

Минимальная модель ускорения Ферми

© Д.М. Наплеков,¹ А.В. Тур,² В.В. Яновский¹

¹ Институт монокристаллов НАН Украины,
61001 Харьков, Украина
e-mail: yanovsky@isk.kharkov.ua

² Center D'etude Spatiale Des Rayonnements, C.N.R.S.-U.P.S.,
31028 TOULOUSE CEDEX 4, France

(Поступило в Редакцию 30 июня 2009 г.)

Рассмотрена простая модель ускорения Ферми частицы между двумя периодически колеблющимися стенками. Закон движения стенок является непрерывным, но не гладким. Получено точное отображение для этой системы. Показано существование траекторий с неограниченно возрастающей скоростью. Обсуждаются основные характеристики таких траекторий. Проведено сравнение с высокоэнергетическим приближением. Обнаружены качественные различия в точном и приближенном описании. Так, в высокоэнергетическом приближении отсутствуют траектории с неограниченным ростом скорости.

Введение

В 1949 г. для объяснения происхождения космических лучей высокой энергии Ферми предложил [1] механизм ускорения частиц движущимися магнитными облаками. В последующих работах были введены модели, реализующие механизм ускорения Ферми с помощью столкновений частицы с осциллирующей стенкой. Наиболее распространенной из них является модель, в которой частица свободно движется между двумя стенками. Одна из этих стенок движется по некоторому, обычно периодическому закону, вторая стенка неподвижна [2–5]. Динамика частицы описывается с помощью отображения, при выводе которого обычно пренебрегают изменением положения стенки. Кроме того, скорость частицы считается много большей характерной скорости стенки, из-за чего такое приближение получило название высокоэнергетического. Это приближение существенно упрощает вид отображения, описывающего движение частицы.

Другой популярной моделью является частица, падающая в гравитационное поле на осциллирующую стенку [6]. Эти модели благодаря своей простоте, возможности численного моделирования их поведения на „больших временах“ и практическим применениям стали стандартными моделями для анализа нелинейных гамильтоновых систем. Основным предметом изучения в этих моделях является процесс набора энергии частицей. Если закон движения стенки является случайным, то в среднем частица набирает энергию [1]. Менее однозначен случай, когда закон движения стенки детерминирован, например является периодическим.

Численное моделирование при гладком периодическом движении стенки, проведенное Уламом [7], показало, что движение частицы является стохастическим, но ее энергия ограничена сверху. Эти результаты Улама были объяснены с помощью аналитических и численных методов Чириковым и Заславским [2] и более полно Брахицем [3], Лихтенбергом и Либерманом [4], Пустыльниковым [8] и др. Они доказали, что в случае доста-

точно гладкой зависимости скорости стенки от времени всегда существует некоторая предельная, максимальная скорость частицы. Значение предельной скорости для частиц с изначально низкой энергией не зависит от начальных условий. При нарушении гладкости, например для пилообразного закона движения стенки, в [9] была указана одна неограниченно нарастающая траектория.

В настоящей работе детально рассмотрен набор скорости частицей при движении стенок по непрерывному периодическому, но не гладкому закону движения. Получено однопараметрическое семейство точных отображений для описания изменения состояния частицы в таких системах. Параметром является отношение амплитуды колебаний стенки к расстоянию между ними. Изучены основные характеристики частиц в таких системах. Показано существование фрактального множества начальных условий, при которых реализуется неограниченный рост скорости частицы. Проанализирована зависимость среднего ускорения частицы от параметра системы. Обнаружен режим „сверхускорения“ частиц в некоторой области параметров системы. В этом случае наблюдается взрывной рост скорости частицы. Проведено сравнение с высокоэнергетическим приближением. Обнаружено качественное отличие в поведении частицы по сравнению с точным отображением. Так, в высокоэнергетическом приближении отсутствуют траектории с неограниченным ростом скорости.

1. Описание модели

Рассмотрим частицу, движущуюся между двумя подвижными стенками. Пусть стенки движутся периодически сначала с фиксированной скоростью u от центра системы, потом с такой же скоростью — к центру системы (рис. 1). Таким образом, стенки двигаются в противофазе по пилообразному закону с периодом T . Эта система эквивалентна системе с одной движущейся и одной неподвижной стенкой. Однако в работе удобно

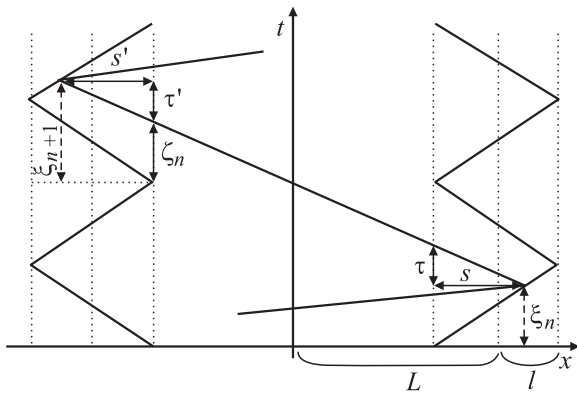


Рис. 1. Показаны два последовательных столкновения частицы со стенками. Первое столкновение происходит с правой стенкой, второе — с левой.

сохранить это несущественное техническое усложнение, предполагая в дальнейшем изучение случая синфазного движения стенок. Столкновение частицы со стенкой будем считать происходящим мгновенно и абсолютно упруго, в промежутках между столкновениями частица движется равномерно и прямолинейно.

Эволюцию такой системы удобно описывать с помощью отображения, которое связывает координаты частицы при $n + 1$ столкновении со стенкой с координатами частицы при n -м столкновении. Таким образом, зная отображение и координаты частицы при первом столкновении, можно узнать их при втором столкновении и т.д. В качестве координат выберем скорость частицы v_n перед столкновением со стенкой, измеренную в скоростях движения стенки, и фазу столкновения ξ_n . Под фазой столкновения будем понимать время, отсчитанное от начала соответствующего цикла движения стенки и измеренное в периодах движения стенки. Для левой стенки все значения времени, в том числе и фазу столкновения, будем считать отрицательными.

Введенные координаты являются оптимальными для данной системы, так как позволяют кроме скорости с учетом знака и фазы столкновения определить, с какой из стенок произошло столкновение.

2. Вывод отображения

При столкновении со стенкой частица изменяет свою скорость в соответствии с законами сохранения импульса и энергии. Если перед столкновением частица и стенка двигались навстречу друг другу, то после столкновения частица изменит направление движения, ее скорость по модулю увеличится на удвоенную скорость стенки. В этом легко убедиться, перейдя в систему отсчета, связанную со стенкой (см., например, [10]). В этой системе отсчета стенка неподвижна, а частица в результате столкновения изменяет направление движения на противоположное, по модулю ее скорость не изменяется (считаем, что столкновение абсолютно упругое и масса

частицы пренебрежимо мала по сравнению с массой стенки). Одна скорость стенки добавляется к скорости частицы при переходе в систему отсчета стенки, и еще одна — при переходе обратно в лабораторную систему отсчета.

Если в момент столкновения частица догоняла стенку, то после столкновения скорость частицы уменьшится на удвоенную скорость стенки. После столкновения частица либо изменит направление движения, либо будет продолжать двигаться в прежнем направлении в зависимости от ее скорости перед столкновением; в обоих случаях ее скорость по модулю уменьшится. Если скорость частицы перед столкновением со стенкой больше, чем удвоенная скорость стенки, то после столкновения частица изменит направление движения на противоположное, если скорость частицы лежит между двумя и одной скоростью стенки, то частица продолжит движение в прежнем направлении, если скорость частицы меньше скорости стенки, то частица не сможет ее догнать. В этом случае второе столкновение произойдет после того, как стенка в соответствии с видом своего движения изменит скорость на противоположную.

