клистрон, входной резонатор которого соединен с выходным посредством широкополосной бездисперсионной линии передачи, в которую включены регулируемый аттенюатор и фазовращатель. С их помощью можно регулировать глубину ρ и фазу Ψ обратной связи. Сигнал проходит по линии обратной связи (ОС) за некоторое время δt , которое не зависит от частоты. Для простоты будем считать, что резонаторы идентичны и их добротности Q , характеристические сопротивления K , собственные частоты ω_s и коэффициенты эффективности модуляции M равны. Также предполагаем, что и входной, и выходной резонаторы согласованы с линией ОС.

Как было показано в [6,8], такой генератор описывается системой двух обыкновенных дифференциальных

уравнений, одно из которых содержит запаздывание

$$\begin{aligned} \dot{F}_1 + \gamma F_1 &= \gamma F_2(\tau - 1), \\ \dot{F}_2 + \gamma F_2 &= -2i\alpha e^{-i\psi} J_1(|F_1|) \frac{F_1}{|F_1|}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь J_1 — функция Бесселя первого рода,

$$\begin{aligned} F_1(\tau) &= \frac{MA_1(\tau - \theta_0)\theta_0}{2V_0}, \\ F_2(\tau) &= \frac{\rho MA_2(\tau)\theta_0}{2V_0\sqrt{2}} e^{-i\omega_0\delta\tau} \end{aligned}$$

— нормированные медленно меняющиеся комплексные амплитуды $A_{1,2}$ колебаний напряжения на зазорах резонаторов; $\tau = \omega_s t / \psi$ — безразмерное время,

$$\alpha = \frac{\rho KM^2 I_0 \theta_0 \psi}{4V_0 \sqrt{2}}$$

— параметр возбуждения генератора, имеющий смысл произведения коэффициента усиления на глубину ОС; I_0 и V_0 — ток и напряжение пучка соответственно; $\theta_0 = \omega_s l / v_0$ — невозмущенный угол пролета электронов в пространстве дрейфа, l — длина пространства дрейфа; $\gamma = \psi / 2Q$ — параметр затухания; $\psi = \theta_0 + \omega_s \delta t + \Psi$ — полный набег фазы за время распространения сигнала по петле обратной связи, он зависит как от времени пролета электронов между резонаторами, так и от времени задержки в цепи ОС.

Для дальнейшего полезно проанализировать условия самовозбуждения автоколебаний. Методика такого анализа была изложена в [6], где, однако, мы ограничивались лишь случаем $\psi = 2\pi m - \pi/2$, что соответствует центру зоны генерации (см. ниже). Здесь приведем основные формулы для общего случая, не останавливаясь подробно на деталях вычислений. Линеаризуя уравнения (1) и отыскивая решение в виде $F_{1,2} \sim e^{p\tau}$, находим характеристическое уравнение

$$(p + \gamma)^2 = -i\alpha\gamma e^{-(p+i\psi)}. \quad (2)$$

Это трансцендентное уравнение, которое имеет бесконечное число комплексных корней, т. е. имеется, вообще говоря, бесконечное число собственных мод, что характерно для распределенной автоколебательной системы. Учитывая, что на границе неустойчивости p является чисто мнимым $p = i\omega$, где ω — частота колебаний, из (2) можно получить уравнение для собственных частот

$$\frac{2\omega\gamma}{\omega^2 - \gamma^2} = \operatorname{tg}\left(\omega + \psi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (3)$$

и уравнение, позволяющее определить порог генерации для n -й собственной моды

$$\alpha_{st} = \frac{\gamma^2 + \omega_n^2}{\gamma}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4)$$

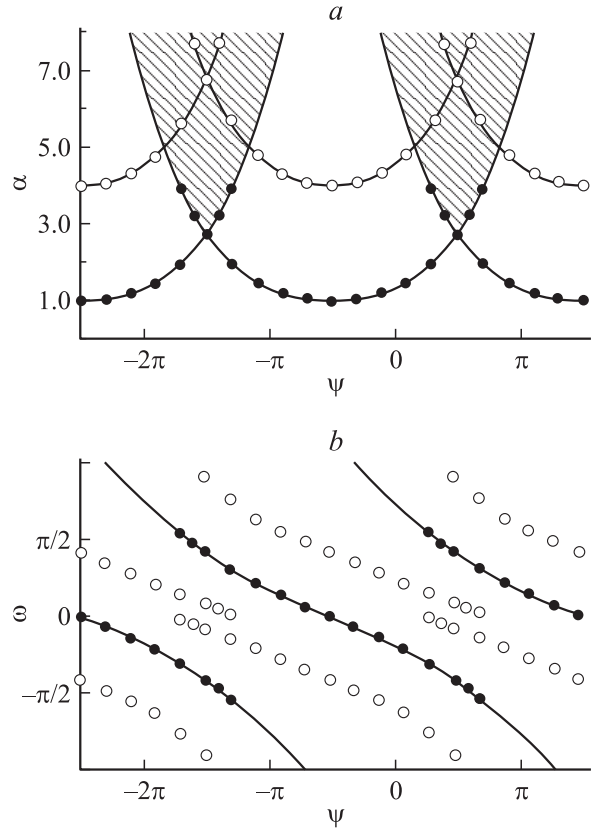


Рис. 1. Границы зон самовозбуждения и автомодуляции (а) и частоты генерации и автомодуляции (б) при $\gamma = 1.0$. Жирными сплошными линиями показаны теоретические зависимости α_{st} и ω от ψ . Темными кружками показаны значения α_{st} и ω , полученные в результате численного моделирования, светлыми кружками — значения порога и частоты автомодуляции. Заштрихованы области бистабильности.

Здесь ω_n — корни уравнения (3), которые занумеруем по мере удаления от нуля¹ (т. е. ω_0 — ближайшая к нулю собственная частота). Однако можно показать, что следует учитывать лишь те корни, для которых $\cos(\omega_n + \psi + \pi/2) > 0$, т. е. корни с четными номерами [6,8,10].

Анализ соотношений (3), (4) показывает, что порог самовозбуждения периодически зависит от ψ , т. е. наблюдаются так называемые зоны генерации, характерные для распределенных автоколебательных систем с ЗОС [6–10,12,13]. В центрах зон набег фазы сигнала за время распространения по кольцу обратной связи равен $2\pi m$; им соответствуют значения $\psi = 2\pi m - \pi/2$ (сдвиг на $-\pi/2$ вносится модулирующим резонатором [8]). В центре зоны самовозбуждения происходит на частоте $\omega = 0$, т. е. генерация возникает точно на собственной частоте резонаторов, а $\alpha_{st} = \gamma$. На рис. 1 приведены границы самовозбуждения и частоты генерации,

¹ Напомним, что мы пользуемся уравнениями, записанными для медленно меняющихся амплитуд, так что нулевая частота соответствует собственной частоте резонаторов в исходных переменных.

