01;03

Турбулентность течений несжимаемой жидкости вблизи локального равновесия и принцип вторичного максимума энтропии

© В.М. Журавлев

Ульяновский государственный университет,
432000 Ульяновск, Россия
e-mail: zhvictorm@gmail.com

(Поступило в Редакцию 23 июня 2008 г.)

Рассматривается вариационный принцип максимальной энтропии описания динамики слабонеравновесной турбулентности на основе теории напряжений Рейнольдса для течений вязкой несжимаемой жидкости. На основе этого принципа получены уравнения, замыкающие теорию напряжений Рейнольдса, и выведены уравнения, описывающие взаимодействие среднего потока с турбулентностью для трехмерных турбулентных течений. Рассмотрены редукции теории к двумерным течениям и слабой турбулентности. Рассмотрены термодинамические аналогии и рассмотрен пример течения Куэтта.

Введение

Известным и часто используемым подходом к решению задачи о сложной динамике жидкости при больших числах Рейнольдса — турбулентности — является подход, развитый первоначально в работах Осборна Рейнольдса (см. [1–4]) и носящий его имя. Метод Рейнольдса связан с представлением о турбулентном течении, как о случайном процессе. Введение случайных процессов в теорию означает отказ описывать процесс детально и намерение получить замкнутое описание динамики в среднем, т.е. только для средних параметров и моментов случайных величин. Поэтому в методе Рейнольдса исходная задача сводится к исследованию моментов распределений соответствующих случайных параметров среды (компонент скорости, давления, плотности и т.д.).

Хотя методы описания систем на основе усреднения по ансамблю их состояний вблизи некоторых их „средних“ состояний хорошо изучены и имеют широкий круг применения, однако основной трудностью описания систем по методу Рейнольдса является отсутствие универсальных рецептов замыкания системы уравнений для цепочки моментов случайных полей в системах. Эту проблему, возникающую в силу нелинейности уравнений Эйлера и Навье–Стокса, обычно называют проблемой замыкания моментов. Для решения проблемы замыкания цепочки уравнений Рейнольдса предлагался целый ряд идей и методов (см. например, [1–3,5] и библиографию там). Существующие к настоящему времени попытки замыкания в основном относились к способу формализации представлений о генерации каскада вихрей в турбулентной среде и использовании при этом тех или иных статистических или термодинамических соображений. Это относится и к теории длины перемешивания Прандля–Кармана [6], и закону Колмогорова–Обухова [7], и другим аналогичным теориям (например, [4,5,8]).

Другим подходом к выводу уравнений для усредненных параметров нелинейных систем с хаосом являются методы, основанные на использовании метода максимальной энтропии (ММЭ), заимствованные из концепций термодинамики и статистической физики [4]. Этот подход представляется наиболее точным и корректным, поскольку указывает естественный путь к отысканию состояний, вблизи которых в основном и происходит эволюция систем, что является основным признаком их наблюдаемости в экспериментах. Максимум энтропии обеспечивает условие того, что система находится вблизи такого своего макросостояния, которое реализуется на микроуровне максимальным числом способов. Поэтому она должна проводить основное время своего существования на множестве этих микросостояний (наблюдаемость).

Однако общая формулировка такого подхода в ранее существовавших подходах [4] не была конкретизирована точной и универсальной формулировкой представления вариационного принципа максимума энтропии для исследуемых гидромеханических систем. Такой подход был предложен в [9]. Основная идея его состоит в явном вычислении энтропии нелинейной гидродинамической системы в предположении ее локального равновесия и в последующем отыскании максимума этой найденной энтропии по усредненным параметрам системы. Такой подход можно назвать принципом вторичного максимума энтропии. Возможность повторно вычислять максимум энтропии системы связана с тем, что в случае достижения локального равновесия в системе каждая точка среды приходит к равновесию, вообще говоря, отличающемуся от равновесия соседних точек. В силу непрерывности среды параметры равновесия меняются непрерывно, что и отражается в изменчивости средних полей и моментов флуктуаций. Такое состояние можно назвать слабонеравновесным. Глобальное распределение усредненных полей и моментов при этом и будет определять величину энтропии различных типов локального равновесия. Естественно, что среди таких глобальных распределений должны существовать такие, которые обеспечивают максимум энтропии системы в целом среди всех возможных состояний с локальным равновесием. Основой предлагаемого подхода как раз и является метод отыскания таких состояний со вторичным максимумом энтропии.

Такой подход хорошо себя зарекомендовал в задачах теории передачи информации по линиям связи [10], а также в задачах обработки данных, в частности, в теории спектрального оценивания временных рядов [11–13]. Основой применения ММЭ в этих областях как раз и является возможность вычислять максимум энтропии системы по усредненной информации о ее состоянии.

В предложенном в [9] и развиваемом далее в настоящей работе подходе для вычисления энтропии гидродинамической системы используется точная аналитическая информация о структуре течений, соответствующая исходным уравнениям. Наиболее явно эти дифференциальные законы сохранения присутствуют в теории несжимаемой жидкости, для которой и будут в данной работе проделаны основные выкладки. Эти построения опираются на специальное представление уравнений Эйлера динамики двумерных течений жидкости, построенные в работе [14]. Подход, развитый в [14], может быть распространен и на трехмерный случай, который и рассматривается здесь в качестве общего. В данной работе сначала вводится подходящее описание для уравнений Навье–Стокса несжимаемой жидкости как трех дифференциальных законов сохранения потока импульса. Затем формулируется сам принцип максимальной энтропии в подходящей форме. После этого выводятся уравнения динамики и рассматриваются термодинамические аналогии для турбулентности. Следующим шагом является получение полезных редукций построенной теории к одномерному и двумерному случаям и слабой турбулентности. В заключение рассматриваются примеры одномерных течений и течения Куэтта. Частично результаты, полученные в данной работе, были рассмотрены в [9].

Специальное представление для уравнений Навье–Стокса несжимаемой жидкости

Уравнения Навье–Стокса для трехмерного течения несжимаемой жидкости в декартовой системе координат имеют следующий вид:

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u}, \nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \upsilon\Delta\mathbf{u}, \tag{1}$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0,$$

где $\mathbf{u} = \{u, v, \omega\}$ — компоненты скорости течения, p — нормированное на постоянную плотность давление жидкости, υ — кинематическая вязкость, а Δ — оператор Лапласа.

Третье уравнение сохранения массы для несжимаемой жидкости позволяет ввести представление для скорости течения в следующем виде: $\mathbf{u} = \operatorname{rot}\mathbf{a}$, или в покомпонентной записи:

$$u_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\nabla_\beta a_\gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3, \tag{2}$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ — плотностью антисимметричный символ Левви-Чевитта, нормированный условием $\varepsilon_{123} = 1$. Везде в дальнейшем используется соглашение Эйнштейна суммирования по повторяющемуся индексу. Соотношение (2) позволяет представить оставшиеся уравнения (1) в виде следующих дифференциальных законов сохранения:

$$\nabla_\beta\big(\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}[\alpha_{\gamma,t} - \upsilon\Delta a_\gamma] + u_\alpha u_\beta + \delta_{\alpha\beta}P\big) = 0.$$

Эти два закона сохранения эквивалентны следующим соотношениям:

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}[a_{\gamma,t} - \upsilon\Delta a_\gamma] + u_\alpha u_\beta + \delta_{\alpha\beta}P = \varepsilon_{\beta\gamma\lambda}\nabla_\gamma h^\alpha_\lambda. \tag{3}$$

Вспомогательные функции $h^\alpha_\lambda(x, y, z, t)$ определяются граничными и начальными условиями для исследуемого течения. Представление типа (3) было использовано в [14] для описания двумерных течений вязкой жидкости.