Таким образом, стенка может отразить частицу с помощью одного или двух столкновений. Два столкновения произойдут, если при столкновении частица догоняла стенку, но ее скорость была меньше удвоенной скорости стенки. В этом случае при втором столкновении изменится направление движения частицы, а скорость по модулю увеличится на удвоенную скорость стенки. Два столкновения произойдут также в случае, если при столкновении частица догоняла стенку, ее скорость была больше двух скоростей стенки (но меньше трех), но после первого столкновения стенка, изменив в соответствии со своим законом движения скорость, догнала улетающую от нее частицу (потерявшую скорость при первом столкновении до меньшей, чем у стенки). Этот случай необходимо различать со случаем, когда скорость частицы перед первым столкновением была меньше, чем у стенки. Разница заключается в том, что в случае двух столкновений стенка догоняет частицу, а одного — стенка и частица движутся навстречу друг другу. Хотя по модулю скорость частицы до столкновения в этих двух случаях может быть одинакова, после столкновения она будет разной. Для того чтобы различать эти случаи, скорость частицы меньше скорости стенки перед первым столкновением будем считать положительной, а скорость частицы меньше скорости стенки в случае двух столкновений — отрицательной. Поэтому скорость частицы перед столкновением может принимать значения от -1 до бесконечности.

Таким образом, если перед столкновением со стенкой скорость частицы по модулю меньше скорости стенки, по знаку фазы столкновения определяется, с какой из стенок произошло столкновение, по знаку скорости — первое оно или второе, и соответственно движется частица навстречу стенке или убегает от нее.

Легко видеть, что необходимым (но недостаточным) условием случая двух столкновений является: $|\xi_n| < 1/2$ и $1 < v_n < 3$, т.е. частица должна иметь до столкновения скорость больше, чем у стенки, чтобы догнать ее, а после столкновения меньше, чтобы стенка могла догнать частицу. Если $1 < v_n < 2$, то частица после первого столкновения не изменит направления полета, если $2 < v_n < 3$ — то изменит (только в этом случае при условии двух столкновений скорость частицы перед столкновением отрицательна).

Рассмотрим случай, когда происходит одно столкновение. Он реализуется всегда при $v_n > 3$. В этом случае скорость частицы непосредственно перед $n + 1$ столкновением всегда определяется по следующей формуле:

$$v_{n+1} = v_n + 2 \operatorname{sign} \left(|\xi_n| - \frac{1}{2} \right).$$

Здесь v_n — скорость частицы непосредственно перед n -м столкновением со стенкой, а

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} +1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Если перед столкновением частица догоняла одну из стенок, то фаза столкновения по модулю меньше одной второй, и скорость частицы после столкновения уменьшается на удвоенную скорость стенки. Если перед столкновением частица и стенка двигались навстречу друг другу, то фаза столкновения по модулю больше одной второй, и скорость частицы после столкновения увеличивается на удвоенную скорость стенки.

Найдем время τ , за которое частица долетит до границы области движения стенки (см. рис. 1). Предположим, что в момент столкновения стенка двигалась от центра системы, т.е. $|\xi_n| < 1/2$, тогда расстояние s , которое ей необходимо пролететь и которое стенка прошла за время $|\xi_n|$:

$$s = \xi_n \cdot 1 = \tau v_{n+1} \implies \tau = \frac{\xi_n}{v_{n+1}}.$$

Здесь в случае левой стенки τ , как и все значения времени, связанные с левой стенкой, отрицательны.

Если в момент столкновения стенка двигалась к центру системы, т.е. $|\xi_n| > 1/2$, то для расстояния s , которое частице необходимо пролететь и которое правая стенка пройдет за время $1 - \xi_n$ (ξ_n положительно), а левая стенка за время $-1 - \xi_n$ (τ и ξ_n отрицательны):

$$s = (\operatorname{sign}(\xi_n) - \xi_n) \cdot 1 = \tau v_{n+1} \implies \tau = \frac{\operatorname{sign}(\xi_n) - \xi_n}{v_{n+1}}.$$

Эти два случая можно записать формулой:

$$\tau = \frac{\frac{\operatorname{sign}(\xi_n)}{2} + \operatorname{sign}(|\xi_n| - \frac{1}{2})(\xi_n - \frac{\operatorname{sign}(\xi_n)}{2})}{v_{n+1}}.$$

Найдем момент времени $\xi^{(n)}$, отсчитанный от начала соответствующего цикла движения стенки, когда частица вновь попадет в область движения стенки, считая, что следующее столкновение произойдет с той же стенкой, что и предыдущее. Легко видеть, что

$$\xi^{(n)} = - \left(\xi_n + \tau + \operatorname{sign}(\xi_n) \frac{2(\delta - 1)}{v_{n+1}} \right) \pmod{1}.$$

Здесь $\delta = l/L$ — параметр системы, который определяется как отношение амплитуды колебаний стенок к среднему расстоянию между ними (см. рис. 1). Аналогично для времени τ' , за которое частица долетит от границы области движения стенки до точки столкновения со стенкой, получим:

$$\tau' = \frac{\frac{-\operatorname{sign}(\xi_n)}{2} - \operatorname{sign}(|\xi^{(n)} - \frac{\operatorname{sign}(\xi_n)}{2v_{n+1}}| - \frac{1}{2})(\xi^{(n)} + \frac{\operatorname{sign}(\xi_n)}{2})}{v_{n+1} + \operatorname{sign}(|\xi^{(n)} - \frac{\operatorname{sign}(\xi_n)}{2v_{n+1}}| - \frac{1}{2})}.$$

Таким образом, если произошло одно столкновение со стенкой и если после столкновения скорость частицы меньше критической, фазу следующего столкновения можно получить по формулам:

$$\begin{aligned} \xi^{(n)} &= - \left(\xi_n + \frac{\frac{\operatorname{sign}(\xi_n)}{2} + \operatorname{sign}(|\xi_n| - \frac{1}{2})(\xi_n - \frac{\operatorname{sign}(\xi_n)}{2})}{v_{n+1}} \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{sign}(\xi_n) \frac{2(\delta - 1)}{v_{n+1}} \right) \pmod{1}, \\ \xi_{n+1} &= \xi^{(n)} + \frac{\frac{\operatorname{sign}(\xi_n)}{2} - \operatorname{sign}(|\xi^{(n)} - \frac{\operatorname{sign}(\xi_n)}{2v_{n+1}}| - \frac{1}{2})(\xi^{(n)} + \frac{\operatorname{sign}(\xi_n)}{2})}{v_{n+1} + \operatorname{sign}(|\xi^{(n)} - \frac{\operatorname{sign}(\xi_n)}{2v_{n+1}}| - \frac{1}{2})}. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь случай двух столкновений (рис. 2). Пусть скорость частицы была больше двух скоростей стенки, частица догнала стенку, столкнувшись с ней изменила направление движения и потеряла скорость, после чего стенка, тоже поменяв направление движения, стала догонять частицу. Произойдет второе столкновение или стенка не догонит частицу, зависит от суммы

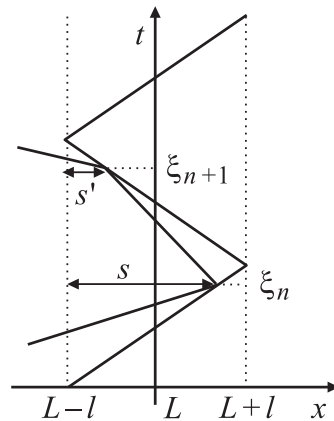


Рис. 2. Два последовательных столкновения частицы с правой стенкой.

значений ξ_n и времени τ , за которое частица долетит до границы области движения стенки, равного ξ_n/v_{n+1} . Если сумма этих времен больше единицы, то стенка догонит частицу.