построенные согласно формулам (3), (4) при $\gamma = 1.0$ (как будет показано ниже, это типичное значение при реалистичных параметрах генератора). С ростом α зоны генерации расширяются и начинают перекрываться. В заштрихованных областях на рис. 1, *a* возможна мультистабильность, т.е. возбуждение любой из двух соседних мод в зависимости от начальных условий.

Анализ стационарных режимов, которым соответствуют решения вида $F_{1,2} = F_{1,2}^{(0)} e^{i\omega t}$, где $F_{1,2}^{(0)}$ — константы, приводит к уравнению для амплитуды стационарной генерации

$$(\omega^2 + \gamma^2)F_0 = 2\alpha\gamma J_1(F_0), \quad (5)$$

где $F_0 = |F_1^{(0)}|$.

При этом $|F_2^{(0)}| = F_0 \sqrt{1 + (\omega/\gamma)^2}$. Кроме того, для частоты генерации мы вновь получаем соотношение (3). Из этого следует, что при увеличении параметра возбуждения α частота не меняется и остается равной соответствующей собственной частоте, определяемой из линейной теории. Как правило, это частота ω_0 , за исключением областей мультистабильности, где также возможна генерация на одной из частот $\omega_{\pm 2}$ (рис. 1).

Трансцендентное уравнение (5) полезно проанализировать графически (рис. 2, *a*). Из рисунка видно, что с ростом α число корней увеличивается. Следовательно, появляются все новые и новые стационарные состояния,

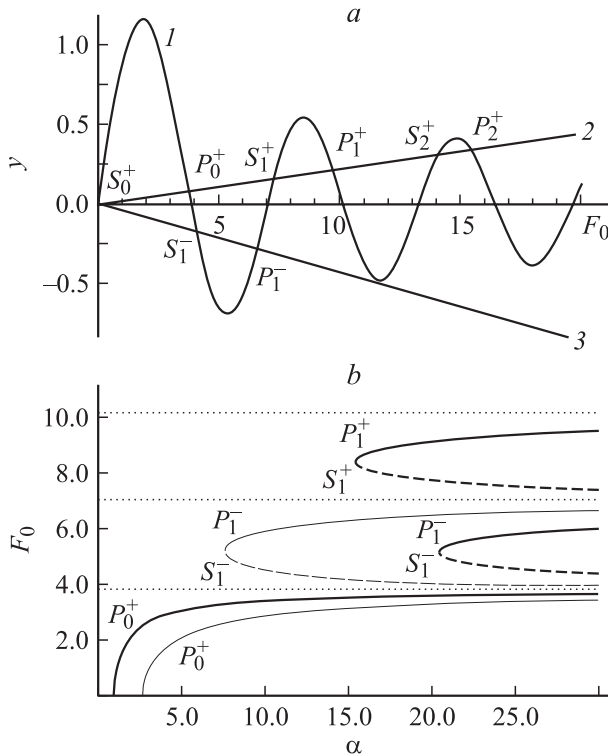


Рис. 2. *a* — пример графического решения уравнения (5): 1 — кривая $y = 2J_1(F_0)$, 2 — прямая $y = (\omega^2 + \gamma^2)F_0/\alpha\gamma$, 3 — прямая $y = -(\omega^2 + \gamma^2)F_0/\alpha\gamma$; *b* — зависимости стационарных решений от параметра α в центре (жирные линии) и на границах зоны генерации (тонкие линии) при $\gamma = 1.0$. Неустойчивые решения показаны штриховыми линиями.

т.е. даже для колебаний на основной собственной моде будет характерна мультистабильность. Появление новых стационарных режимов обусловлено, очевидно, многократной перегруппировкой электронов в пространстве дрейфа, что является основным нелинейным эффектом в приборах *O*-типа. Будем обозначать состояния равновесия как S_n^+ и P_n^+ , причем S_n^+ соответствуют корням уравнения (5), расположенным на возрастающих участках функции Бесселя, P_n^+ — на падающих (рис. 2, *a*). В принятых обозначениях S_0^+ соответствует тривиальному решению с нулевой амплитудой.

Высшие стационарные состояния, как нетрудно понять, анализируя рис. 2, возникают жестко. Порог их появления можно найти аналитически. Соответствующие значения амплитуды F_0 находятся как корни уравнения

$$\frac{J_1(F_0)}{F_0} = J_1'(F_0), \quad (6)$$

где $J_1' = dJ_1(F_0)/dF_0$.

Отсюда для P_1^+ , S_1^+ находим, что $F_0 \approx 8.417$, и из уравнения (5) следует, что

$$\alpha = \frac{(\omega^2 + \gamma^2)F_0}{2\gamma J_1(F_0)} \approx \frac{15.5(\omega^2 + \gamma^2)}{\gamma}. \quad (7)$$

Кроме того, существуют состояния равновесия, соответствующие участкам, где функция Бесселя отрицательна. Для них частота колебаний по-прежнему находится из уравнения (3), однако теперь она равна одному из корней $\omega_{\pm 1}$, в зависимости от фазы ψ . Вместо уравнения (5) теперь имеем

$$(\omega^2 + \gamma^2)F_0 = -2\alpha\gamma J_1(F_0). \quad (8)$$

Обозначим эти состояния равновесия как S_n^- и P_n^- соответственно (рис. 2, *a*). Они также возникают жестко. Порог их появления нетрудно рассчитать из уравнения

$$\frac{J_1(F_0)}{F_0} = -J_1'(F_0), \quad (9)$$

откуда для P_1^- , S_1^- получаем $F_0 \approx 5.52$ и вместо уравнения (7) получаем

$$\alpha = -\frac{(\omega^2 + \gamma^2)F_0}{2\gamma J_1(F_0)} \approx \frac{8.11(\omega^2 + \gamma^2)}{\gamma}. \quad (10)$$

Например, в центре зоны генерации при $\gamma = 1.0$ из (7) и (10) найдем, что P_1^+ , S_1^+ появляются при $\alpha \approx 15.5$, а P_1^- , S_1^- — при $\alpha \approx 22.233$. При этом в (7) следует подставлять значение частоты основной моды $\omega_0 = 0$, а в (10) — значение частоты $\omega_1 \approx 0.42\pi$. Пороги появления высших стационарных состояний значительно превышают порог возбуждения основного состояния P_0^+ ($\alpha_{st} = 1$). Однако по мере удаления от центра зоны генерации порог возникновения P_1^- , S_1^- уменьшается, поскольку частота ω_1 приближается к нулю. В частности, на границе зоны ($\psi = \pi/2$) имеем $\alpha \approx 8.11$, что всего

лишь в три раза превышает порог самовозбуждения $\alpha_{st} \approx 2.74$. Порог возникновения состояний P_1^+ , S_1^+ в этом случае, наоборот, увеличивается до $\alpha \approx 42.51$. На рис. 2, *b* показаны зависимости амплитуд стационарных состояний $P_{0,1}^\pm$ и S_1^\pm от α , построенные по формулам (5) и (8). Представлены зависимости в центре и на краю зоны генерации. С ростом α решения стремятся к соответствующим нулям функции Бесселя J_1 . Видно, что найденные выше теоретические пороговые значения хорошо согласуются с рисунком.