Напряжения Рейнольдса

Как отмечалось по Введении, основным способом описания турбулентных течений является введение понятия средних значений параметров течения и их флуктуаций, которые считаются случайными. Следуя этому подходу, представим параметры течения в виде разложения на две компоненты — средние параметры и флуктуационные:

$$\mathbf{u} = \langle\mathbf{u}\rangle + \mathbf{u}', \quad \mathbf{a} = \langle\mathbf{a}\rangle + \mathbf{a}',$$

$$p = \langle p\rangle + p', \quad h^\alpha_\beta = \langle h^\alpha_\beta\rangle + h'^\alpha_\beta.$$

Средние значения параметров, обозначенные здесь угловыми скобками, будем обозначать далее заглавными буквами:

$$\mathbf{U} = \langle\mathbf{u}\rangle = \operatorname{rot}\mathbf{A}, \quad \mathbf{A} = \langle\mathbf{a}\rangle, \tag{4}$$
$$P = \langle p\rangle, \qquad H^\alpha_\beta = \langle h^\alpha_\beta\rangle.$$

Флуктуационные параметры обозначены штрихом сверху и обладают, по определению, нулевыми математическими ожиданиями по ансамблю: $\langle\mathbf{u}'\rangle = \langle p'\rangle = \langle h'^\alpha_\beta\rangle = \langle\mathbf{a}'\rangle = 0$.

Осредняя (3) по ансамблю флуктуаций, получаем следующие уравнения динамики жидкости:

$$\langle u'_\alpha u'_\beta\rangle = -U_\alpha U_\beta - \delta_{\alpha\beta}P - \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}[A_{\gamma,t} - \upsilon\Delta A_\gamma] + \varepsilon_{\beta\gamma\lambda}\nabla_\gamma H^\alpha_\lambda. \tag{5}$$

Совокупность величин в левой части этих соотношений называются напряжениями Рейнольдса. Для их обозначения в дальнейшем будем использовать матрицу $\mathbf{R} = (R_{\alpha\beta})$ с компонентами $R_{\alpha\beta} = \langle u'_\alpha u'_\beta\rangle$.

Производя симметризацию и антисимметризацию соотношений (5), получим:

$$\langle u'_\alpha u'_\beta \rangle = -U_\alpha U_\beta - \delta_{\alpha\beta} P + \frac{1}{2}\left[\varepsilon_{\beta\gamma\lambda}\nabla_\gamma H^\alpha_\lambda + \varepsilon_{\alpha\gamma\lambda}\nabla_\gamma H^\beta_\lambda\right], \tag{6}$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left[A_{\gamma,t} - \upsilon\Delta A_\gamma\right] = \frac{1}{2}\left[\varepsilon_{\beta\gamma\lambda}\nabla_\gamma H^\alpha_\lambda - \varepsilon_{\alpha\gamma\lambda}\nabla_\gamma H^\beta_\lambda\right]. \tag{7}$$

Последние соотношения явно учитывают симметрию корреляционной матрицы флуктуаций. При этом важно отметить, что соотношения (7) не зависят от напряжений Рейнольдса и безотносительны к соотношениям для них.

Термодинамический подход к турбулентности

Проблема замыкания моментов, о которой упоминалось во Введении, связана с отсутствием в свойствах исходной системы уравнений информации о статических характеристиках течений, описываемых ими. Уравнения Навье–Стокса — детерминированные, и их решения можно отнести к „случайным“ лишь в смысле большой сложности их решений. Поэтому на пространстве решений этих уравнений можно определять множество различных типов вероятностных распределений, которые будут отражать различные типы сложного поведения. Это приводит к необходимости различать физические ситуации по сложности течений и ввести критерий сложности или, наоборот, упорядоченности общей глобальной структуры течения. Естественным для статистической физики параметром упорядоченности или сложности является энтропия. Идеи такого рода были предложены, например, в [4], где сформулировалась соответствующая теорема об энтропии турбулентных течений, которая, собственно, и может рассматриваться как основа термодинамического подхода к описанию турбулентности. Полагаясь на эти соображения, можно конкретизировать способ вычисления энтропии и получить необходимое замыкание уравнений Рейнольдса.

Основой предлагаемого подхода является представление о равновесном состоянии сложной системы, в которое рано или поздно она переходит, если внешние параметры окружающей обстановки остаются неизменными. Такое состояние является устойчивым и поэтому система значительное время проводит вблизи этого состояния. Отсюда следует, что имеет смысл исследовать систему именно в этом состоянии, рассматривая малые отклонения от положения равновесия, но не затрачивая усилий на исследование всех возможных неустойчивых состояний, в которых система находится лишь в течение очень малого времени. Равновесное состояние, согласно термодинамическому подходу, может быть найдено как условие максимума энтропии (см., например, [4]). Этот принцип имеет вариационную формулировку, которая может быть применена для решения гораздо более широкого класса задач, чем непосредственно описание термодинамических систем.

Применение принципа максимума энтропии, однако, требует сформулировать некоторые дополнительные условия, которые сделают постановку задачи более корректной. Это связано с тем, что равновесное состояние, в котором система оказывается в результате релаксационных процессов, зависит от значений внешних параметров и, по крайней мере, одного внутреннего параметра — средней энергии флуктуаций, который в термодинамике связывают с абсолютной температурой.

Для рассматриваемой задачи внешними параметрами являются параметры, входящие в граничные и начальные условия для среднего потока и напряжений Рейнольдса, а роль средней внутренней энергии (абсолютной температуры) играет средняя энергия флуктуаций:

$$\mathscr{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}\left(\langle u'^2\rangle + \langle \upsilon'^2\rangle + \langle w'^2\rangle\right). \tag{8}$$

Для выделения конкретного равновесного состояния системы необходимо использовать соотношение (8) в качестве условия, фиксирующего энергию флуктуаций в каждой точке системы, поскольку, как было оговорено выше, флуктуации в каждой точке равновесной турбулентности независимы. В соответствии с (6) условие (8) можно переписать в виде:

$$\mathscr{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{2}\left(\mathbf{U}^2 + 3P\right) + \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\nabla_\beta H^\alpha_\gamma\right). \tag{9}$$

Локальное и глобальное равновесие

Принцип максимума энтропии может быть сформулирован как условие, выделяющее среди всех возможных распределений вероятности, удовлетворяющих некоторым заранее заданным свойствам, распределение, обладающее максимумом энтропии. Такое распределение реализуется максимальным числом возможных способов и, следовательно, с точки зрения термодинамики имеет максимальную вероятность быть обнаруженным в эксперименте. Это и есть равновесное состояние, которое нас интересует.

Однако для описания равновесного состояния систем, эволюционирующих во времени и распределенных в пространстве, необходимо выделять два уровня организации — локальный и глобальный. Система может прийти в локальное равновесие, но не обладать максимумом энтропии с точки зрения ее глобальной структуры. Поэтому решение задачи о максимуме энтропии динамической системы следует строить в два этапа. Первый этап состоит в отыскании локального термодинамического равновесия в системе, а на втором необходимо отыскивать глобальное распределение полей в системе, которое также обладает максимумом энтропии.

Для решения первой задачи — отыскания локального равновесия — важными являются свойства, связанные с соотношениями (6). Они фиксируют общую форму распределения вероятностей в каждой точке пространства-времени. Эти же соотношения вместе с условиями (7) и (9) будут описывать характер решения для глобального равновесия в системе.

Решение задачи о локальном равновесии строится следующим образом. Пусть $\rho_u(\{\mathbf{u}'(\mathbf{x},t)\}_{R^3\times T})$ есть распределение вероятностей, соответствующее флуктуациям скорости турбулентного течения и удовлетворяющее условию нормировки

$$\int\limits_{\mathscr{V}} \rho_u\big(\{\mathbf{u}'(\mathbf{x},t)\}_{R^3\times T}\big) D\{\mathbf{u}'(\mathbf{x},t)\} = 1. \qquad (10)$$

Здесь через $\{\mathbf{u}'(\mathbf{x},t)\}_{R^3\times T}$ обозначено множество $\mathscr{V}$ всех возможных значений флуктуаций вектора скорости, заданных на пространстве-времени $R^3\times T$, а через $D\{\mathbf{u}'(\mathbf{x},t)\}$ — дифференциал меры на этом бесконечномерном пространстве. Тогда энтропия такой системы может быть представлена следующим образом:

$$\mathscr{H} = -\int\limits_{\mathscr{V}} \rho_u\big(\{\mathbf{u}'(\mathbf{x},t)\}_{R^3\times T}\big) \ln \rho_u\big(\{\mathbf{u}'(\mathbf{x},t)\}_{R^3\times T}\big) \times D\{\mathbf{u}'(\mathbf{x},t)\}. \qquad (11)$$