Таким образом, для правой стенки при отражении частицы произойдет два столкновения в случае, если $\xi_n < 1/2$ и $\tau + \xi_n > 1$, т.е.

$$\xi_n + \tau = \xi_n + \frac{\xi_n}{v_n - 2} > 1 \implies v_n < 2 + \frac{\xi_n}{1 - \xi_n},$$

$$\xi_n < \frac{1}{2}.$$

В этом случае для фазы следующего столкновения имеем

$$(\xi_{n+1} - \xi_n)(v_n - 2) = s - s'$$

$$= \xi_n \cdot 1 - (1 - \xi_{n+1}) \cdot 1 \implies \xi_{n+1} = \xi_n + \frac{1 - 2\xi_n}{3 - v_n}.$$

Аналогично для левой стенки при отражении частицы произойдет два столкновения в случае, если $-\xi_n < 1/2$ и $-(\xi_n + \tau) > 1$, т.е.

$$-(\xi_n + \tau) = -\xi_n - \frac{\xi_n}{v_n - 2} > 1$$

$$\implies v_n < 2 + \frac{\xi_n}{-1 - \xi_n},$$

$$-\xi_n < \frac{1}{2}.$$

В этом случае

$$-(\xi_{n+1} - \xi_n)(v_n - 2) = s - s'$$

$$= -\xi_n \cdot 1 - (1 + \xi_{n+1}) \cdot 1 \implies \xi_{n+1} = \xi_n + \frac{-1 - 2\xi_n}{3 - v_n}.$$

Скорость перед следующим столкновением в обоих случаях определяется соотношением

$$v_{n+1} = -(v_n - 2).$$

В обоих рассмотренных случаях частица изменяла направление движения после первого столкновения, однако полученные формулы справедливы и в случае, когда после первого столкновения частица не изменяет направления движения, за счет того что в этом случае скорость частицы перед столкновением считается отрицательной. Поэтому все четыре случая, когда происходит двойное столкновение, можно объединить следующим образом:

$$|\xi_n| < \frac{1}{2}, \quad v_n < 2 + \frac{\xi_n}{\text{sign}(\xi_n) - \xi_n},$$

$$v_{n+1} = -(v_n - 2),$$

$$\xi_{n+1} = \xi_n + \frac{\text{sign}(\xi_n) - 2\xi_n}{3 - v_n}.$$

Таким образом, точное отображение, учитывающее все возможные случаи, запишем в компактной форме как

$$v_{n+1} = \begin{cases} -(v_n - 2), & \text{если } |\xi_n| < \frac{1}{2}, \quad v_n < 2 + \frac{\xi_n}{\text{sign}(\xi_n) - \xi_n}, \\ v_n + 2\text{sign}(|\xi_n| - \frac{1}{2}), & \text{если } |\xi_n| > \frac{1}{2} \\ & \text{или } |\xi_n| < \frac{1}{2}, \quad v_n > 2 + \frac{\xi_n}{\text{sign}(\xi_n) - \xi_n}, \end{cases} \quad (1)$$

$$\xi_{n+1} = \begin{cases} \xi_n + \frac{\text{sign}(\xi_n) - 2\xi_n}{3 - v_n}, & \text{если } |\xi_n| < \frac{1}{2}, \quad v_n < 2 + \frac{\xi_n}{\text{sign}(\xi_n) - \xi_n} \\ \xi^{(n)} - \frac{\frac{\text{sign}(\xi_n)}{2} + \text{sign}\left(|\xi^{(n)} - \frac{\text{sign}(\xi_n)}{2v_n + 1}| - \frac{1}{2}\right)\left(\xi_n + \frac{\text{sign}(\xi_n)}{2}\right)}{v_{n+1} + \text{sign}\left(|\xi^{(n)} - \frac{\text{sign}(\xi_n)}{2v_n + 1}| - \frac{1}{2}\right)}, & \text{если} \\ |\xi_n| > \frac{1}{2} \text{ или } |\xi_n| < \frac{1}{2}, \quad v_n > 2 + \frac{\xi_n}{\text{sign}(\xi_n) - \xi_n}, \end{cases} \quad (2)$$

где

$$\xi^{(n)} = - \left(\xi_n + \frac{\frac{\text{sign}(\xi_n)}{2} + \text{sign}\left(|\xi_n| - \frac{1}{2}\right)\left(\xi_n - \frac{\text{sign}(\xi_n)}{2}\right)}{v_{n+1}} \right. \\ \left. + \text{sign} \xi_n \frac{2(\delta - 1)}{v_{n+1}} \right) \pmod{1}.$$

С помощью этого отображения далее будут исследоваться различные свойства траекторий частицы, движущейся между стенками. Следует подчеркнуть, что это отображение является точным.

3. Исследование точного изображения

При изучении свойств точного отображения основной интерес вызывает процесс увеличения энергии или скорости частицы. В известных моделях, использующих высокоэнергетическое приближение, всегда существует предельная скорость, ограничивающая набор энергии частицей [2–6]. В точном отображении (1), (2) наблюдаются траектории с неограниченным увеличением скорости частицы. В принципе, все траектории в фазовом пространстве точного отображения можно разделить на два типа. Траектории первого типа имеют граничную скорость, выше которой скорость не возрастает. В частности, в этот класс попадают все периодические орбиты. Траектории второго типа не имеют такой границы, и с течением времени энергия неограниченно возрастает. Этот класс траекторий наблюдается при всех допустимых значениях параметра $\delta \leq 1$.

Определенную трудность в изучении этих типов траекторий создает малая информативность фазового портрета точного отображения. Причина этого в разрывности отображения для скорости. Скорость в безразмерных переменных изменяется на ± 2 на каждом шаге дискретного времени. Это затрудняет качественный анализ фазового потока и требует привлечения менее традиционных методов анализа. В качестве примера на рис. 3 приведена одна траектория в фазовом пространстве. Эта траектория по типу относится к неограниченно возрастающей по скорости. Единственный важный вывод, касающийся ее вида, состоит в наблюдении за значительным

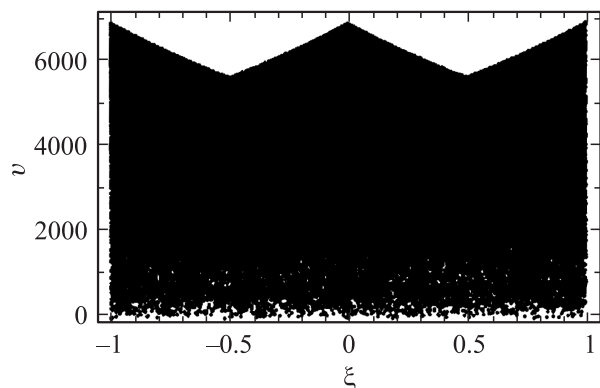


Рис. 3. Траектория в фазовом пространстве с начальными условиями $\xi_0 = 0.04$, $v_0 = 931.5$ при значении параметра $\delta = 0.1$. Число итераций $N = 7\,500\,000$. Отсутствие траектории в области больших значений скорости связано только с конечным временем или числом итераций N .

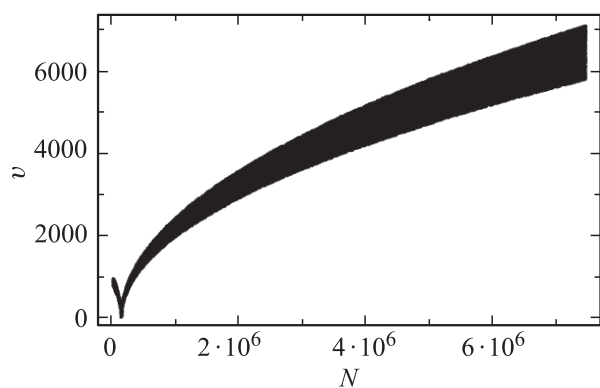


Рис. 4. Зависимость скорости частицы от номера n столкновений со стенками для траектории с начальными данными $\xi_0 = 0.04$, $v_0 = 931.5$ и значением параметра $\delta = 0.1$. Число итераций $N = 7\,500\,000$.

уменьшением скорости на начальном этапе эволюции с последующим ее неограниченным возрастанием.