Важно также выяснить условия устойчивости стационарных решений. К сожалению, полностью провести такой анализ в общем случае невозможно. Можно, однако, показать, что состояния равновесия S_n^\pm всегда неустойчивы, тогда как состояния P_n^\pm при не слишком большом превышении порога самовозбуждения устойчивы. С увеличением α они теряют устойчивость в результате бифуркации Андронова–Хопфа и в их окрестности в фазовом пространстве образуются предельные циклы, соответствующие режимам периодической автомодуляции. При этом выходной сигнал начинает осциллировать около стационарного значения.

В центре зоны генерации, где основная частота $\omega_0 = 0$, анализ устойчивости существенно упрощается. В частности, уравнения для возмущений амплитуды и фазы колебаний разделяются и их можно рассматривать независимо (ср. [10]). Анализируя устойчивость состояний P_n^+ , S_n^+ , можно получить характеристическое уравнение для амплитудных возмущений

$$(i\Omega + \gamma)^2 = 2\alpha\gamma J_1'(F_0)e^{-i\Omega}. \quad (11)$$

Здесь Ω — частота автомодуляции. Анализ этого соотношения показывает, что для состояний равновесия S_n^+ , для которых $J_1'(F_0) > 0$, всегда имеется корень характеристического уравнения (11) вида $i\Omega = \lambda$, где инкремент неустойчивости λ — вещественное положительное число. Таким образом, все решения типа S_n^+ неустойчивы, причем возмущение нарастает экспоненциально (так называемая аperiodическая неустойчивость).

Для состояний равновесия P_n^+ , для которых $J_1'(F_0) < 0$, из соотношения (11) следует, что частота Ω удовлетворяет уравнению (3), однако теперь необходимо выбирать корни, для которых $\cos(\omega_n + \psi + \pi/2) < 0$, т.е. корни ω_n с нечетными номерами. Минимальный порог автомодуляции, очевидно, имеют моды с номерами $n = \pm 1$, частоты которых наиболее близки к собственной частоте резонатора. В случае достаточно большой добротности резонатора, когда $\gamma < \pi/2$, можно показать [6], что частота автомодуляции лежит в пределах $\gamma < \Omega < \pi/2$, если же $\gamma > \pi/2$, то, напротив, $\pi/2 < \Omega < \gamma$. Кроме того, из (11) можно найти пороговое значение параметра α , при котором возникает автомодуляция

$$\alpha_{sm} = \frac{\gamma^2 + \Omega^2}{2\gamma|J_1'(F_0)|}. \quad (12)$$

Здесь необходимо учесть, что F_0 в свою очередь зависит от α , согласно (5). Подставляя (5) в (12), получаем (напомним, что мы рассматриваем центр зоны генерации, где основная частота равна нулю)

$$\frac{F_0|J_1'(F_0)|}{J_1(F_0)} = \frac{\gamma^2 + \Omega^2}{\gamma^2}, \quad (13)$$

а соотношение (12) упрощается

$$\alpha_{sm} = \frac{\gamma F_0}{2J_1(F_0)}. \quad (14)$$

Учитывая, что в центре зоны частота автомодуляции равна собственной частоте ω_1 , для случая $\gamma = 1.0$, который рассматривался выше, из (13) получим, что $F_0 \approx 2.90$, следовательно, $\alpha_{sm} \approx 3.87$. Это полностью согласуется с результатами численного решения исходных нестационарных уравнений (1) (рис. 1, *a*).

Из соотношения (12) видно, что для неустойчивости необходимо, чтобы величина $J_1'(F_0)$ принимала достаточно большое по модулю отрицательное значение, т.е. чтобы амплитудная характеристика усилителя имела падающий участок с достаточно большой крутизной. Физическая причина появления падающего участка заключается в кинематической разгруппировке сгустков, которая происходит, когда амплитуда колебаний достаточно велика. Такой механизм автомодуляции называется амплитудным [10,11,16].

Что касается фазовых возмущений, то анализ показывает, что стационарные решения нейтрально устойчивы относительно этих возмущений, что является очевидным следствием инвариантности решений системы (1) относительно сдвига фаз на произвольную величину. Это общее свойство систем, описываемых в терминах медленно меняющихся комплексных амплитуд (ср. [10,17]).

Анализ состояний равновесия S_n^- , P_n^- приводит к качественно аналогичным выводам: S_n^- всегда неустойчивы, а P_n^- при достаточно больших α теряют устойчивость в результате бифуркации Андронова–Хопфа. При этом основная частота генерации будет равна одному из корней $\omega_{\pm 1}$ уравнения (3), а частота автомодуляции — корню ω_0 .

2. Результаты численного моделирования

Уравнения (1) содержат три управляющих параметра: α , γ и ψ . Сделаем некоторые оценки для типичных клистронов сантиметрового диапазона (в основном будем ориентироваться на параметры многорезонаторного клистрона, который исследовался экспериментально [6,8,9]). Считаем, что длина волны λ порядка нескольких сантиметров, длина линии ОС порядка нескольких метров, так что электрическая длина порядка 100 длин волн (например, в эксперименте [9] она равнялась 105). Таким образом, набег фазы за время Δt прохождения сигнала

по цепи ОС $\omega_s \Delta t \sim 2\pi \cdot 10^2$. При длине пространства дрейфа порядка нескольких сантиметров и при разумных значениях ускоряющего напряжения угол пролета $\theta_0 \ll \omega_s \Delta t$ и можно оценить $\psi \sim 2\pi \cdot 10^2$. Для нагруженной добротности резонатора $Q \sim 100-200$ найдем, что параметр γ составляет порядка нескольких единиц. Как показали расчеты, динамика системы качественно не изменяется при изменении γ в этом диапазоне ($0.3 < \gamma < 3$). Для определенности представленные ниже результаты соответствуют случаю $\gamma = 1.0$.

Численное моделирование полностью согласуется с результатами теоретического анализа, представленными в разделе 1. Выше порога самовозбуждения происходит установление стационарного режима на частоте основной моды ω_0 с амплитудой P_0^+ . При $\alpha > \alpha_{sm}$ этот режим теряет устойчивость и мягко сменяется периодической автомодуляцией. При этом в спектре появляется пара спутников, симметрично отстоящих от основной частоты. В центрах зон генерации они совпадают с частотами $\omega_{\pm 1}$. На рис. 1 построены зависимости пороговых значений α и частот основной генерации и автомодуляционных спутников (в момент возникновения автомодуляции) от фазы ψ . Хорошо видны области бистабильности вблизи границ двух зон. При плавном движении по параметру ψ переход из одной зоны в другую происходит жестко и сопровождается гистерезисом. Все эти свойства типичны для автоколебательных систем с запаздыванием [6–10,12,13].