Согласно принципу максимума энтропии, необходимо найти условный экстремум этого функционала, соответствующий условиям (6). Используя метод множителей Лагранжа, задачу сводим к отысканию безусловного экстремума функционала

$$\check{\mathscr{H}} = \mathscr{H} + \int L_{\alpha\beta}(\mathbf{x},t)\big(\langle u'_\alpha u'_\beta\rangle(\mathbf{x},t) - R_{\alpha\beta}(\mathbf{x},t)\big)d\mathbf{x}^3dt + \lambda_0 \int \rho_u\big(\{\mathbf{u}'(\mathbf{x},t)\}_{R^3\times T}\big) D\{\mathbf{u}'(\mathbf{x},t)\}.$$

Здесь $R_{\alpha\beta}(\mathbf{x},t)$ — функции в правой части (6), связанные со средними параметрами потока, и

$$\langle u'_\alpha u'_\beta\rangle(\mathbf{x},t) = \int\limits_{\mathscr{V}} u'_\alpha(\mathbf{x},t)u'_\beta(\mathbf{x},t)\rho_u\big(\{\mathbf{u}'(\mathbf{x},t)\}_{R^3\times T}\big) \times D\{\mathbf{u}'(\mathbf{x},t)\}.$$

Решением этой задачи является гауссово распределение, которое можно построить, опираясь на методы, изложенные в [10,11]. Принципиальным при этом является именно то, что ограничения накладываются на вторые моменты распределения, что, в свою очередь, является следствием формы нелинейности уравнений Навье–Стокса. Полученное распределение обладает свойством независимости флуктуаций в двух любых точках пространства-времени $R^3\times T$ и может формально быть записано в следующем виде:

$$\rho_u\big(\{\mathbf{u}'(\mathbf{x},t)\}_{R^3\times T}\big) = \prod_{(\mathbf{x},t)\in R^3\times T} Z(\mathbf{x},t) \times e^{-(1/2)Q_{\alpha\beta}(\mathbf{x},t)u'_\alpha(\mathbf{x},t)u'_\beta(\mathbf{x},t)}, \qquad (12)$$

где

$$Z(\mathbf{x},t) = (2\pi)^{-3/2}\det\mathbf{Q}(\mathbf{x},t)$$

и введено обозначение $\mathbf{Q} = (Q_{\alpha\beta})$:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x},t) = \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{x},t),$$

$$\det\mathbf{Q}(\mathbf{x},t) = \big(\det\mathbf{R}(\mathbf{x},t)\big)^{-1}.$$

Матрица $\mathbf{Q}$ с компонентами $Q_{\alpha\beta}$ является обратной к матрице ковариаций $\mathbf{R}$. Для краткости в дальнейшем будем обозначать определитель матрицы ковариаций через $D(\mathbf{x},t)$: $D(\mathbf{x},t) = \det\mathbf{R}(\mathbf{x},t)$. Отметим, что определитель матрицы ковариаций всегда неотрицателен $D(\mathbf{x},t)\geq 0$ в силу известных свойств этой матрицы. Следовательно, для напряжений Рейнольдса, которые являются вторыми центральными моментами этого распределения, выполняются соотношения

$$\langle u'_\alpha(\mathbf{x},t)u'_\beta(\mathbf{x}',t)\rangle = \begin{cases} R_{\alpha\beta}(\mathbf{x},t), & \mathbf{x}=\mathbf{x}',\ t=t';\\ 0, & \mathbf{x}\neq\mathbf{x}',\ t\neq t'. \end{cases} \qquad (13)$$

Исходя из этих свойств и следуя [10], значение энтропии найденного распределения можно представить в следующем виде:

$$\mathscr{H}_1 = \frac{1}{2}\int\limits_{R^3\times T} \ln\det\mathbf{R}(x,y,z,t)dxdydzdt \qquad (14)$$

с точностью до некоторой несущественной аддитивной постоянной. При выводе этого соотношения не использовались явные значения элементов матрицы $\mathbf{R}(x,y,z,t)$. Использовалось лишь то, что соотношения (6) содержат набор вторых моментов распределения. Поэтому среди всех гауссовых распределений, являющихся решением первичной задачи, необходимо теперь отыскать те, которые будут удовлетворять максимуму энтропии (14) среди всех возможных конфигураций среднего течения, которые определяют явный вид элементов матрицы $\mathbf{R}(x,y,z,t)$ из соотношений (6). (7) и (9).

Вторичный вариационный принцип максимума энтропии

Задача отыскания максиума функционала (14) эквивалентна следующей безусловной вариационной задаче:

$$\delta\mathscr{H}_2 = \frac{1}{2}\int \mathbf{Tr}(\mathbf{Q}\delta\mathbf{R})dW + \delta\int \Lambda_{\alpha\beta}\Big[\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}(A_{\gamma,t} - \nu\Delta A_\gamma) - \frac{1}{2}\big[\varepsilon_{\beta\gamma\lambda}\nabla_\gamma H^\alpha_\lambda - \varepsilon_{\alpha\gamma\lambda}\nabla_\gamma H^\beta_\lambda\big]\Big]dW + \delta\int M\Big(\mathscr{E}(\mathbf{x},t) + \frac{1}{2}(\mathbf{U}^2+3P) - \frac{1}{2}(\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\nabla_\beta H^\alpha_\gamma)\Big)dW = 0. \qquad (15)$$

Здесь $\Lambda_{\alpha\beta}(\mathbf{x},t) = -\Lambda_{\beta\alpha}(\mathbf{x},t)$ и $M = M(\mathbf{x},t)$ — множители Лагранжа, учитывающие соотношения (7) и (9),

$dW = dxdydzdt$, $\mathbf{Tr}$ — операция вычисления следа матрицы: $\mathbf{Tr}\{\mathbf{Q}\} = Q_{11} + Q_{22} + Q_{33}$. Остальные независимые соотношения системы (6) могут быть учтены прямым образом в результате их подстановки в выражения для вариаций прямой и обратной матрицы ковариаций.

Для вариационной задачи (15) независимыми переменными состояния системы являются следующие P, H^{α}_{β}, A_{α}. Вариация матрицы ковариаций по этим независимым переменным определяется с помощью соотношений (6), например,

$$\delta_P R_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}\delta P,$$

$$\delta_H R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left[\varepsilon_{\beta\gamma\lambda}\nabla_{\gamma}\delta H^{\alpha}_{\lambda} + \varepsilon_{\alpha\gamma\lambda}\nabla_{\gamma}\delta H^{\beta}_{\lambda}\right].$$

Подставив (6), (7) в (15) и последовательно вычислив вариацию подынтегрального выражения по параметрам P, $\mathbf{H}$, находим соответствующие уравнения динамики турбулентности:

$$\delta P: \quad \mathrm{Tr}\{\mathbf{Q}\} = Q_{11} + Q_{22} + Q_{33} = 3M, \tag{16}$$

$$\Delta H^{\alpha}_{\lambda}: \quad \nabla_{\gamma}\left[(Q_{\alpha\beta} - 2\Lambda_{\alpha\beta} - 3\delta_{\alpha\beta}M)\varepsilon_{\beta\gamma\lambda}\right] = 0. \tag{17}$$

В последнем уравнении учтено, что $Q_{\alpha\beta} = Q_{\beta\alpha}$ и $\Lambda_{\alpha\beta} = -\Lambda_{\beta\alpha}$. Уравнение для вариации по $\mathbf{A}$ будет иметь следующий вид:

$$\Theta_{\alpha,t} + \nu\Delta\Theta_{\alpha} + \varepsilon_{\alpha\lambda\gamma}\nabla_{\gamma}\left[(Q_{\lambda\mu} - M\delta_{\lambda\mu})U_{\mu}\right] = 0. \tag{18}$$

Здесь и далее $\Theta_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\Lambda_{\beta\gamma}$.

Уравнения (17) представляют собой уравнения для напряжений Рейнольдса, а уравнения (16) и (18) — для вариационных параметров Λ_{α} и M. Исходные уравнения (6), (7) остаются уравнениями для среднего потока. Условие (9), как уже отмечалось, указывает на энергетический тип равновесного состояния.