В этом легко убедиться из зависимости скорости частицы от номера итерации, приведенной на рис. 4. Таким образом, скорость частицы может значительно понижаться на начальном этапе эволюции, вне зависимости от того, какой бы большой не была начальная скорость. Другими словами, в процессе эволюции происходит выход за пределы применимости высокоэнергетического приближения.

Обсудим асимптотический темп увеличения скорости после этапа ее убывания. Для этого удобно проанализировать зависимость скорости от числа столкновений n на графиках в двойном логарифмическом масштабе (рис. 5). Из этого рисунка становится заметна линейная зависимость с коэффициентом пропорциональности $1/2$. Это означает корневой характер нарастания скорости $v_n \sim \sqrt{n}$. Однако важно трансформировать эту зависимость в зависимость от „реального“ времени. Для этого следует изучить, как меняется со временем число

столкновений со стенками. Оказывается, что количество столкновений в единицу времени увеличивается таким образом, что скорость частицы с течением времени растет линейно, т.е. за каждый период движения стенки скорость частицы увеличивается на одну и ту же величину. В этом можно убедиться из зависимости количества столкновений на периоде от номера периода, приведенного на рис. 6. Интересно отметить, что эта зависимость демонстрирует на фоне монотонного нарастания периодические осцилляции. В определенном смысле это — дополнительный довод за сохранение режима увеличения скорости на неограниченных временах. Таким образом, скорость частицы в этом режиме увеличивается пропорционально времени. Это довольно необычный режим нарастания скорости.

Обычно при хаотическом блуждании скорость увеличивается медленнее, пропорционально \sqrt{t} . В этом смысле можно говорить об аномальном увеличении скорости частицы. Феноменологически это означает наличие в среднем эффективной силы, действующей на частицу. При фиксированном значении параметра δ величина этой силы может быть не одинакова для различных

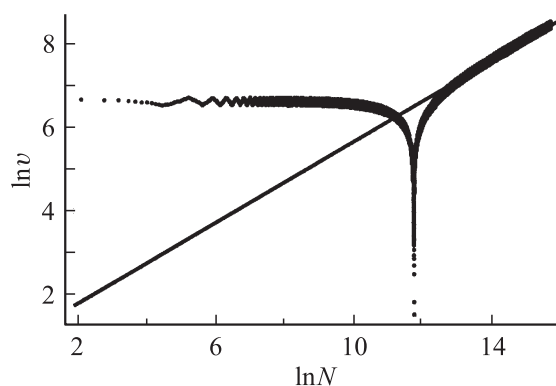


Рис. 5. Зависимость скорости частицы от номера столкновения в двойном логарифмическом масштабе для траектории $\xi_0 = 0.04$, $v_0 = 931.5$, $N = 7\,500\,000$. Хорошо виден линейный участок на поздней стадии эволюции. Для удобства дополнительно изображена прямая с коэффициентами наклона $1/2$.

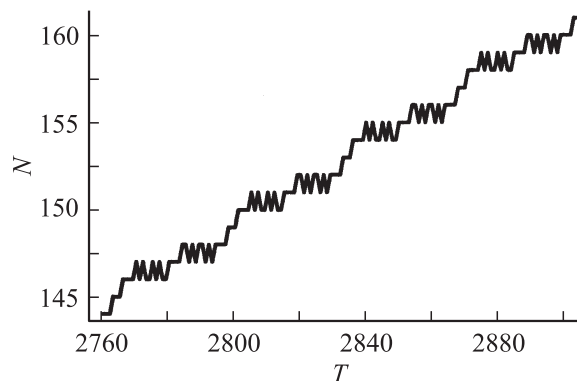


Рис. 6. Зависимость числа столкновений частицы со стенками за один период от номера периода движения стенок для траектории $\xi_0 = 0.04$, $v_0 = 931.5$ и значения параметра $\delta = 0.1$.

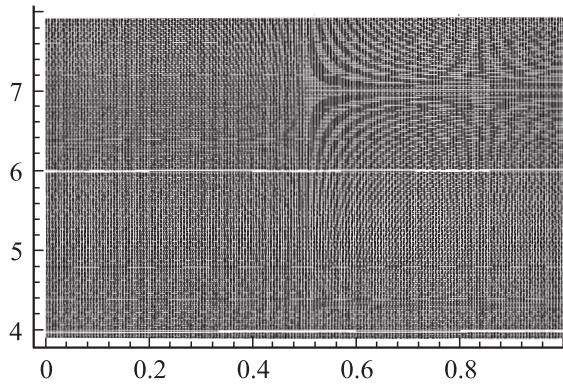


Рис. 7. Множество начальных данных в фазовом пространстве системы, при которых частица набирает заданную энергию. Параметр $\delta = 0.1$.

траекторий, уходящих на бесконечность. Зависимость ее от параметра δ носит довольно сложный характер. Таким образом, либо энергия частицы ограничена, либо частица со временем неограниченно увеличивает свою энергию. Зафиксируем параметр δ системы, поместим частицу в области фазового пространства низких скоростей частицы ($v_0 < 20$) и определим, при каких начальных данных частица сможет набрать определенную энергию ($v_n \geq 100$) за определенное число шагов ($n \leq 10^5$), а при каких окажется ограниченной. Выбрав начальные данные, в некоторой области фазового пространства можно построить бассейн траекторий с неограниченным нарастанием скорости. На рис. 7 показан бассейн таких траекторий в фазовом пространстве. Черная точка соответствует начальным данным, при которых частица набирает заданную энергию, белая оказывается запертой.

Видно, что незначительное изменение начальных данных может приводить к смене типа траектории.

Фрактальная размерность множества точек, принадлежащих бассейну ($v_n \rightarrow \infty$ с $n \rightarrow \infty$), оказалась близкой к двум. Были вычислены информационная и корреляционная размерности, так же оказавшиеся практически равными двум. Таким образом, бесконечно растущие траектории распределяются с большой степенью равномерности по всему фазовому пространству. Это, однако, не означает, что бесконечно растущими являются все траектории. Так, на приведенном фазовом портрете с $\delta = 0.1$, в среднем лишь 37 траекторий из 100 являются бесконечно растущими. Кроме того, при построении рассматриваемого фазового портрета начальные данные для скорости и фазы частицы выбирались на решетке с шагом 0.002. Если при построении фазового портрета начальные данные выбирать случайным образом, процент уходящих траекторий оказывается еще меньше. Имеет место зависимость количества бесконечно растущих траекторий от параметра системы. С его ростом процент уходящих траекторий увеличивается. Так, при $\delta = 0.33$ в среднем растущими оказывается 81 из 100 траекторий.

В чувствительности типа траектории можно убедиться и другим способом, например, выбирая одинаковые начальные данные и изучая влияние изменения параметра отображения δ на тип траектории. Снова поместим частицу в области малых скоростей, фиксируя ее начальную скорость ($v_0 < 20$) и фазу. Теперь определим, при каких значениях параметра системы частица сможет набрать определенную энергию ($v_n \geq 100$) за определенное число шагов ($n \leq 10^5$), а при каких окажется запертой. Начальные значения скорости частицы и фазы первого столкновения не меняются, изменяется только параметр системы. Поэтому фактически полученные данные показывают, как меняются свойства траектории с изменением параметра. Причина такой чувствительно-



Рис. 8. Самоподобная структура значений параметров, при которых частица при фиксированных начальных данных достигает заданной энергии. На верхнем рисунке показана вся область параметра δ , на среднем показана полоса $0.7 \leq \delta \leq 0.75$ верхнего рисунка, построенная с 20-кратным увеличением масштаба. На нижнем рисунке показана увеличенная в 20 раз полоса $0.73 \leq \delta \leq 0.7325$ предыдущего рисунка. Видно, что структура множества сохраняется вглубь по масштабам.

сти связана с перестройками фазового портрета системы при малых изменениях параметра. При этом через фиксированную начальными условиями точку фазового пространства приходят эффективно другие траектории.