Переходы к хаосу могут происходить по различным сценариям. В центре зоны генерации доминирует переход через последовательность бифуркаций удвоения периода автомодуляции, что характерно для систем с амплитудным механизмом автомодуляции [6–11,16]. В целом картина аналогична классическому сценарию Фейгенбаума [18–20], в частности, подтверждаются универсальные количественные закономерности, присущие этому сценарию. Однако отметим, что вся последовательность бифуркаций удвоения занимает лишь узкую область в пространстве параметров. Далее наблюдается многократное чередование периодических и хаотических режимов автомодуляции. Мы не будем подробно останавливаться на этой картине, так как она описывалась ранее в [6]. Отметим только, что существуют периодические режимы двух типов. Для одних в спектре доминирует составляющая на частоте основной моды, для других основная мода подавлена, а максимальную амплитуду имеют две спектральные компоненты, расположенные симметрично от нее. Примеры соответствующих фазовых портретов и спектров приведены на рис. 3 (здесь и далее $F_{out} = |F_2(\tau)|$). Аналогичное поведение характерно и для других систем с ЗОС, например для кольцевых оптических лазеров [21–23], распределенных параметрических генераторов с ЗОС [24] и др. В [23] этот эффект назван „расщеплением моды“. Обратим

² Разумеется, конкретное значение ψ нужно только для того, чтобы определить значение параметра диссипации. При численном моделировании будем варьировать ψ в пределах от 0 до 2π .

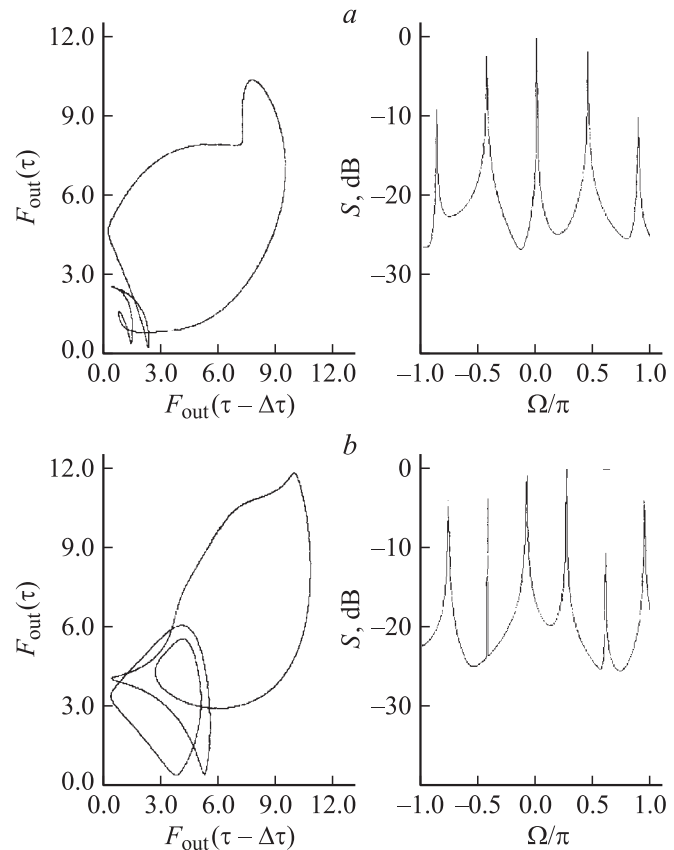


Рис. 3. Фазовые портреты и спектры в различных режимах периодической автомодуляции: $\gamma = 1.0$, $\psi = -0.4\pi$; $\alpha = 15.25$ (a), 15.75 (b).

внимание, что формы предельных циклов, отвечающих периодическим режимам, являются достаточно сложными, со множеством петель, число которых в целом увеличивается с ростом α .³

Явление расщепления моды можно объяснить следующим образом. Рассмотрим ситуацию точно в центре зоны генерации, когда $\psi = 2\pi m - \pi/2$. При этом можно ограничиться чисто вещественным вариантом уравнений (1)

$$\dot{F}_1 + \gamma F_1 = \gamma F_2(\tau - 1),$$

$$\dot{F}_2 + \gamma F_2 = 2\alpha J_1(F_1), \quad (15)$$

где амплитуды колебаний также считаются вещественными. Поскольку уравнения (15) инвариантны относительно замены $F_{1,2} \rightarrow -F_{1,2}$, они могут иметь два типа решений: либо решения, обладающие указанной симметрией, либо решения, которые сами по себе несимметричны, но возникают симметричными друг другу парами. Нетрудно понять, что в первом случае спектр колебаний

³ Необходимо напомнить, что здесь речь идет о динамике огибающей сигнала. В действительности режимам стационарной генерации соответствуют не положения равновесия, а предельные циклы, а режимам периодической автомодуляции (т.е. квазипериодическому движению с двумя несоизмеримыми частотами) — не предельные циклы, а двумерные торы.

будет аналогичен приведенному на рис. 3, *b* и основная мода будет подавлена. Фактически в таких режимах фаза колебаний периодически скачком изменяется на π . Следуя [21,22], будем называть режимы с расщеплением моды симметричными. Во втором случае среднее значение амплитуды колебаний не равно нулю, и в спектре будет доминировать составляющая на нулевой частоте.

Ситуация точно в центре зоны генерации является вырожденной. При сколь угодно малой отстройке от центра зоны переменные уже нельзя считать вещественными и, строго говоря, уже нельзя говорить о симметричных и асимметричных режимах. Тем не менее, поведение остается качественно аналогичным. По-прежнему можно выделить режимы, в которых доминирует основная мода, и режимы, в которых основная мода подавлена, а в спектре можно выделить две составляющие с примерно одинаковыми амплитудами, расположенными симметрично от основной.

Существенное влияние на динамику генератора оказывает появление новых стационарных состояний P_n^\pm (см. раздел 1). В центре зоны генерации в первую очередь появляется состояние P_1^+ , вблизи края зоны — P_1^- (ср. рис. 2, *b*). Как уже отмечалось, они возникают жестко, поэтому для их возбуждения необходимо соответствующим образом подбирать начальные условия. При плавном увеличении параметра α наблюдается возникновение автомодуляции и последовательность бифуркаций удвоения на базе этих стационарных состояний. В некотором диапазоне изменения α режимы на базе P_0^+ и P_1^\pm сосуществуют (в зависимости от параметров это могут быть одночастотные, многочастотные или хаотические колебания), затем происходит их объединение. Примеры фазовых портретов, иллюстрирующие бистабильность и последующее объединение аттракторов, представлены на рис. 4. После объединения осциллограмма выходного сигнала представляет собой случайную последовательность переключений от одного режима к другому — хаотическую перемежаемость. При дальнейшем увеличении α появляются режимы на базе P_2^\pm , и т.д. Аналогичное поведение для более простой модели, описывающей единственное уравнением первого порядка с запаздыванием

$$\dot{F} + \gamma F = 2\alpha e^{-i\psi} J_1(|F(\tau - 1)|) \frac{F(\tau - 1)}{|F(\tau - 1)|}, \quad (16)$$

было описано ранее в [25].