Анализ структуры полученных уравнений начнем с уравнения (17), которое представляет собой набор дифференциальных законов сохранения. В силу этого уравнения (17) могут быть записаны в следующей эквивалентной форме:

$$\varepsilon_{\beta\gamma\lambda}(Q_{\alpha\beta} - 2\Lambda_{\alpha\beta} - 3\delta_{\alpha\beta}M) = \varepsilon_{\gamma\beta\mu}\nabla_{\beta}G^{\lambda}_{\mu\alpha}, \tag{19}$$

где $G^{\lambda}_{\mu\alpha}$ — набор функциональных параметров, дифференцируемых дважды и зависящих от граничных условий для напряжений Рейнольдса. Среди функций $G^{\lambda}_{\mu\alpha}$ в силу симметрийных свойств левой части (19) есть линейно зависимые. Детальный анализ этих соотношений, учитывающий свойства симметрии величин, входящих в них, приводит к следующим общим соотношениям:

$$G^{\lambda}_{\mu\alpha} = \nabla_{\mu}\xi^{\lambda}_{\alpha} - \delta^{\lambda}_{\mu}\big(B_{\alpha} + \sigma_{\alpha}(x_{\alpha})\big), \tag{20}$$

$$Q_{\alpha\beta} = M\delta_{\alpha\beta} + P_{\alpha\beta}, \tag{21}$$

$$\Theta_{\alpha} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\nabla_{\beta}V_{\gamma}. \tag{22}$$

Здесь $\mathbf{V}$ — вспомогательное векторное поле и введено обозначение

$$P_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,(\nabla_{\alpha}V_{\beta} + \nabla_{\beta}V_{\alpha}), \tag{23}$$

и, кроме этого, $\xi^{\lambda}_{\mu}(\mathbf{x}, t)$ и $\sigma_{\alpha}(x_{\alpha}, t)$ — произвольные функции, при этом $\sigma_1 = \sigma_1(x, t)$, $\sigma_2 = \sigma_2(y, t)$, $\sigma_3 = \sigma_3(z, t)$. Из (16) находим дополнительно:

$$\mathrm{div}\,\mathbf{V} = \nabla_{\alpha}V_{\alpha} = 0. \tag{24}$$

Уравнение для Θ_{α}, согласно (21), можно представить в следующем виде:

$$\Theta_{\alpha,t} + \upsilon\Delta\Theta_{\alpha} + \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\alpha\lambda\gamma}\nabla_{\gamma}\left[(\nabla_{\lambda}V_{\mu} + \nabla_{\mu}V_{\lambda})U_{\mu}\right] = 0. \tag{25}$$

Учитывая (22), получаем уравнения для поля $\mathbf{V}$

$$V_{\alpha,t} + \upsilon\Delta V_{\alpha} - \left[(\nabla_{\alpha}V_{\mu} + \nabla_{\mu}V_{\alpha})U_{\mu}\right] - \nabla_{\alpha}\Phi = 0, \tag{26}$$

которое является в некотором смысле сопряженным для $\mathbf{U}$. Такое определение оправдано, поскольку знаки перед производной по времени в уравнениях для $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ противоположны. Следовательно, вектор с компонентами V_{α} можно рассматривать как скорость „сопряженного“ потока. Поле Θ_{α} и множители Лагранжа $\Lambda_{\alpha\beta}$ при этом можно рассматривать как компоненты поля завихренности сопряженного потока. В (26) функция Φ — произвольная, которую можно рассматривать как сопряженное давление.

Уравнения для среднего потока полезно переписать в виде, аналогичном (25):

$$\mathbf{U}_{\alpha,t} - \upsilon\Delta U_{\alpha} = -\nabla_{\beta}[P\delta_{\alpha\beta} + U_{\alpha}U_{\beta} + R_{\alpha\beta}], \tag{27}$$

в которое следует подставить выражение для $\mathbf{R} = \mathbf{Q}^{-1}$.

Матрица напряжений Рейнольдса

Для того чтобы выразить в общем виде матрицу ковариаций (матрицу напряжений Рейнольдса) через компоненты поля $\mathbf{V}$, воспользуемся известным формальным представлением $\mathbf{R}$ через $\mathbf{Q}$ как обратной функции от матрицы. В общем случае имеем следующее тождество:

$$\mathbf{R} = C_0\mathbf{I} + C_1\mathbf{Q} + C_2\mathbf{Q}^2, \tag{28}$$

где $\mathbf{I}$ — единичная квадратная матрица размерности 3, а коэффициенты C_k, $k = 0, 1, 2$ вычисляются через собственные числа q_1, q_2, q_3 матрицы $\mathbf{Q}$ из решения системы трех линейных алгебраических уравнений:

$$\frac{1}{q_k} = C_0 + C_{1q_k} + C^2_{2q_k}, \quad k = 1, 2, 3. \tag{29}$$

При этом полезно воспользоваться соотношениями $q_1 + q_2 + q_3 = 3M$ и $1/q_1 + 1/q_2 + 1/q_3 = 2\mathscr{E}$, что дает (см. Приложение)

$$C_2 = D, \quad C_1 = -3MD, \quad C_0 = 2\mathscr{E}. \tag{30}$$

Из (28) и (30) сразу следует, что

$$\mathbf{R} = C_0\mathbf{I} + C_1(M\mathbf{I} + \mathbf{P}) + C_2(M\mathbf{I} + \mathbf{P})^2$$
$$= 2(\mathscr{E} - DM^2)\mathbf{I} - MD\mathbf{P} + D\mathbf{P}^2.$$

Здесь $\mathbf{P}$ — матрица с элементами $P_{\alpha\beta}$, определенными соотношениями (23). Последнее выражение можно использовать для подстановки в (27).

Выпишем теперь соотношения, связывающие M с $\mathscr{E}$:

$$\mathscr{E} = D(3M^2 - K). \qquad (31)$$

Здесь

$$K = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1,2,3}(\nabla_\alpha V_\alpha)^2 + \frac{1}{4}\sum_{\alpha<\beta=1,2,3}(\nabla_\alpha V_\beta + \nabla_\alpha V_\beta)^2$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1,2,3} P^2_{\alpha\beta}, \qquad (32)$$

$$D^{-1} = M^3 - MK + N, \quad N = \det\mathbf{P}. \qquad (33)$$

Соотношение (31) вместе с (33) позволяет выразить множитель Лагранжа M через $\mathscr{E}$, разрешая кубическое уравнение:

$$M^3 - \frac{3}{\mathscr{E}}M^2 - MK + N + \frac{K}{\mathscr{E}} = 0 \qquad (34)$$

относительно M. Решение этого уравнения формально можно рассматривать как функцию трех переменных $\mathscr{E}$, K, N: $M = M(\mathscr{E}, K, N)$. Среди трех решений этого уравнения необходимо оставить только те, которые удовлетворяют неравенству:

$$3M^2 > K > 0, \qquad (35)$$

вытекающему из (31) и очевидных условий $\mathscr{E}$ и $D > 0$.

Термодинамические свойства уравнений

В рамках полученной системы уравнений можно ввести аналог первого начала термодинамики и уравнения состояния турбулентности. Для этого воспользуемся тем, что удельная энтропия s турбулентности равна: $s = (1/2)\ln D$. В этом случае, логарифмируя (31), получаем следующее соотношение для s:

$$s = \frac{1}{2}\ln\mathscr{E} - \frac{1}{2}\ln G \qquad (36)$$

или в дифференциальной форме:

$$\mathscr{E}ds = \frac{1}{2}d\mathscr{E} - \frac{1}{2}\mathscr{E}dG = \left[\frac{1}{2} - \Xi\frac{\partial M}{\partial\mathscr{E}}\right]d\mathscr{E}$$
$$- \left(\Xi\frac{\partial M}{\partial K} - \frac{1}{2G}\right)dK - \Xi\frac{\partial M}{\partial N}dN, \qquad (37)$$

где $G = 3M^2(\mathscr{E}, K, N) - K$, $\Xi = 3M\mathscr{E}G^{-1}$, а (34) играет вместе с (31) роль уравнения состояния турбулентности. Энергия турбулентности $\mathscr{E}$ играет роль абсолютной температуры. Переменные K и N играют роль внутренних параметров турбулентности.