На рис. 8 показан характерный штрихкод в пространстве параметра системы δ . Черная полоса соответствует такому значению δ , при котором частица достигает заданной энергии, белая — оказывается запертой. Характерная линейчатая структура сохраняется при изменении масштабов. Каждая полоса при увеличении масштабов расщепляется на еще более мелкомасштабную линейчатую структуру полос.

Таким образом, видно, что незначительное изменение параметра системы также приводит к существенному изменению траектории. Достаточно очень слабого изменения параметров системы, по-видимому, даже бесконечно малого, чтоб запертая частица оказалась свободной.

Полученное множество полос имеет фрактальную структуру. Чтобы убедиться в этом, разобьем множество возможных значений параметра δ на отрезки равной длины и построим график зависимости числа отрезков, в которые попала хотя бы одна полоса, от длины отрезка в логарифмическом масштабе (рис. 9). Полученная зависимость является линейной, что позволяет оценить фрактальную размерность $D_F = 0.745$ данного множества.

Для других начальных состояний множество параметров системы, при которых частица способна покинуть яму, также имеет фрактальную структуру. Таким образом, каждым начальным данным, определяющим траекторию, соответствует фрактальная размерность множества параметров системы, при которых частица способна покинуть яму.

Рассмотрим предельный случай, когда параметр $\delta = 1/L$ близок к единице. Физически это означает, что

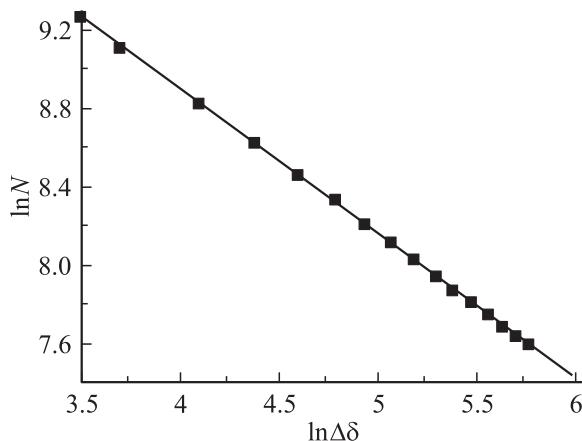


Рис. 9. Фрактальная размерность множества параметров, при которых частица с фиксированными начальными данными достигает заданной энергии. Вся область параметра $0 \leq \delta \leq 1$ была разбита на ячейки размером $\Delta \delta$. Построена зависимость в двойном логарифмическом масштабе количества ячеек, в которые попала хотя бы одна точка множества, от размера ячейки. Величина фрактальной размерности $D_F = 0.745$.

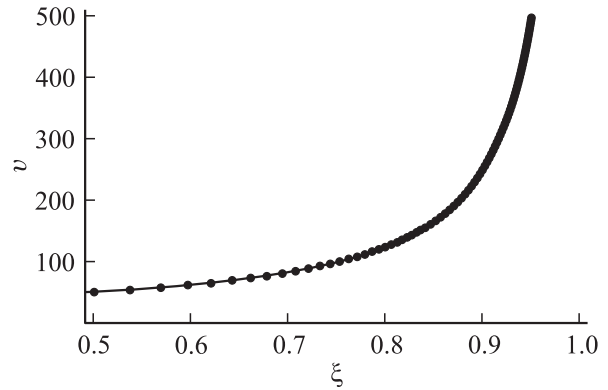


Рис. 10. Точками показана орбита, а линией — инвариантное многообразие, соответствующее выбранным начальным данным $\xi_0 = 0.5, v_0 = 50, \delta = 0.999, N = 5000$.

стенки на периоде сильно сближаются. Этот предельный случай противоположен часто используемому предельному случаю, когда амплитудой движения стенки пренебрегают по сравнению с шириной ямы. В этом случае типичные траектории в фазовом пространстве имеют вид, как на рис. 10.

Пренебрегая различием амплитуды колебаний стенки и ширины ямы, т.е. считая $\delta = 1$ и считая скорость частицы достаточно большой, получим упрощенное отображение:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + 2, \\ \xi_{n+1} &= \xi_n + 2 \frac{1 - \xi_n}{u_{n+1}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Легко заметить, что отображение (3) обладает инвариантом

$$I_n = u_n(1 - \xi_n) = \text{const}. \quad (4)$$

Действительно, рассмотрим значение этого инварианта на $(n + 1)$ -м шаге и преобразуем его, используя отображение (3)

$$\begin{aligned} u_{n+1}(1 - \xi_{n+1}) &= (u_n + 2) \left(1 - \xi_n - 2 \frac{1 - \xi_n}{u_n + 2} \right) \\ &= (1 - \xi_n)(u_n + 2) \left(1 - \frac{2}{u_n + 2} \right) \\ &= (1 - \xi_n)(u_n + 2) \left(\frac{u_n}{u_n + 2} \right) \equiv u_n(1 - \xi_n). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$I_{n+1} = I_n,$$

и эта величина сохраняется при итерациях. Следовательно, каждая орбита отображения эволюционирует, оставаясь на кривой

$$u_n = \frac{\text{const}}{(1 - \xi_n)},$$

где значение $\text{const} = u_0(1 - \xi_0)$ определяется начальными условиями. Это означает, что в этом предельном случае наблюдается режим взрывного ускорения частицы.

На рис. 10 показаны точная орбита отображения и соответствующая ей инвариантная кривая (5). Хорошо заметна согласованность точной орбиты со взрывным характером нарастания скорости (5). Поэтому в этом предельном случае фазовое пространство системы стратифицировано инвариантными кривыми, по которым и движутся все траектории. При $\delta \neq 1$ величина I_n уже не является точным инвариантом отображения, но приобретает смысл адиабатического инварианта.

Докажем, что в рассмотренных выше траекториях скорость частицы увеличивается до бесконечности, т.е. что набор скорости никогда не прекратится. Так как все траектории, полученные с помощью численного счета, являются конечными, доказать это можно только аналитически. Для доказательства используем своеобразный ренормгрупповой метод.

Введем некоторое преобразование F . Это преобразование будет действовать на часть траектории, заключенную в одном периоде движения стенки. Результатом преобразования будет набор столкновений, который также заключен в одном периоде движения стенки и также является частью некоторой, возможно другой, траектории. Обе траектории соответствуют одному и тому же значению параметра системы δ . Для разных δ преобразования будут разными. Таким образом, преобразование переводит часть одной траектории в равную по времени часть другой траектории. Средняя скорость частицы, количество столкновений на периоде движения стенки у исходной части траектории и преобразованной части траектории будут разными. При этом преобразование F будет сохранять разность количества увеличивающих и уменьшающих скорость столкновений частицы со стенкой. Таким образом, если в исходной части траектории частица за период увеличила скорость на некоторую величину, то и в преобразованной части траектории частица увеличит свою скорость на такую же величину. Последовательно применяя преобразование F , можно преобразовать часть траектории, лежащую на идущих подряд периодах движения стенки, в том числе и целиком всю траекторию.

Возможен случай, когда исходная и преобразованная части траектории являются разными частями одной и той же траектории. Этот случай реализуется, если координаты столкновения, следующего за последним столкновением исходной части траектории, совпадают с координатами первого столкновения преобразованной.

Это условие можно назвать условием „сшивки“. Если это условие выполняется, то получившаяся в результате преобразования часть траектории следует сразу за исходной. Преобразованную часть траектории, в свою очередь, также можно преобразовать. При этом оказывается, что выполнения условия сшивки исходной и преобразованной частей траектории достаточно для того, чтоб выполнялось условие сшивки преобразованной и дважды преобразованной частей траектории. Таким образом, многократно действуя преобразованием F на некоторую исходную часть траектории, можно получить бесконечное количество разных частей траектории.