Особый интерес представляет сценарий перехода к хаосу вблизи границ зон генерации, где существенное влияние оказывают процессы конкуренции двух собственных мод, имеющих близкие пороги самовозбуждения. На рис. 5 приведена карта динамических режимов на плоскости параметров ψ, α . На ней нанесены границы самовозбуждения (*SE*), автомодуляции (*SM*), удвоения (T_2) и учетверения (T_4) периода, квазипериодического движения (*Q*) и хаоса (*Ch*). Границы для двух соседних мод симметричны друг другу относительно

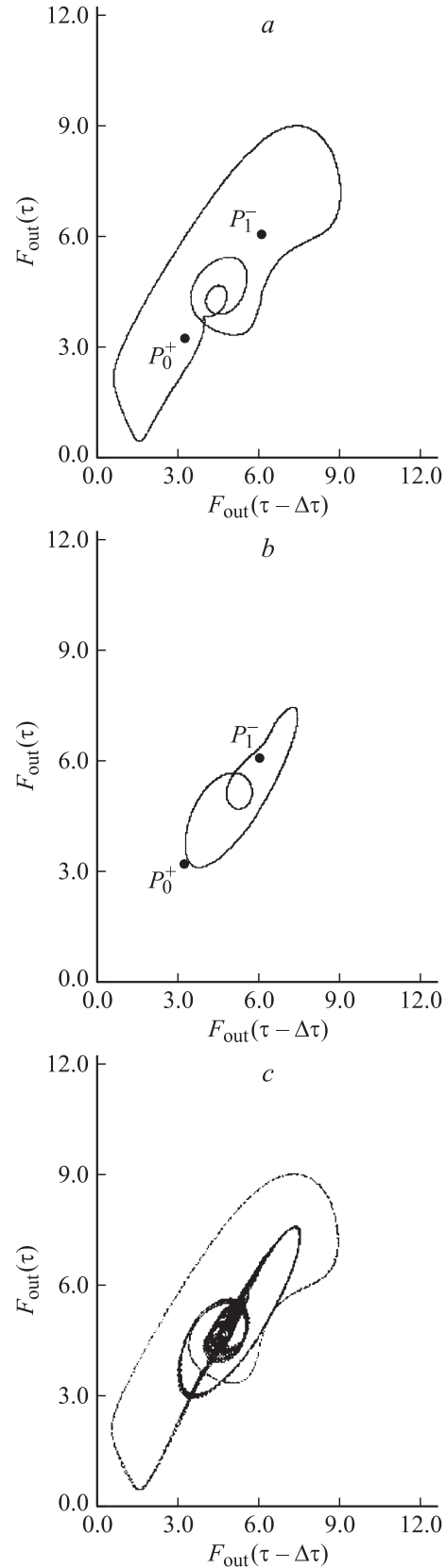


Рис. 4. Фазовые портреты в режимах периодической автомодуляции на базе состояний равновесия P_0^+ (*a*) и P_1^- (*b*) при одних и тех же значениях параметров ($\gamma = 1.0, \psi = 0.3\pi, \alpha = 12.25$) и объединенный аттрактор, возникающий при увеличении α до 12.32 (*c*).

прямой $\psi = \pi/2$ и показаны сплошными линиями для одной моды и пунктиром для другой. Здесь переход к хаосу по сценарию Фейгенбаума не происходит, а наблюдается конечное число удвоений, тем меньшее, чем ближе к границе зоны генерации мы находимся. В узкой области вблизи границы зон наблюдаются возникновение квазипериодической автомодуляции и переход к хаосу через разрушение квазипериодического движения.

С увеличением α наблюдается объединение аттракторов на базах соседних собственных мод: возникает единственный предельный цикл, который можно отождествить с обсуждавшимися выше симметричными режимами (область *SYM* на рис. 5), так как его спектр практически симметричен относительно нулевой частоты. Образование этого цикла при увеличении α происходит по-разному. Переход к нему от квазипериодического режима происходит путем мягкого подавления несоизмеримых частот, а от хаотического режима — через перемежаемость. Если же, например, двигаться по плоскости параметров таким образом, чтобы все время оставаться в режиме периодической автомодуляции, то асимметричный режим будет мягко трансформироваться в симметричный. При этом спектральная компонента, которая имела наибольшую амплитуду, смещается от собственной частоты резонатора и ее амплитуда уменьшается. Частота одного из спутников, наоборот, приближается к нулю, а его амплитуда постепенно увеличивается.

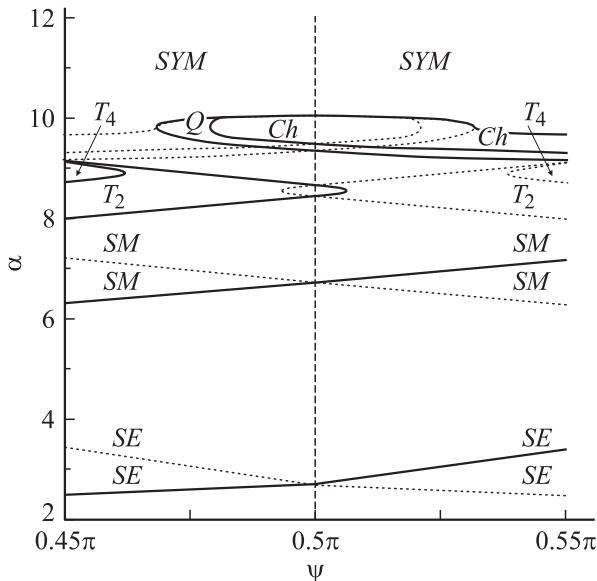


Рис. 5. Карта динамических режимов на плоскости параметров α , ψ вблизи границы зон генерации. Показаны границы самовозбуждения (*SE*) автомодуляции (*SM*), удвоения (T_2) и учетверения (T_4) периода, квазипериодичности (*Q*), перехода к хаосу через разрушение квазипериодического движения (*Ch*), область существования симметричного цикла (*SYM*).