Необходимость в таких дополнительных соотношениях возникает из-за неполной замкнутости теории. В теории фигурирует неопределенная функция $\mathscr{E}$ — полная энергия турбулентности, которая считается заданной. В принципе, после того как уравнения теории найдены и вычислено значение удельной и полной энтропий, можно попытаться проварьировать функционал еще раз по $\mathscr{E}$ и найти максимальное его значение по этой функции. Однако такой подход невозможен. Из (37) видно, что вариация удельной энтропии s по $\mathscr{E}$ обращается в нуль в случае:

$$3M^2(\mathscr{E}, K, N) - K = 6M\mathscr{E}\frac{\partial M}{\partial\mathscr{E}}. \qquad (38)$$

Производная в правой части этого соотношения может быть вычислена дифференцированием уравнения (34). В результате имеем

$$\frac{\partial M}{\partial\mathscr{E}} = \frac{K - 3M^2}{3M^2E^2 - 6ME - KE^2}.$$

Подстановка последнего соотношения в (38) приводит к условию

$$3M^2 - K = 0,$$

что автоматически ведет к $\mathscr{E} = 0$ и $D = 0$ и вырождению теории. Следовательно, удельная энтропия монотонна по $\mathscr{E}$ и для замыкания теории остается только привлекать термодинамические соотношения.

С точки зрения термодинамической аналогии соотношение (37) можно рассматривать как закон сохранения энергии при переходе от одной точки пространства и времени $(\mathbf{x}, t)$ к другой $(\mathbf{x}', t')$. Роль термодинамической системы здесь играет каждая точка $(\mathbf{x}, t)$ среды в данный момент времени. Множество всех точек представляет собой совокупность всех возможных состояний такой термодинамической системы, а переход от одной точки к другой представляет собой термодинамический (квазистатический) процесс. Этот процесс может характеризоваться определенными дополнительными соотношениями, которые накладывают ограничения на функциональные свойства энергии турбулентности $\mathscr{E}$. В термодинамике такими условиями являются условия типа адиабатичности, постоянства теплоемкости, давления, объема и т.п. В данной теории это позволяет формулировать условия выделения определенной функциональной зависимости $\mathscr{E} = \mathscr{E}(\mathbf{x}, t)$, опираясь на определенные физические соображения, имеющие термодинамические аналогии. Например, можно, основываясь на каких-либо физических соображениях, связанных с общими условиями возникновения турбулентности в конкретной геометрической и физической ситуации, говорить об „адиабатической“ турбулентности, полагая

$s = (1/2)\ln D = \text{const}$. В результате это даст вполне определенное соотношение для $\mathscr{E}$. Можно фиксировать какие-либо другие функции, входящие в (37) и связанные с $\mathscr{E}$. Информация о всех таких ситуациях, очевидно, дожна быть сопряжена с конкретной задачей и черпаться из конкретных физических условий постановки эксперимента, а также из результатов эксперимента. Такой анализ выходит за рамки данной работы. Поэтому в дальнейшем будем просто формулировать соотношения типа (37) для рассматриваемых далее редукций, а для задачи описания течения Куэтта рассмотрим несколько типов условий, фиксирующих $\mathscr{E}$.

Редукция к двумерной теории

При анализе динамики течений часто возникает необходимость рассматривать вопрос о существовании предельного перехода от трехмерной теории к двумерной или одномерной. В рамках теории с исходными уравнениями Навье–Стокса такие редукции строятся без особого труда на основе физических закономерностей, которые соответствуют необходимой размерности. В рамках данной теории такой переход имеет определенные ограничения, состоящие в том, что в рамках развитой трехмерной теории нельзя полагать равными нулю флуктуации по одной любой координате даже, если проекция средней скорости течения по этой же координате везде в любой момент времени равна нулю. Если положить равными нулю все флуктуации по одной из координат, то это приведет к нулевым напряжениям Рейнольдса, связанным с этой координатой, и к вырожденности ковариационной матрицы $\mathbf{R}$. Это делает все построения в рамках трехмерной теории бессмысленными. Поэтому существует два подхода к редукции. Первый состоит в том, что с самого начала рассматриваются двумерные или одномерные течения жидкости. В этом случае матрица ковариаций двумерна и вариационная задача ставится сразу для энтропии одномерного или двумерного турбулентного потока. Такую ситуацию будем в дальнейшем называть чисто одномерной или двумерной турбулентностью.

Второй способ редукции — это прямой переход к уравнениям двумерной теории за счет определенных ограничений на вид среднего течения и матрицы ковариаций флуктуаций, при которых уравнения для одной из компонент среднего течения и сопряженного потока тождественно выполняется, но матрица ковариаций остается невырожденной. Без ограничения общности можем считать, что редуация сводится к исключению третьей координаты z. Для реализации такой редукции необходимо сделать следующие предположения:

$$\langle u'w'\rangle = \langle v'w'\rangle = 0, \quad \nabla_z \mathbf{U} = \nabla_z \mathbf{V} = 0,$$

$$\nabla_z \mathbf{R} = \nabla_z \mathbf{Q} = 0, \quad V_z = U_z = \text{const}, \tag{39}$$

при этом $\langle w'^2\rangle \neq 0$. В этом случае имеем:

$$\mathbf{Q}(x, y, t) = \frac{1}{D_2}\begin{pmatrix} \langle v'^2\rangle & -\langle u'v'\rangle & 0 \\ -\langle u'v'\rangle & \langle u'^2\rangle & 0 \\ 0 & 0 & Q_0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}(x, y, t) = \begin{pmatrix} \langle u'^2\rangle & \langle u'v'\rangle & 0 \\ \langle u'v'\rangle & \langle u'^2\rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle w'^2\rangle \end{pmatrix},$$

где

$$D_2 = \langle u'^2\rangle\langle v'^2\rangle - \langle u'v'\rangle^2,$$

$$Q_0 = \frac{D_2}{\langle w'^2\rangle}.$$

Здесь следует обратить внимание на то обстоятельство, что в чисто двумерном случае обратная матрица ковариаций с точностью до множителя линейным образом связана с самой матрицей ковариаций. В этом плане чисто двумерная теория существенно проще трехмерной теории, редуцированной к двухмерной. Увеличение размерности пространства влечет за собой увеличение порядка нелинейности в уравнениях Рейнольдса.

Соотношения (16) и (8) приводят к следующему уравнению для M:

$$3MD_2 = \langle u'^2\rangle + \langle v'^2\rangle + Q_0 = 2\mathscr{E} + \frac{D_2}{\langle w'^2\rangle} - \langle w'^2\rangle.$$

При выполнении условий редукции соотношение (24) принимает следующий вид: $\nabla_x V_x + \nabla_y V_y = 0$. Это означает, что существует функция ξ такая, что

$$V_x = \nabla_y \xi, \quad V_y = -\nabla_x \xi.$$

Уравнения для напряжений Рейнольдса в этом случае будут такими:

$$\langle u'^2\rangle = D_2(M - \nabla_y V_y) = D_2(M + \xi_{xy}),$$

$$\langle v'^2\rangle = D_2(M - \nabla_x V_x) = D_2(M - \xi_{xy}), \tag{40}$$

$$\langle u'v'\rangle = -\frac{D_2}{2}(\xi_{xx} - \xi_{yy}),$$

$$\frac{1}{\langle w'^2\rangle} = M. \tag{41}$$

Отсюда находим:

$$D_2^{-1} = M^2 - D_0^{-1},$$

$$D_0^{-1} = (\xi_{xy})^2 + \frac{1}{4}(\xi_{xx} - \xi_{yy})^2 > 0.$$

Соотношения (40) по форме совпадают с уравнениями чисто двумерной теории, однако имеются и различия. Во-первых, как видно, функция M приобретает простой физический смысл, она равна дисперсии (энергии) флуктуаций по выделенной координате z. Во-вторых, в отличие от чисто двумерной теории уравнение, связывающее M и $\mathscr{E}$, оказывается кубическим и может быть записано в виде

$$\left(M^2 - \frac{1}{D_0}\right)\left(M - \frac{3}{2\mathscr{E}}\right) = 0. \tag{42}$$

Это уравнение имеет два положительных корня

$$M_1 = \sqrt{\frac{1}{D_0}}, \quad M_2 = \frac{3}{2\mathscr{E}}. \tag{43}$$

Первый из которых следует отбросить. Он соответствует бесконечной удельной энтропии $s = (1/2)\ln D$. Следовательно, связь между M и $\mathscr{E}$ имеет вид второго корня. Отметим, что из неравенства (35) вытекает важное ограничение на энергию $\mathscr{E}$ в двумерном случае:

$$\frac{27}{4K} > \mathscr{E}^2.$$

Это означает, что энергия турбулентности не может превышать некоторого критического уровня, зависящего от характеристик сопряженного потока.