Все они будут последовательно сшиваться в единую, если сшиваются первые две части. Несложно видеть, что получившаяся траектория будет бесконечно растущей.

Таким образом, неограниченно растущая траектория состоит из частей, каждая из которых под действием преобразования F дает следующую и каждая из которых увеличивает скорость частицы на одно и то же значение.

Для каждого параметра системы δ преобразование F будем искать в виде $F = f^{(m)} \circ g^{(n)}$, где f и g — два элементарных преобразования, m и n — натуральные числа. Преобразование f определим следующим образом: рассмотрим часть траектории, лежащую на одном периоде движения стенки (рис. 11, *a*). Выделим в центре периода интервал времени, на котором лежат два столкновения частицы со стенкой. Подберем длительность этого интервала таким образом, чтоб частица попадала и выходила из него на одинаковом расстоянии от центра системы (рис. 11, *b*). Это всегда возможно

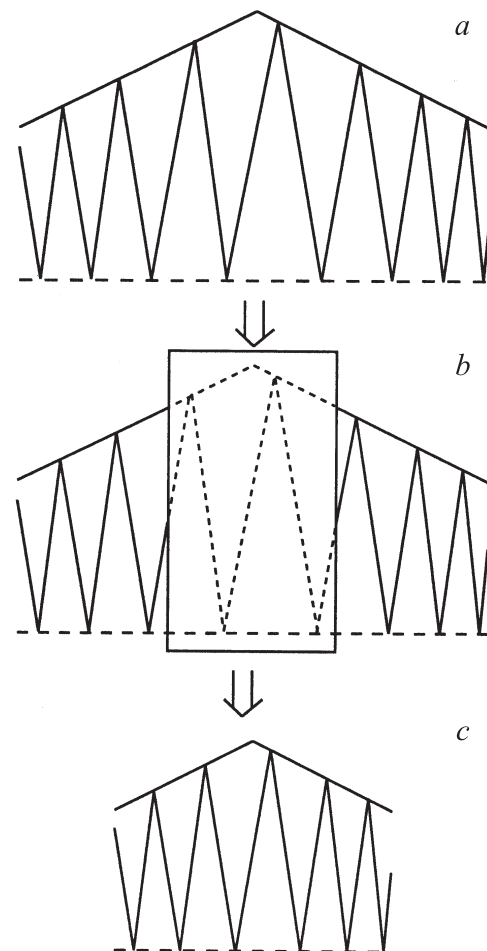


Рис. 11. Действие преобразования f . Вверху показана исходная часть траектории. Под ней — исходная с выделением, которое выбрасывается под действием преобразования f . Внизу показана часть траектории, являющаяся результатом действия преобразования f на исходную.

сделать. Заметим теперь, что одно из двух выделенных столкновений частицы со стенкой уменьшает скорость частицы на удвоенное значение скорости стенки, второе — на столько же увеличивает. Таким образом, и скорость частицы, и расстояние до центра системы на выходе из выделенной зоны будут такими же, как на входе. Это значит, что, выбросив из центра рассматриваемого периода движения стенки выделенную часть и соединив вместе две оставшихся, вновь получим цельную часть траектории, лежащую на одном периоде движения стенки (рис. 11, c). Эта часть траектории будет соответствовать другому параметру системы и иметь на два столкновения меньше по сравнению с исходной. При этом разница увеличивающих и уменьшающих скорость столкновений у части траектории, полученной действием преобразования f , будет такой же, как у исходной части траектории.

Считая, что скорость частицы много больше скорости стенки, длительность выделенного интервала можно считать равной времени двух столкновений частицы со стенкой, т.е. $4L_{\max}/v_{\min}$, где L_{\max} — максимальное расстояние от стенки до центра системы, v_{\min} — минимальная скорость частицы на рассматриваемом периоде движения стенки. После преобразования f L_{\max} уменьшится на величину

$$\Delta L_f = \frac{2L_{\max}}{v_{\min}} u,$$

где u — скорость движения стенки.

Описанные выше действия можно проделать в обратном порядке, т.е. взять преобразованную часть траектории и добавить в центре два столкновения таким образом, чтобы получить исходную часть траектории. Такое преобразование будет обратным преобразованию f . Преобразование g аналогично преобразованию f^{-1} , с той лишь разницей, что оно добавляет два столкновения не в центре, а в начале периода движения стенки (рис. 12, a). Так как добавляются одно увеличивающее и одно уменьшающее скорость частицы столкновения, то преобразование g , так же как и f , сохраняет разницу увеличивающих и уменьшающих скорость частицы столкновений. Скорость частицы перед первым уменьшающим столкновением у преобразованной части траектории будет на удвоенную скорость выше, чем аналогичная скорость у исходной части траектории.

Многokrратно действуя преобразованиями f и g на исходную часть траектории, будем получать части траекторий, соответствующие различным параметрам системы. Для любого параметра системы δ можно подобрать такие числа m и n , что часть траектории, получившаяся в результате действия преобразования $f^{(m)} \circ g^{(n)}$, будет соответствовать тому же параметру системы δ , что и исходная.

Рассмотрим часть траектории системы, лежащую на одном периоде движения стенки. Каждое действие преобразования f уменьшает максимальное расстояние от

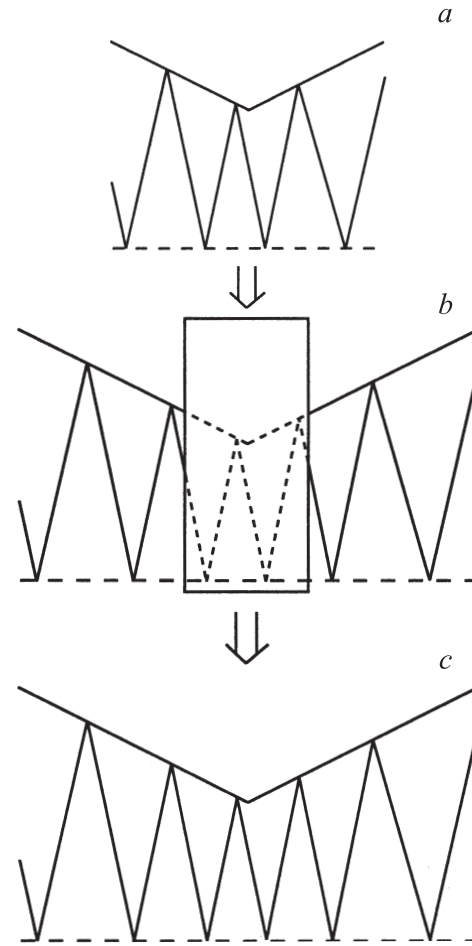


Рис. 12. Действие преобразования g . Вверху показана исходная часть траектории, под ней — исходная с выделением, которое будет добавлено под действием преобразования g . Внизу — часть, являющаяся результатом действия преобразования.

стенки до центра системы L_{\max} на величину ΔL_f , а каждое действие преобразования g уменьшает минимальное расстояние от стенки до центра системы на $\Delta L_g = (2L_{\min}/v_{\max})u$ (рис. 13).

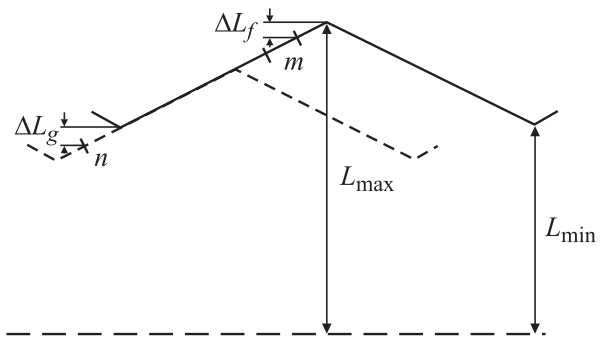


Рис. 13. Один период движения стенки. Сплошная линия — до преобразования F , пунктир — после преобразования F .