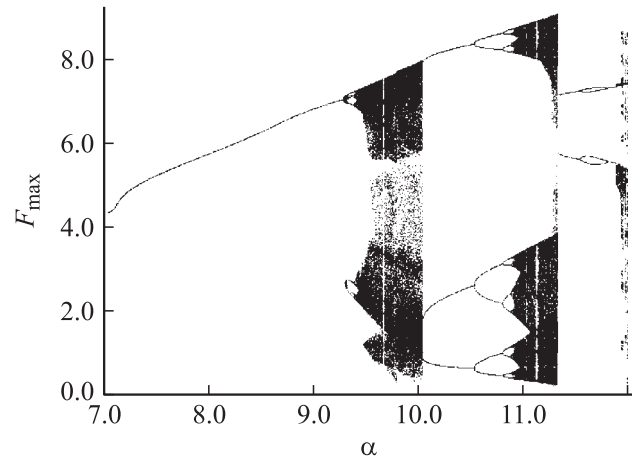


Рис. 6. Бифуркационная диаграмма вблизи границы зоны генерации ($\gamma = 1.0$, $\psi = 0.4875\pi$).

Объединение аттракторов на базе соседних мод наблюдается и для других систем с ЗОС, например, для простой модели автогенератора с кубической нелинейностью [10]. Отличие, однако, состоит в том, что в [10] „парциальные“ аттракторы объединялись не в симметричный предельный цикл, а в развитый хаотический аттрактор. Режим развитого хаоса существует в небольшом диапазоне изменения параметра α , а затем решения становятся неустойчивыми и обращаются в бесконечность. Это можно объяснить тем, что при кубической нелинейности крутизна нелинейной характеристики с увеличением амплитуды неограниченно возрастает по абсолютной величине, тогда как в клистроне крутизна определяется величиной $J'_1(F_0)$ и то возрастает, то убывает. Поэтому хаотические режимы вновь сменяются регулярными.

Итак, в области, обозначенной *SYM* на рис. 5, бистабильность исчезает. При дальнейшем увеличении α происходят последовательность бифуркаций удвоения симметричного цикла и переход к хаосу. Затем происходит переход к периодическому режиму на базе состояния равновесия P_1^- . Этот режим существует в некотором диапазоне изменения α , после чего образуется новый аттрактор, охватывающий оба положения равновесия, аналогичный представленному на рис. 4, с. Ситуацию иллюстрирует бифуркационная диаграмма, построенная для одной из мод при плавном увеличении α с наследованием начальных условий (рис. 6). На ней отложены положения максимумов амплитуды выходного сигнала при различных значениях параметра. Видны возникновение квазипериодичности ($\alpha \approx 9.25$), небольшая область резонанса, переход к хаосу ($\alpha \approx 9.5$), образование симметричного цикла ($\alpha \approx 10.0$), бифуркации удвоения этого цикла и переход к режиму на базе состояния P_1^- ($\alpha \approx 11.3$).

3. Учет сил пространственного заряда

Выше предполагалось, что эффекты пространственного заряда (ПЗ) пренебрежимо малы, так что можно пользоваться известными соотношениями кинематической теории клистрона. Однако на практике силы ПЗ могут играть существенную роль. Для модификации описанной выше модели наиболее подходящим представляется аппарат приближенной нелинейной волновой теории приборов *O*-типа, развитой В.А. Солнцевым [14,15]. Волновая теория основана на разложении фазы электрона в ряд Фурье по начальной фазе (в силу периодичности этой зависимости) и на переходе от уравнений движения отдельных электронов к уравнениям для амплитуд фурье-компонент (нелинейных волн). Не останавливаясь на деталях вычислений, воспользуемся выражением для первой гармоники сгруппированного тока, которое получается при учете лишь одной фурье-гармоники [14,15]. При этом уравнения (1) видоизменяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{F}_1 + \gamma F_1 &= \gamma F_2(\tau - 1), \\ \dot{F}_2 + \gamma F_2 &= -2i\alpha e^{-i\psi} J_1(B) \frac{F_1}{|F_1|}, \end{aligned} \quad (17)$$

где параметр B находится из решения уравнения нелинейного осциллятора

$$\frac{d^2 B}{dz^2} + \theta_p^2 Q(B) = 0. \quad (18)$$

Здесь z — координата, нормированная на длину пространства дрейфа l , $\theta_p = \omega_p l / v_0$, ω_p — плазменная частота,

$$Q(B) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n(nB)}{n} (J_{n-1}(nB) - J_{n+1}(nB)). \quad (19)$$

Формула (19) записана для простейшего случая бесконечно широкого пучка (не учитывается редукция плазменной частоты). Граничные условия к уравнению (18) имеют вид

$$B(0) = 0, \quad \frac{dB(0)}{dz} = |F_1(\tau)|. \quad (20)$$

При численном интегрировании уравнений (17) на каждом шаге следует дополнительно производить численное интегрирование уравнения (18) в области $0 \leq z \leq 1$ и подставлять значение $B(z=1)$ во второе уравнение системы (17).

Можно показать [14,15], что при $B \leq 1$, когда не происходит обгон одних электронов другими, $Q(B) = B$ и осциллятор ведет себя как линейный. Тогда можно сразу записать решение уравнения (18)

$$B(1) = |F_1| \frac{\sin \theta_p}{\theta_p}, \quad (21)$$

т.е. мы приходим к обычному результату, следующему из линейной теории волн пространственного заряда.

Обсудим влияние сил ПЗ на условия самовозбуждения генератора. Линеаризуя уравнения (17) с учетом (21), получим характеристическое уравнение

$$(p + \gamma)^2 = -i\alpha_p \gamma e^{-(p+i\psi)}, \quad (22)$$

где $\alpha_p = \alpha \sin \theta_p / \theta_p$.

Сравнивая его с характеристическим уравнением в кинематическом случае (2), видим, что отличие сводится к перенормировке параметра возбуждения генератора. Таким образом, поскольку $\alpha_p < \alpha$, влияние сил пространственного заряда будет приводить к увеличению стартового тока. Результаты расчетов режима самовозбуждения в точности согласуются с теорией. Однако для правильного сопоставления необходимо учесть, что в областях значений θ_p , где $\sin \theta_p < 0$, положения центров и краев зон генерации меняются местами: центру соответствует значение $\psi = \pi/2$, а краю зоны, наоборот, — $\psi = -\pi/2$. Действительно, параметр α_p становится отрицательным, что эквивалентно сдвигу фазы обратной связи ψ на π .