Подставив в выражение для D_2 значение M_2, находим:

$$D_2 = D_0\left(\frac{9D_0}{4\mathscr{E}^2} - 1\right)^{-1}, \tag{44}$$

и удельная энтропия будет иметь следующий вид:

$$s = \frac{1}{2}(\ln D_2 - \ln M_2) = -\frac{1}{2}\left[\ln(M_2^2 - D_0^{-1}) - \ln M_2\right]$$
$$= -\frac{1}{2}\left[\ln(1 - 4\mathscr{E}^2 D_0^{-1}/9) - 3\ln\mathscr{E} + 3\ln(3/2)\right]. \tag{45}$$

Соответственно

$$\mathscr{E}\,ds = \frac{3}{2}\,d\mathscr{E} - \mathscr{E}F'(\xi)d\xi, \tag{46}$$

где $\xi = 4\mathscr{E}^2 D_0^{-1}/9$, $F(\xi) = (1/2)\ln(1-\xi)$. Безразмерный параметр ξ играет роль обобщенной координаты, а величина $-\mathscr{E}F'(\xi)$ — обобщенной силы. В результате ξ следовало бы для удобства называть количеством турбулентности (чилом вихрей), а $-\mathscr{E}F'(\xi)$ — химическим потенциалом.

В заключении этого раздела приведем для справки уравнения для функций ξ и функции тока Ψ средней скорости потока ($U = \Psi_y$, $V = -\Psi_x$) для рассмотренной двумерной редукции. Эти уравнения будут использованы в последнем разделе данной статьи при анализе течения Куэтта. В соответствии с [14] в двумерном случае полезно использовать комплексные координаты $z = x + iy$ и $z = x - iy$. В этом случае уравнения для Ψ можно представить в виде, использованном ранее в [14]:

$$2iD_2\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} = 2\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 - \frac{\partial R}{\partial z}, \tag{47}$$

$$P + \mathscr{E} = -2\frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial\Psi}{\partial\hat{z}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\bar{R}}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial\hat{z}}\right), \tag{48}$$

$$\Psi_t - \nu\Delta\Psi = -i\,\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\bar{R}}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial\hat{z}}\right). \tag{49}$$

Здесь $R = G - iH$. Эти соотношения могут служить основой для вывода уравнений для двумерных течений, аналогичных выведенным в [14]. Если исключить их этих соотношений R и $P + \mathscr{E}$, то уравнения для ξ и Ψ примут следующий вид:

$$\left(-\frac{\partial}{\partial t} - \nu\Delta\right)\Delta\xi + 2i\left[\frac{\partial\Psi}{\partial\hat{z}}\frac{\partial\Delta\xi}{\partial z} - \frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial\Delta\xi}{\partial\hat{z}}\right]$$
$$= 8i\left[\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial\hat{z}^2} - \frac{\partial^2\Psi}{\partial\hat{z}^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\right], \tag{50}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu\Delta\right)\Delta\Psi + 2i\left[\frac{\partial\Psi}{\partial\hat{z}}\frac{\partial\Delta\xi}{\partial z} - \frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial\Delta\xi}{\partial\hat{z}}\right]$$
$$= 4\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(D_2\frac{\partial^2\xi}{\partial\hat{z}^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial\hat{z}^2}\left(D_2\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\right)\right]. \tag{51}$$

Заметим, что эти уравнения практически не отличаются от уравнений, которые можно получить непосредственно для чисто двумерных течений жидкости, т. е. для случая, когда изначально рассматривается не трехмерный, а двумерный поток. Отличие состоит лишь в виде функциональной связи между $\mathscr{E}$ и D, что ведет к несколько иной форме соотношений (46).

Слабая турбулентность

Еще одной важной редукцией рассмотренных уравнений является условие слабой турбулентности, что соответствует малым значениям ее энергии $\mathscr{E}$ или большим значениям параметра M. В этом случае можно соотношения для всех параметров разложить в ряд по обратным степеням M. В частности, соотношение (31) примет следующий вид:

$$\mathscr{E} = \frac{3}{M} + \frac{2}{M_3}K + O(M^{-4}).$$

Соответственно для $\mathbf{R}$ получим следующее соотношение:

$$R_{\alpha\beta} = \frac{1}{M}\left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{M}P_{\alpha\beta} + O(M^{-2})\right).$$

Отсюда

$$D = M^{-3}\left(1 + KM^{-2} + O(M^{-3})\right),$$

поэтому с точностью до слагаемых $O(M^{-2})$ имеем

$$M = 3\mathscr{E}^{-1},$$
$$R_{\alpha\beta} = \frac{\mathscr{E}}{3}\delta_{\alpha\beta} - \frac{\mathscr{E}^2}{9}P_{\alpha\beta}, \tag{52}$$
$$D = \frac{\mathscr{E}^3}{27}\left(1 + K\frac{1}{9}\mathscr{E}^2\right).$$

Отсюда находим соотношение для удельной энтропии

$$s = \frac{1}{2}\ln D = \frac{3}{2}\ln\mathscr{E} + \frac{1}{2}\ln\left(1 + K\frac{1}{9}\mathscr{E}^2\right) - \frac{3}{2}\ln 3$$

и соответственно первое начало термодинамики:

$$\mathscr{E}ds = \frac{3}{2}d\mathscr{E} + \mathscr{E}J'(\eta)d\eta, \tag{53}$$

где $\eta = \mathscr{E}^2K/9$, $J(\eta) = (1/2)\ln(1+\eta)$. Как видно, соотношения для напряжений Рейнольдса (52) в этом случае линеаризованы по полю **V** (сопряженному потоку) и поэтому аналогичны двумерной теории.

Невязкая жидкость

Случай невязкой жидкости также представляет несомненный интерес в качестве редукции уравнений Навье–Стокса. Это связано с тем, что задачи, в которых пренебрегают взякостью, встречаются во многих приложениях гидромеханики. Такая редукция обоснована в тех случаях, когда для течения не важны граничные эффекты. Как следует из известных теорем (см., например, [15]), эффекты вязкости важны в вязком пограничном слое. Вне слоя этими эффектами можно пренебречь. Еще одна важная проблема, связанная непосредственно с теорией турбулентности, состоит в том, какого порядка уравнения будут получаться в „правильной" теории турбулентности. Эта проблема так же связана с граничными условиями и пограничным слоем. В полуэмпирических теориях с турбулентным коэффициентом вязкости уравнения оказываются того же порядка, что и уравнения Навье–Стокса, независимо от того, является исходная жидкость вязкой или нет. Поэтому необходимо рассмотреть этот вопрос и для данной теории.

Для ответа на поставленные вопросы рассмотрим совместную систему уравнений (26) и (27) с точки зрения максимального порядка производных, входящих в них. В случае, если $\nu \neq 0$, порядок обоих этих уравнений для среднего потока **U** и сопряженного к нему **V** равен двум по каждой из координат. В случае невязкого потока ($\nu = 0$) возникает специфическая ситуация. Как нетрудно видеть, уравнения (26) имеют первый порядок по производным поля **V**, а уравнения (27) имеют второй порядок по полю **V** и первый по полю **U**. Отсюда следует, что в случае невязкого среднего потока в исходной теории, средний поток остается невязким и невозможно корректно в этом случае описывать пограничный слой, например, ставить на стенках условия прилипания жидкости. В отличие от этой ситуации сопряженный поток оказывается „вязким" в независимости от характера среднего потока. И для него можно ставить условия типа прилипания на стенках. В результате в случае невязкого потока система уравнений в целом обладает диссипативными свойствами, которые характеризуют процесс перекачивания энергии от среднего потока к сопряженному, и наоборот. Задача такого типа относится уже к проблеме устойчивости трубулентного потока и требует отдельного рассмотрения.

Двумерные и трехмерные течения Куэтта

Развитую теорию применим для анализа течения Куэтта, которое обычно рассматривается в качестве образца для проверки тех или иных гипотез о турбулентности [2,3].