Если преобразованная часть траектории соответствует тому же параметру системы δ , что и исходная, то

$$\delta = \frac{L_{\max} - L_{\min}}{L_{\max} + L_{\min}} = \frac{(L_{\max} - m\Delta L_f) - (L_{\min} - n\Delta L_g)}{(L_{\max} - m\Delta L_f) + (L_{\min} - n\Delta L_g)},$$

откуда

$$\frac{L_{\max}}{L_{\min}} = \frac{n\Delta L_g}{m\Delta L_f}.$$

Подставляя ΔL_f и ΔL_g , получим

$$\frac{m}{n} = \frac{v_{\min}}{v_{\max}}.$$

При рассмотрении сверхускорения было получено, что $v = \text{const}/L$, откуда $L_{\min}v_{\max} = L_{\max}v_{\min}$, а поскольку $L_{\min} = 1/\delta - 1$ и $L_{\max} = 1/\delta + 1$, то

$$\frac{m}{n} = \frac{1 - \delta}{1 + \delta}.$$

Таким образом, взяв минимальные натуральные числа m и n , удовлетворяющие полученной формуле, получим искомое преобразование F . Часть траектории, полученная действием преобразования F на исходную, будет иметь такую же, как у исходной, разность числа увеличивающих и уменьшающих скорость столкновений; соответствовать тому же, что и исходная часть траектории, параметру системы δ ; скорость первого столкновения будет на $2n$ значений скорости стенки выше, чем скорость первого столкновения у исходной части траектории; количество столкновений будет на $2(n - m)$ выше, чем у исходной части траектории.

Несложно видеть, что если бы использовались величины, имеющие размерность, то период движения стенки изменился. Новый период был бы равен $T_l = T - \Delta T$. Однако, так как период движения стенки был принят за единицу измерения времени, то период движения стенки после преобразования F , как и до него, равен единице. Фазы столкновения у преобразованной части траектории при этом необходимо обезразмеривать на новый период движения стенки. Таким образом, если фаза первого столкновения до преобразования F была ξ_0 , то после преобразования она будет равна

$$\xi'_0 = \xi_0 \frac{T}{T_l} = \xi_0 \frac{T}{T - \Delta T}.$$

Пусть теперь исходная часть траектории обладает следующим свойством: первое столкновение имеет координаты (ξ_0, v_0) , одно из следующих столкновений имеет координаты $(\xi_N = \xi_0 \frac{T}{T - \Delta T}, v_n = v_0)$. Другими словами, координаты первого столкновения исходной части траектории после преобразования совпадают с координатами другого столкновения исходной траектории. Если координаты столкновения из одной части траектории полностью совпадают с координатами столкновения из другой части траектории, то совпадают и координаты всех предыдущих и последующих столкновений, т.е. рассматриваемые части являются разными частями одной и той же траектории.

Поделимся теперь на преобразованную часть траектории еще раз преобразованием F . При этом столкновение с координатами (ξ_0, v_0) перейдет в $(\xi'_0 \frac{T - \Delta T}{T - 2\Delta T}, v_0) = (\xi_n \frac{T - \Delta T}{T - 2\Delta T}, v_0)$. Несложно видеть, что с точностью до бесконечно малых порядка ΔT^2 координаты этого столкновения совпадают с координатами $(\xi_n \frac{T}{T - \Delta T}, v_0)$ однократно преобразованного столкновения (ξ_n, v_0) . Таким образом, если координаты однократно преобразованного столкновения (ξ_0, v_0) совпадают с координатами столкновения (ξ_n, v_0) , то координаты двукратно преобразованного столкновения (ξ_0, v_0) совпадают с координатами однократно преобразованного столкновения (ξ_n, v_0) и т.д. Значит, все части траектории, получаемые действием преобразования F на исходную часть траектории, принадлежат той же траектории, что и исходная, образуя единую траекторию.

Приведем пример использования ренормпреобразования для поиска ускоряющейся траектории. Пусть параметр системы δ равен $1/3$. Нетрудно видеть, что параметр системы не будет изменять комбинация из одного преобразования f_{-2} и двух преобразований f_{+2} . Таким образом, при данном параметре неограниченно растущая траектория за один свой период стенки увеличивает скорость на 4. Рассмотрим траекторию с начальной фазой, близкой к единице. Эта траектория будет неограниченно растущей, если после некоторого количества столкновений вновь попадет в точку с фазой столкновения, близкой к единице, но со скоростью на 4 больше начальной. Легко видеть, что для этого достаточно всего двух столкновений, увеличивающих скорость частицы. Для начальной скорости частицы V_0 имеем:

$$\xi_l = \frac{\delta + 1}{2} - \frac{\xi_l}{V_0 + 2},$$

$$1 - \xi_l = \frac{\delta + 1}{V_0 + 4} - \frac{\xi_l}{V_0 + 4}.$$

Решив эту систему уравнений, получим $V_0 = 0$. Таким образом, если параметр системы $\delta = 1/3$, то траектория с начальной фазой $\xi_0 = 0.9999$ и начальной скоростью $V_0 = 0, 4, 8, \dots$ будет неограниченно растущей, причем за каждый период движения стенки частица будет увеличивать свою скорость на 4. Это наиболее быстро растущая из всех неограниченно растущих траекторий.

Аналогичным образом можно провести рассмотрение при других параметрах системы. Например, если $\delta = 1/4$, то параметр системы не меняет комбинация из трех преобразований первого типа и пяти преобразований второго типа, неограниченно растущая траектория увеличивает свою скорость на 10 за период. Для этого период траектории должен быть не менее трех периодов движения стенки, соответственно максимально возможное при данном параметре ускорение траектории равно $10/3$. Составив и решив соответствующую такой траектории систему из 17 уравнений, можно получить начальные данные траектории. Разумеется, эти начальные данные при численном моделировании

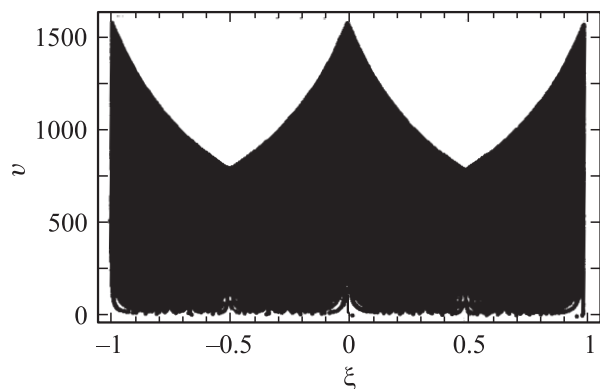


Рис. 14. Фазовый портрет траектории с неограниченно нарастающей скоростью с максимально возможным ускорением. Начальные условия $\xi_0 = 0.0002$, $v_0 = 134$, значение параметра $\delta = 1/3$, число итераций $N = 200\,000$.

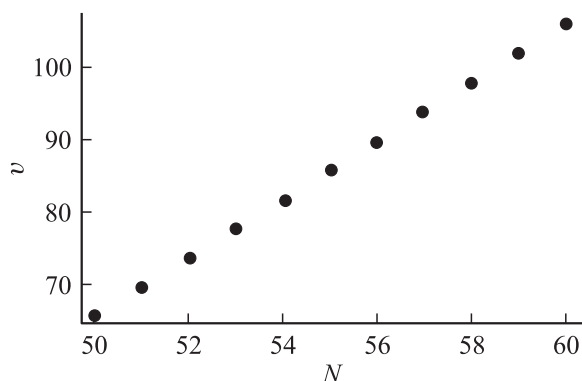


Рис. 15. Пример траектории с максимально большим ускорением. Показана зависимость скорости частицы от номера периода движения стенки для траектории с максимально возможным ускорением. Данные получены из точного отображения. Начальные значения для этой траектории получены с использованием ренорм-соотображения.