На рис. 7 приведены зависимости амплитуды выходного сигнала в режиме стационарной генерации от α при различных значениях θ_p . Они построены в диапазоне изменения α от порога самовозбуждения до порога автомодуляции. Видно, что, хотя порог самовозбуждения значительно увеличивается с ростом ПЗ, порог автомодуляции практически не меняется. Таким образом, сокращается диапазон параметров, в которых возможна одночастотная генерация. Максимальная амплитуда достигается вблизи порога автомодуляции. В этом отношении клистрон-генератор аналогичен ЛОВ [26] и отличается от ЛБВ генератора с ЗОС, где максимум

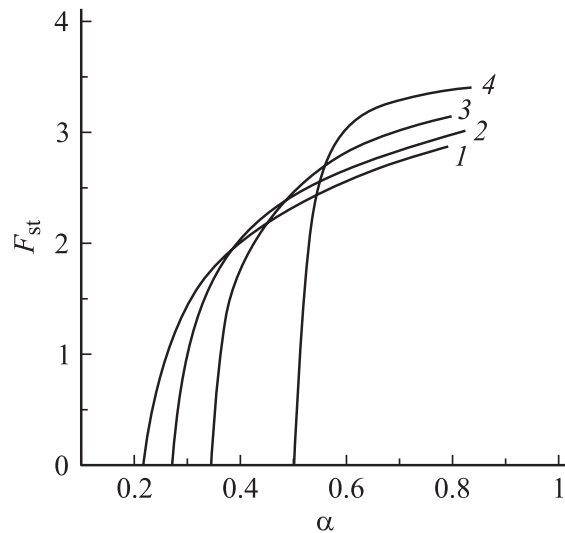


Рис. 7. Зависимости амплитуды стационарной генерации от α при $\gamma = 1.0$, $\psi = -\pi/2$ и различных значениях параметра пространственного заряда: $\theta_p = 0.001$ (1), 1.0 (2), 1.5 (3), 2.0 (4).

амплитуды достигается достаточно далеко до порога автомодуляции [13]. Интересно, что увеличение параметра ПЗ приводит к увеличению максимальной амплитуды выходного сигнала. Аналогичное поведение характерно и для ЛОВ, что было обнаружено Г.Н. Рапопортом еще в 1958 г. [27].

Перейдем теперь к моделированию автомодуляционных и хаотических режимов генерации. Как и в предыдущих разделах, будем интересоваться последовательностью бифуркаций, которая имеет место при увеличении параметра α , отвечающего за возбуждение генератора. Однако необходимо учесть, что в эксперименте можно увеличивать α либо путем увеличения глубины обратной связи, либо путем увеличения тока электронного пучка. В кинематической модели не было необходимости рассматривать эти случаи по отдельности. Теперь же модель характеризуется еще одним параметром θ_p , который пропорционален $I_0^{1/2}$, а от глубины ОС не зависит. Таким образом, если моделируется ситуация, когда увеличивается глубина ОС, то следует увеличивать α , оставляя θ_p постоянным (именно таким образом получены результаты, представленные на рис. 7). Если же считается, что увеличивается ток пучка, следует одновременно с увеличением α увеличивать θ_p пропорционально $\sqrt{\alpha}$.

Расчеты показали, что в первом случае (т.е. когда увеличивается α при постоянном θ_p) поведение системы остается качественно аналогичным кинематическому случаю, по крайней мере при не слишком больших значениях параметра пространственного заряда $\theta_p < \pi/2$. Однако в случае, когда в качестве бифуркационного параметра выбран ток пучка, т.е. одновременно увеличиваются α и θ_p , поведение системы качественно меняется. Действительно, как следует из характеристического уравнения (22), порог самовозбуждения с увеличением θ_p также увеличивается и стремится к бесконечности при $\theta_p \rightarrow \pi$. Соответственно, увеличиваются пороги автомодуляции и перехода к хаосу. В результате при увеличении тока мы смещаемся в область ниже порога самовозбуждения и происходит срыв генерации. На рис. 8 приведены примеры огибающей выходного сигнала при различных значениях тока пучка. При выбранных значениях параметров самовозбуждение происходит при $\alpha_{st} = 1.242$, $\theta_p^{st} = 1.115$. В ходе численного моделирования увеличивалось α и одновременно увеличивалось θ_p в $\sqrt{\alpha/\alpha_{st}}$ раз. Видно, что при мере увеличения тока режим стационарной генерации сменяется периодической автомодуляцией. Вблизи порога автомодуляция является квазигармонической. Далее период автомодуляции заметно увеличивается, а зависимость огибающей сигнала от времени принимает вид релаксационных колебаний. Наконец, при больших токах, когда θ_p приближается к π , происходит срыв генерации ($\alpha = 7.645$, $\theta_p = 2.765$). Удвоения периода и переход к хаосу не наблюдаются. Данный эффект имеет много общего с обнаруженным в [26] явлением подавления автомодуляции силами ПЗ

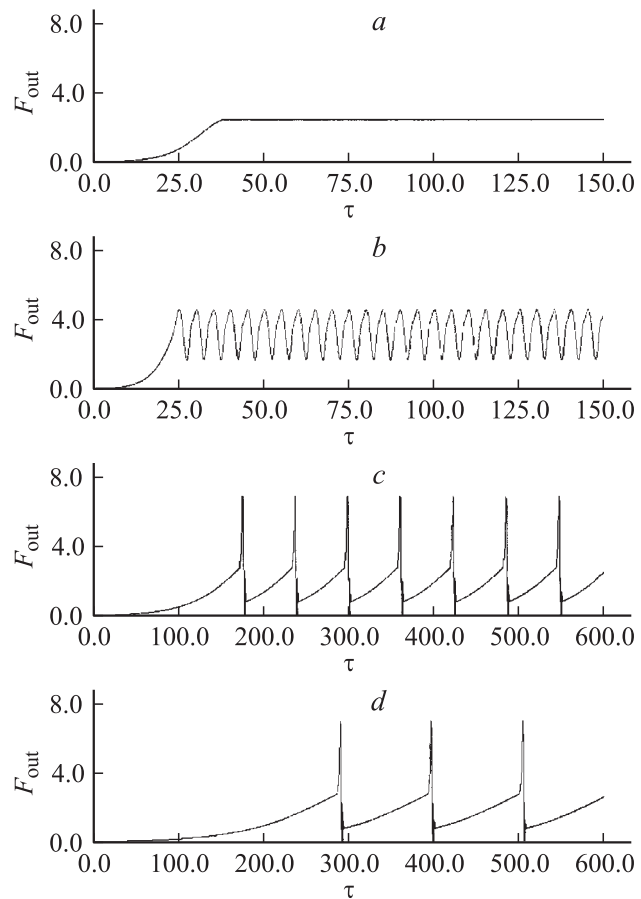


Рис. 8. Огибающие выходного сигнала в различных динамических режимах по мере увеличения тока пучка: *a* — $\alpha = 2.2$, $\theta_p = 1.483$; *b* — $\alpha = 4.5$, $\theta_p = 2.121$; *c* — $\alpha = 7.5$, $\theta_p = 2.739$; *d* — $\alpha = 7.575$, $\theta_p = 2.752$. Остальные параметры те же, что и на рис. 7.