Течение Куэтта возникает между двумя плоскопараллельными пластинами, располагающимися на расстоянии d между собой. Координату вдоль поверхности пластин обозначим x, а перпендикулярную к ним — через y. Скорость одной пластины ($y = 0$) относительно лабораторной системы отсчета положим равной нулю, а второй — $U_0 = U(d)$. Среднюю скорость потока в этом случае можно представить в следующем виде:

$$U = U(y) = -\frac{\partial\Psi(y)}{\partial y}, \quad V = \frac{\partial\Psi(y)}{\partial x} = 0. \tag{54}$$

Если вязкое течение не турбулентно, то известным решением для течения Куэтта является линейный профиль скорости течения

$$U(y) = U_0 y/d.$$

Поскольку течение Куэтта представляет собой плоское течение, то для его описания необходимо перейти к двумерной редукции теории. Для этого воспользуемся условиями (39) и уравнениями (50) и (51). При выполнении условий (39) и (54) функции ξ и Ψ будут функциями только y: $\xi = \xi(y)$. Обозначим $\sigma = \xi''(y)$. В этом случае из (50) и (51) следует:

$$D_0 = 4\sigma^{-2}, \quad D_2 = \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{9\sigma^{-2}}{16\mathscr{E}^2} - 1\right)^{-1}, \tag{55}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\sigma = 0, \quad \nu\frac{\partial^4}{\partial y^4}\Psi = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 D_2\sigma}{\partial y^2}. \tag{56}$$

Проинтегрировав уравнения (56), приходим к следующим уравнениям для $U = -\Psi_y$ и σ:

$$\frac{\partial}{\partial y}U = \frac{1}{2\nu}D_2\sigma + c_2 y + c_1 = \frac{1}{\nu}\langle uv\rangle + c_2 y + c_1, \tag{57}$$

$$\sigma = ay + b, \tag{58}$$

где a, b, c_1, c_2 — постоянные интегрирования. Поскольку в случае $\langle uv\rangle = 0$ (отсутствие турбулентного потока импульса) это соотношение должно переходить в уравнение для вязкого потока, то необходимо положить $c_2 = 0$. После этого общее решение для $U(y)$ можно записать в следующем виде:

$$U = \frac{1}{2\nu}\int D_2\sigma dy + c_1 y + c_0 = \frac{1}{\nu}\int\langle uv\rangle dy + c_1 y + c_0$$
$$= \frac{1}{A\nu}F(y) + c_1 y + c_0. \tag{59}$$

Удовлетворяя теперь граничным условиям для U, находим постоянные c_1 и c_0:

$$c_0 = -\frac{1}{A} F(0), \quad c_1 = 2\nu \frac{1}{d} U_0 - \frac{1}{Ad} \big(F(d) - F(0)\big).$$

Результат вычислений функции $F(y)$ будет теперь зависеть от типа турбулентности, которая фиксируется функциональным видом $\mathscr{E}$.

Изэнтропийная турбулентность

Начнем со случая изэнтропийной турбулентности. Условие изэнтропийности, или адиабатичности, означает, что турбулентность порождается или поддерживается в системе только за счет внутренних механизмов возникновения флуктуаций без взаимодействия с границами. В этом случае турбулентность не связана с условиями на границах течения, но, возможно, создана в некоторый начальный момент времени, а затем предоставлена сама себе. Можно было бы ожидать, что в этом случае турбулентность должна переноситься как пассивная примесь и не влиять на поток. Такой ситуации в данных уравнениях соответствует требование $D_2 = \mathrm{const}$, т.е. условие постоянства двумерной части энтропии. Это условие можно было бы назвать условием „сильной" адиабатичности.

В отличие от этого, условие $D = D_2/M = \mathrm{const}$ можно назвать „слабой" адиабатичностью. В этом случае возникает взаимодействие между средним потоком и турбулентностью. Это связано с тем, что в турбулентности имеется дополнитальная степень свободы, связанная с редуцируемой координатой. Поскольку вдоль этой координаты динамика не рассматривается, то эта степень свободы ведет себя как неограниченный резервуар энергии, отбирая или передавая энергию в средний поток для турбулентности. В результате адиабатичность собственно двумерной турбулентности оказывается нарушенной.

Для течения в случае слабой адиабатичности имеем

$$D = D_2/M = 4\mathscr{E} D_2/9 = \gamma_0 = \mathrm{const}. \qquad (60)$$

Из условия (60) следует

$$D_2 = \frac{3\gamma_0}{2\mathscr{E}}.$$

Из (55) теперь следует алгебраическое уравнение для $\mathscr{E}$

$$8\mathscr{E}^3 + 3\gamma_0\sigma^2\mathscr{E}^2 - 27\gamma_0 = 0.$$

Хотя для $\mathscr{E}$ можно явно выписать решения этого уравнения, это не будет сделано, поскольку оно оказывается слишком громоздким и требующим отдельного исследования. Поэтому здесь не будут приводиться решения для средней скорости, ограничимся рассмотрением других типов турбулентности.

Изоэнергетическая турбулентность

Для случая изоэнергетической турбулентности полагаем $\mathscr{E} = \mathrm{const}$. Если проводить термодинамическую аналогию для этого типа турбулентности, то она означает, что на границах течения поддерживаются условия для турбулентных флуктуаций, подобные термостату. Аналог термостата может воспроизводиться с помощью специального типа условий на границах течения, например, за счет параметров шероховатости границ. Такая ситуация, по всей видимости, вполне возможна в реальных экспериментах.

Из (55) находим для этого случая

$$D_2 = \frac{4\mathscr{E}^2}{9 - \mathscr{E}^2\sigma^2} = \frac{4\mathscr{E}^2}{9 - \mathscr{E}^2(A_y + B)^2}.$$

В результате для функции $F(y)$ находим:

$$F(y) = \frac{1}{3\mathscr{E}} \operatorname{arcth}\big(\mathscr{E}(A_y + B)/3\big). \qquad (61)$$

Такое решение может существовать лишь при наличии ограничений $-1 < \mathscr{E}(A_y + B)/3 < 1$ для $0 < y < 1$.

Турбулентность с постоянным числом ξ

Рассмотрим еще один вариант турбулентности, который соответствует постоянству безразмерного параметра $\xi = 4\mathscr{E}^2 D_0^{-1}/9$. Физический смысл этого параметра пока не очень ясен, но его можно интерпретировать как число частиц (вихрей), поскольку соотношение (46) похоже на условие сохранения числа частиц в обычной термодинамике. Из условия $\xi = \xi_0 = \mathrm{const}$ получаем

$$D_2 = \frac{g_0}{\sigma^2}, \quad g_0 = \xi_0(1 - \xi_0)^{-1} = \mathrm{const}.$$

Подставновка этого соотношения в (57) приводит к следующему выражению:

$$F(y) = A \int \frac{g_0}{A_y + B}\, dy = g_0 \ln(A_y + B). \qquad (62)$$

В последнем случае решение для U аналогично решению с логарифмическим профилем скорости для турбулентности пограничного слоя и, по всей видимости, наиболее пригодно для сопоставления с экспериментальными данными.

Смысл последнего результата можно понять с помощью следующих рассуждений. Условие $\xi = \xi_0 = \mathrm{const}$ означает

$$\mathscr{E} = n_0\sigma.$$

Важным обстоятельством, связанным с последним соотношением, является то, что в этом случае $\mathscr{E}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2\mathscr{E}}{\partial y^2} = 0.$$

В свою очередь, последнее уравнение можно рассматривать как следствие того, что плотность энергии $\mathcal{E}$ удовлетворяет уравнению типа теплопроводности. Но именно такого типа уравнение и должно описывать процесс перераспределения энергии хаотического движения в термодинамике. По всей видимости, для $\mathcal{E}$ необходимо включать в теорию закон, подобный закону Фурье для теплопереноса.

Одномерные течения

Изложенный способ исследования равновесных состояний турбулентных течений может быть использован для анализа достаточно общих нелинейных систем. Для иллюстрации такой возможности рассмотрим уравнения, возникающие в теории одномерных течений жидкости. Рассмотрим уравнение вязкого одномерного потока — уравнение Бюргерса:

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx}.$$

Здесь $u = u(x, t)$ — скорость потока. Это уравнение как дифференциальный закон сохранения эквивалентно двум уравнениям вида:

$$u = -\psi_x, \quad u^2/2 - \nu u_x = \psi_t.$$

Разложив поток на среднюю и флуктуационную составляющие $u = U + u'$, $\psi = \Psi + \psi'$, получим:

$$U = -\Psi_x, \quad \langle u'^2 \rangle = -U^2 + 2\Psi_t + \nu U_x. \tag{63}$$

Максимальная энтропия в этом случае имеет вид следующего функционала:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int \ln\langle u'^2 \rangle dx\, dt.$$

Вариационная задача о глобальном равновесии на условный максимум этого функционала при выполнении (63) приводит к следующим уравнениям для среднего потока:

$$U_t + UU_x - \nu U_{xx} = -\nabla_x \frac{1}{2\Phi},$$

$$-\Phi_t + \nabla_x(\Phi U) - \nu \Phi_{xx} = 0, \tag{64}$$

где $\Phi^{-1} = \langle u'^2 \rangle$. Умножив первое уравнение на Φ, а второе на U и вычтя результаты умножения, получим дифференциальный закон сохранения:

$$\frac{\partial}{\partial t}(U\Phi) + \frac{\partial}{\partial x}\left[U^2\Phi - \nu(\Phi U_x - U\Phi_x) - \ln\Phi\right] = 0.$$

Это очень похоже на условие самосопряженности в смысле Лиувилля. Совокупность этих соотношений описывает чисто одномерный турбулентный поток.