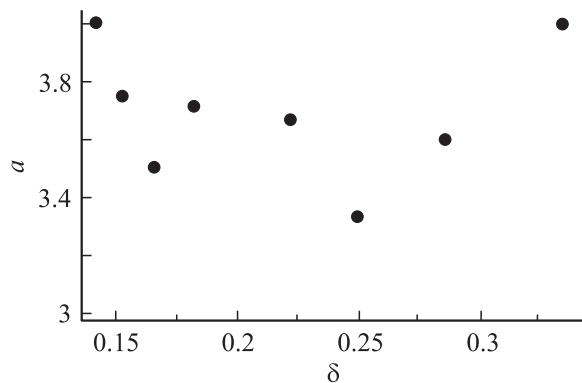


Рис. 16. Зависимость максимального ускорения неограниченно растущей траектории от параметра δ системы. Показаны максимальные ускорения при девяти значениях параметра δ .

дают траекторию с неограниченно нарастающей скоростью с ускорением $10/3$. Другими словами, результаты аналитического рассмотрения хорошо согласуются с результатами численного счета (см., например, рис. 14, 15).

Аналогичным образом можно получить значения максимальных ускорений частицы при различных значениях параметра δ . Зависимость максимальных ускорений для некоторых значений параметра приведена на рис. 16, демонстрирующем сложный характер такой зависимости.

4. Сравнение с высокоэнергетическим приближением

Рассматриваемую систему можно описывать не только точно, но и с использованием высокоэнергетического приближения. В этом приближении скорость частицы считается достаточно большой для того, чтобы можно было не учитывать эффекты, связанные с низкими скоростями, такие как двойные столкновения. Расстояние между стенками считается достаточно большим, чтобы можно было по сравнению с ним пренебречь смещением стенки. В этом приближении скорость стенки считается такой же, как и в точном случае. Отображение, описывающее систему в этом приближении, существенно упрощается по сравнению с точным, и имеет вид:

$$v_{n+1} = \left| v_n + 2 \operatorname{sign} \left(\left| \xi_n \right| - \frac{1}{2} \right) \right|,$$

$$\xi_{n+1} = - \left(\xi_n + \operatorname{sign} \left(\xi_n \frac{2L_0}{v_{n+1}} \right) \right) \pmod{1}.$$

Это отображение, несмотря на простоту, имеет существенный недостаток, затрудняющий его использование. Так как в процессе эволюции частица может понижать свою скорость, то система может выйти за пределы его применимости. Заведомо неизвестно, снизится ли скорость частицы до недопустимо низких значений или нет. Поэтому пренебрежение смещением стенки не является тривиальным и требует дополнительного сравнительного анализа.

Исследуя траектории в высокоэнергетическом приближении, можно установить, что основное отличие от поведения траекторий в точном отображении сводится к исчезновению неограниченно нарастающих траекторий по скорости. Так, на рис. 17 показан фазовый портрет для траектории, соответствующей неограниченно нарастающей по скорости в точном отображении (см. рис. 3), но построенный в высокоэнергетическом приближении. Начальные значения для этой траектории одинаковы как в точном, так и в высокоэнергетическом описании. На рис. 18 приведена зависимость скорости этой траектории от номера столкновений со стенкой в высокоэнергетическом приближении.

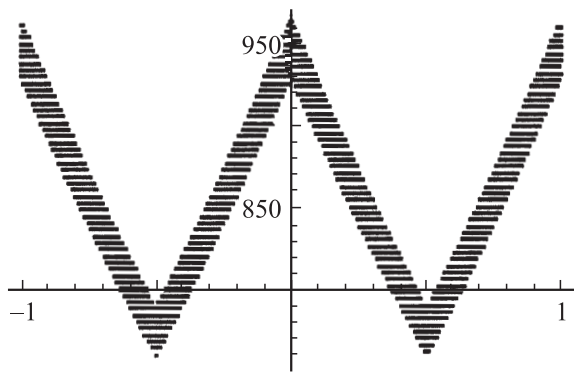


Рис. 17. Фазовый портрет траектории с начальными условиями $\xi_0 = 0.04$, $v_0 = 931.5$ при $\delta = 0.1$ в высокоэнергетическом приближении. Число точек $N = 1\,000\,000$.

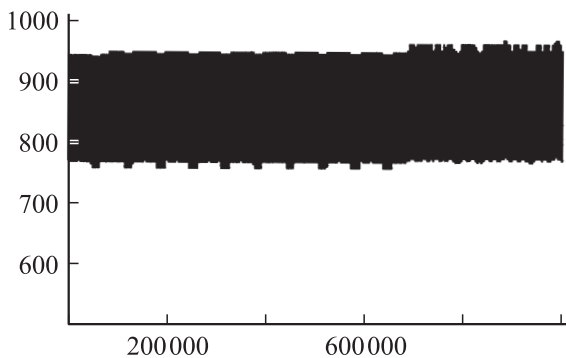


Рис. 18. Зависимость скорости частицы от номера столкновения для траектории $\xi_0 = 0.04$, $v_0 = 931.5$ при $\delta = 0.1$ в высокоэнергетическом приближении.

Этот вывод сохраняется для всех траекторий в высокоэнергетическом приближении. Другими словами, в высокоэнергетическом приближении все траектории ограничены. Это обстоятельство требует осторожного подхода к использованию высокоэнергетического приближения. Физическая причина наличия таких принципиальных отличий связана с сохранением адиабатического инварианта (аналогичного (4)) в высокоэнергетическом приближении и его нарушением в точном.

Выводы

В работе рассмотрена модель, допускающая точное описание и реализующая механизм ускорения Ферми. Получено в явном виде точное отображение, описывающее эту модель. С его помощью были исследованы неограниченно растущие траектории. Показано, что такие траектории имеют „периодическую“ структуру на фоне нарастания скорости, поэтому рост скорости частицы со временем происходит линейно. Значение, на которое скорость частицы увеличивается за один „период“ траектории, найдено аналитически. Показано, что начальные условия таких траекторий равномерно

распределены по фазовому пространству. Изучено качественное изменение типа траектории при изменении параметра системы. Обнаружено наличие сверхускорения в такой системе.

В высокоэнергетическом приближении все траектории оказываются ограниченными. Природа такого радикального различия в поведении частиц в точном отображении и в высокоэнергетическом приближении связана с адиабатическим инвариантом — переменной действия. В высокоэнергетическом пределе этот инвариант точно сохраняется, поэтому на больших временах отсутствуют ускоряющиеся частицы. Для точного отображения адиабатический инвариант нарушается на каждом полупериоде колебаний стенки. Это связано с наличием изломов в законе движения стенки. Разрушение адиабатического инварианта и является главной причиной ускорения частиц.

Список литературы

- [1] *Fermi E.* // Phys. Rev. 1949. Vol. 75. P. 1169.
- [2] *Заславский Г.М., Чуриков Б.В.* // ДАН СССР. 1964. Т. 159. С. 306.
- [3] *Brahic A.* // Astron. Astrophys. 1971. Vol. 12. P. 98.
- [4] *Lieberman M.A., Lichtenberg A.J.* // Phys. Rev. 1972. Vol. A5. P. 1852.
- [5] *Lieberman M.A., Lichtenberg A.J., Cohen R.H.* // Physica. 1980. Vol. 1D. P. 291.
- [6] *Пустыльников Л.Д.* // ДАН СССР. 1978. Т. 241. № 5. С. 1035.
- [7] *Ulam S.M.* // Proc. 4th Berkeley Symp. on Math. Stat. and Probability. University of California Press, 1961. Vol. 3. P. 315.
- [8] *Пустыльников Л.Д.* // Математ. просвещ. 2004. Сер. 3. Вып. 8. С. 164–180.
- [9] *Zharnitsky V.* // Nonlinearity. 1998. Vol. 11. P. 1481–1487.
- [10] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. М.: Наука, 1965. 204 с.
- [11] *Schmidt G., Chen Qi* // Physica D. 1994. Vol. 71. P. 18.
- [12] *Заславский Г.М.* Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984. 272 с.