и ЛОВ. Однако поскольку в клистроне взаимодействие пучка с полем происходит по сути дискретно в зазорах резонаторов, он выражен сильнее, чем в ЛОВ, и при неблагоприятном распределении гармоники сгруппированного тока происходит не просто подавление автомодуляции, а срыв генерации.

Заключение

В настоящей работе представлены результаты детального исследования модели двухрезонаторного клистрона-генератора с ЗОС, предложенной ранее в [6]. Обнаружена богатая картина нелинейной динамики с разнообразными переходами порядок—хаос и хаос—порядок по различным сценариям. Проведен подробный теоретический анализ условий самовозбуждения и стационарных режимов генерации, сделаны оценки порога возникновения автомодуляции. Выполнено численное моделирование процессов перехода к хаосу, которые наблюдаются по мере увеличения тока электронного пучка или глу-

бины обратной связи, в широком диапазоне параметров. В центрах зон генерации наблюдается переход к хаосу по сценарию Фейгенбаума, который является наиболее характерным для систем, описываемых дифференциальными уравнениями с запаздыванием [6,7,10,19]. Далее наблюдается сложная последовательность чередующихся регулярных и хаотических режимов автомодуляции. Возникают все новые и новые периодические режимы, которым в фазовом пространстве отвечают предельные циклы все усложняющейся формы. При этом имеются либо режимы, в которых доминирует основная мода, либо режимы, в которых доминируют две составляющие с примерно одинаковыми амплитудами, расположенные симметрично от основной, а основная мода подавлена (эффект „расщепления моды“). На базе каждого цикла вновь совершается переход к хаосу, который может происходить либо через удвоения периода, либо жестко.

Вблизи границ зоны генерации конкуренция двух собственных мод приводит к существенному усложнению картины динамики. Наблюдается лишь конечное число бифуркаций удвоения, тем меньшее, чем ближе мы к границе зоны. Затем последовательно происходят обратный переход к периодическому режиму, возникновение квазипериодической автомодуляции и переход к хаосу через разрушение квазипериодичности (или через удвоения резонансного цикла на торе). Последовательность бифуркаций завершается объединением аттракторов на базе различных мод. При этом в отличие от автогенератора с кубичной нелинейностью [10] возникает не развитый хаотический режим, а так называемый симметричный периодический режим, в спектре которого присутствуют составляющие на частотах обеих соседних мод с примерно одинаковой амплитудой.

Предложена модификация исходной кинематической модели с учетом влияния сил пространственного заряда на основе приближенной нелинейной волновой теории В.А. Солнцева. Обнаружено, что увеличение пространственного заряда пучка приводит с одной стороны к затруднению самовозбуждения автогенератора, с другой — к росту максимально достижимой амплитуды стационарной генерации. При учете сил ПЗ сценарии, развивающиеся при увеличении глубины обратной связи и тока пучка, следует рассматривать по отдельности. Обнаружено, что в первом случае поведение системы остается качественно аналогичным кинематическому случаю, в то время как выбор тока пучка в качестве бифуркационного параметра качественно изменяет поведение системы. В частности, разгруппировка электронов при неблагоприятных значениях параметра ПЗ $\theta_p \sim \pi$ приводит к срыву генерации.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 03-02-16192 и 03-02-16269), а также программы „Университеты России“.

Список литературы

- [1] *Дмитриев А.С., Панас А.И.* Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. М.: Физматлит, 2002.
- [2] *Дмитриев А.С.* // Нелинейные волны. 2002 / Под ред. А.В. Гапонова-Грехова, В.И. Некоркина. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2003. С. 53–76.
- [3] Special Issue on Application of Nonlinear Dynamics to Electronic and Information Engineering Proc. IEEE. 2002. Vol. 90. N 5.
- [4] *Dronov V., Hendrey M.R., Antonsen T.M., Ott E.* // Chaos. 2004. Vol. 14. N 1. P. 30–37.
- [5] *Lukin K.A.* // Proc. First Intern. Workshop on the Noise Radar Technology (NRTW 2002). Yalta (Crimea, Ukraine), 2002. P. 13–22.
- [6] *Дмитриев Б.С., Жарков Ю.Д., Рыскин Н.М., Шигаев А.М.* // РИЭ. 2001. Т. 46. № 5. С. 604–610.
- [7] *Dmitrieva T.V., Ryskin N.M., Shigaev A.M.* // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2001. Vol. 4. N 4. P. 376–382.
- [8] *Дмитриев Б.С., Жарков Ю.Д., Кизжаева К.К.* и др. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2002. Т. 10. №5. С. 37–49.
- [9] *Дмитриев Б.С., Жарков Ю.Д., Клокотов Д.В., Рыскин Н.М.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 7. С. 105–110.
- [10] *Рыскин Н.М., Шигаев А.М.* // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 7. С. 1–8.
- [11] *Рыскин Н.М., Титов В.Н., Трубецков Д.И.* // ДАН. 1998. Т. 358. № 5. С. 620–623.
- [12] *Кац В.А.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28. № 2. С. 161–176.
- [13] *Рыскин Н.М.* // Изв. вузов. Радиофизика. 2004. Т. 47. № 2. С. 129–142.
- [14] *Вайнштейн Л.А., Солнцев В.А.* Лекции по сверхвысокочастотной электронике. М.: Сов. радио, 1973. 400 с.
- [15] *Солнцев В.А.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1974. Т. 17. № 4. С. 616–625.
- [16] *Блиох Ю.П., Бородкин А.В., Любарский М.Г.* и др. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1993. Т. 1. № 1–2. С. 34–49.
- [17] *Кузнецов С.П.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25. № 12. С. 1410–1428.
- [18] *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
- [19] *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
- [20] *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001.
- [21] *Lugiato L.A., Narducci L.M., Eschenazi E.V.* et al. // Phys. Rev. A. 1985. Vol. 32. N 3. P. 1563–1575.
- [22] *Narducci L.M., Tredicce J.R., Lugiato L.A.* et al. // Phys. Rev. A. 1986. Vol. 33. N 3. P. 1842–1854.
- [23] *Ханин Я.И.* Основы динамики лазеров. М.: Наука, 1999.
- [24] *Дмитриева Т.В., Рыскин Н.М.* // ЖЭТФ. 2005. Т. 127. Вып. 1. С. 230–241.
- [25] *Дмитриева Т.В., Рыскин Н.М., Титов В.Н., Шигаев А.М.* // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1999. Т. 7. № 6. С. 66–82.
- [26] *Безручко Б.П., Булгакова Л.В., Кузнецов С.П., Трубецков Д.И.* // Лекции по электронике СВЧ и радиофизике (Пятая зимняя школа-семинар инженеров). Кн. 5. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1980. С. 25–77.
- [27] *Рапопорт Г.Н.* // РИЭ. 1958. Т. 3. № 2. С. 255–261.