Отметим, что уравнения (64) можно переписать в виде, содержащем энергию турбулентности $\mathcal{E} = \langle u'^2 \rangle/2$:

$$U_t + UU_x - \nu U_{xx} = -\nabla_x \mathcal{E},$$

$$-\mathcal{E}_t + U\mathcal{E}_x - U_x\mathcal{E} - \nu\mathcal{E}_{xx} + 4\nu \frac{1}{\mathcal{E}}(\mathcal{E}_x)^2 = 0. \tag{65}$$

Эти уравнения демонстрируют возможность предельного перехода к ламинарному потоку от турбулентности в одномерном случае.

Как видно из (64) и (65), в первом уравнении турбулентность создает давление в потоке. При этом второе уравнение для Φ можно рассматривать как уравнение диффузионного переноса массы, но без условия ее интегрального сохранения. Интересным представляется случай $\nu = 0$. В этом случае уравнения (64) похожи на уравнения для сжимаемого газа с плотностью $\rho\Phi$ и давлением $p = 1/2\Phi^{-1}$:

$$U_t + UU_x = -\nabla_x \frac{1}{2\Phi}, \quad -\Phi_t + \nabla_x(\Phi U) = 0. \tag{66}$$

Отличие состоит лишь в том, что в уравнении для Φ знак у времени обратный необходимому. Однако в стационарном случае это отличие исчезает и задача сводится к течению газа с уравнением состояния:

$$p = 2\rho^{-1}.$$

Газ с таким уравнением часто называют газом Чаплыгина, т.е. в стационарном случае одномерный турбулентный поток похож на газ Чаплыгина. Это дает некоторое нетривиальное представление о характере глобального равновесного состояния турбулентности в одномерном случае.

Из этого примера следует, что использованный метод максимальной энтропии для отыскания глобального равновесия может быть использован и для нелинейных задач негидродинамического типа при исследовании флуктуаций в них. Например, нетрудно видеть, что этот подход аналогичным способом применим к хорошо известным уравнениям Кортевега–Де-Вриза, Кадомцева–Петвиашвилли и аналогичным им уравнениям с квадратичной нелинейностью. В случае нелинейности более высокого порядка требуются дополнительные построения.

Заключение

Результатом проведенных построений является замкнутая концепция описания слабонеравновесной турбулентности для трехмерных течений вязкой несжимаемой жидкости. Единственная сложность, которая требует дальнейшего изучения в каждом конкретном случае, — это вывод соотношений для энергии турбулентности, которые должны быть похожи по смыслу на уравнение переноса тепла или на термодинамические условия для системы в целом типа изэнергетичности. Как было показано, уравнения для напряжений Рейнольдса в действительности похожи на соотношения, постулируемые обычно в полуэмпирических теориях турбулентности с турбулентным коэффициентом вязкости. Отличие состоит лишь в том, что эти соотношения в данной теории записываются для „сопряженного потока“. Это указывает на то, что многие известные факты из теории турбулентности, которые находили объяснения с точки зрения полуэмпирических теорий турбулентной вязкости, будут воспроизводиться и в данной теории.

Общая идеология развитого подхода может быть перенесена и на случай течений сжимаемой жидкости и газа, и для систем более общего вида. Метод вывода уравнений, замыкающих систему уравнений для вторых моментов флуктуаций (напряжений Рейнольдса), будет оставаться одним и тем же. Это продемонстрировано на примере уравнений чисто одномерной динамики жидкости.

Автор выражает признательность за полезное обсуждение вопросов теории турбулентности своим коллегам Макину Р.С., Корнилову Д.А., Орлову В.А.

Приложение

Переписав уравнения (29) в виде

$$1 = C_0 q_k + C_1 q_k^2 + C_2 q_k^3, \quad k = 1, 2, 3,$$

с помощью формулы Крамера получим $C_2 = D = \det \mathbf{R} = (q_1 q_2 q_3)^{-1}$. Суммируя уравнения

$$\frac{1}{q_k} = C_0 + C_1 q_k + C_2 q_k^2, \quad k = 1, 2, 3,$$

$$\frac{1}{q_k^2} = C_0 \frac{1}{q_k} + C_1 + C_2 q_k, \quad k = 1, 2, 3,$$

по k находим:

$$\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} = 3C_0 + (q_1 + q_2 + q_3) C_1 + (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) C_2,$$

$$\frac{1}{q_1^2} + \frac{1}{q_2^2} + \frac{1}{q_3^2} = C_0 \left(\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} \right) + 3C_1 + (q_1 + q_2 + q_3) C_2.$$

Согласно соотношениям (8) и (16), имеем:

$$\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} = 2\mathscr{E}, \quad q_1 + q_2 + q_3 = 3M.$$

Кроме этого, имеем тождества

$$q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = (q_1 + q_2 + q_3)^2 - 2 q_1 q_2 q_3 \left(\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} \right),$$

$$\frac{1}{q_1^2} + \frac{1}{q_2^2} + \frac{1}{q_3^2} = \left(\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} \right)^2 - 2 \frac{q_1 + q_2 + q_3}{q_1 q_2 q_3}.$$

Отсюда получаем следующие уравнения на C_0, C_1:

$$2\mathscr{E} C_0 + 3C_1 = 4\mathscr{E}^2 - 9MD,$$

$$3C_0 + 3MC_1 = 6\mathscr{E} - 9M^2 D.$$

Разрешая эти уравнения относительно C_0 и C_1, окончательно находим:

$$C_0 = 2\mathscr{E}, \quad C_1 = -3MD.$$

Список литературы

[1] *Монен А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Наука, 1967. 639 с; Ч. 2. 1969. 720 с.
[2] *Фриш У.* Турбулентность. Наследие Колмогорова. М.: Фазис, 1998. 343 с.
[3] *Фрик П.Г.* Турбулентность: Модели и подходы. Ч. 1. Пермь, 1998. 107 с.; Ч. 2. 1999. 138 с.
[4] *Климонтович Ю.Л.* Введение в физику открытых систем. М.: Янус-К, 2002. 284 с.
[5] *Николаевский В.Н.* // Вихри и волны. Сер. Новое в зарубежной науке. № 33. Механика. М.: Мир, 1984. С. 266–335.
[6] *Прандль Л.* Гидроаэромеханика. М.: ИЛ, 1951.
[7] *Колмогоров А.Н.* // ДАН СССР. 1941. Т. 30. № 4. С. 9–13.
[8] *Saffman P.G.* // Stud. Appl. Math. 1974. Vol. 53. P. 17–34; Proc. Roy. Soc. London. 1970. Vol. A317. P. 417–433.
[9] *Журавлев В.М.* // Мат. Междунар. междисциплинарной науч. конф. Третьи Курдюмовские чтения. „Синергетика в естественных науках“. Тверь, 2007. С. 60.
[10] *Стратанович Р.Л.* Теория информации. М.: Сов. радио, 1975. 424 с.
[11] *Фриден Б.Р.* // ТИИЭР. 1985. Т. 73. № 12. С. 78.
[12] *Burg J.P.* // Proc. 37th Meet. Society of Exploration Geophysisists. Oklahoma City, 1967.
[13] *Дворянинов Г.С., Журавлев В.М., Прусов А.В.* // Морской гидрофизический журнал. 1987. № 3. С. 3–17.
[14] *Журавлев В.М.* // ПММ. 1994. Т. 58. № 6. С. 61–67.
[15] *Биргхоф Г.* Гидродинамика. Методы. Факты. Подобие. М.: ИЛ, 1963. 244 с.