

Расчет электростатического потенциала диодной системы на основе полевого катода с острой кромкой

© Е.М. Виноградова, Н.В. Егоров, М.Г. Мутул, Чэ-Чоу Шэнь

Санкт-Петербургский государственный университет,
198904 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: nve@apmath.ru

(Поступило в Редакцию 9 апреля 2009 г. В окончательной редакции 7 июля 2009 г.)

Представлена математическая модель диодной системы на основе полевого катода с острой кромкой. Поверхность катода с острой кромкой моделируется двумя бесконечно тонкими сферическими сегментами, анод — одним бесконечно тонким сферическим сегментом. Область, занимаемая катодом, представляет собой линзу (область „луночного“ типа). Решена задача вычисления распределения электростатического потенциала во всей области исследуемой системы.

Введение

Развитие теории источников электронов и ионов тесно связано с общим развитием фундаментальных и прикладных наук: математического моделирования, физики поверхности, ускорителей, нанoeлектроники и т.д. Как известно [1], источники электронов на основе полевой электронной эмиссии по своим основным характеристикам превосходят широко применяемые на практике источники на основе термоэлектронной эмиссии.

Для создания полевых катодов используются различные материалы, прежде всего — тугоплавкие металлы, такие как, например, вольфрам и молибден. В монографии [2] приведены ссылки на многочисленные публикации, посвященные катодам из полупроводниковых материалов, однако такие катоды, как правило, являются недолговечными. В 1970-х гг. была открыта эмиссия углеродных материалов [3,4], при этом эксперименты с углеродными волокнами показали очень большую долговечность таких катодов по сравнению с вольфрамовыми. В настоящее время исследуется возможность применения в промышленности углеродных нанотрубок в виде электронных эмиттеров, зондов в сканирующей электронной микроскопии и т.д. [1].

Целью работы является расчет диодной осесимметричной электронно-оптической системы на основе полевого источника.

1. Физическая постановка задачи

Рассмотрим осесимметричную диодную систему, состоящую из катода с острой кромкой, изготовленного из углеродного материала, моделируемого тонкими сферическими сегментами. Анод моделируется бесконечно тонким сферическим сегментом (см. рисунок). Потенциал катода равен нулю. На поверхности анода задаются граничные условия первого типа. Пространство между катодом и анодом заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε_1 , внешняя область системы заполнена диэлектриком с проницаемостью ε_2 . Требуется

найти распределение электростатического потенциала во всей области системы.

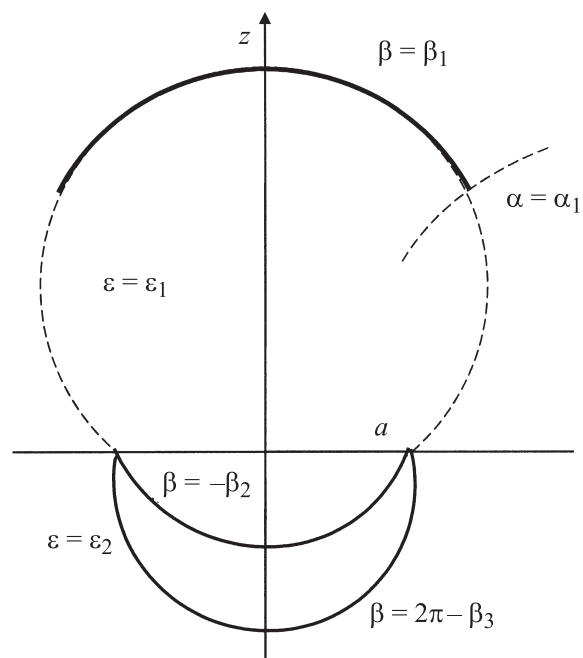
Для решения данной задачи рассмотрим тороидальную систему координат (α, β, φ) [5,6]. Связь тороидальных координат с цилиндрическими (r, z) задается формулами

$$r = \frac{a \operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}, \quad (1)$$

$$z = \frac{a \sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}, \quad (2)$$

где a — размерный масштабный множитель.

Согласно (1), (2), координатные поверхности $\alpha = \text{const}$ ($0 < \alpha < \infty$) задают семейство торов, описыва-



Схематическое изображение диодной системы.

емое уравнением

$$(r - a \operatorname{cth} \alpha)^2 + z^2 = \left(\frac{a}{\operatorname{sh} \alpha} \right)^2.$$

Координатные поверхности $\alpha = 0$ — ось $0z$, $\alpha = \infty$ — окружность радиуса $r = a$ в плоскости $z = 0$.

Координатными поверхностями $\beta = \operatorname{const}$ являются части сфер

$$(z + a \operatorname{ctg} \beta)^2 + r^2 = \left(\frac{a}{\sin \beta} \right)^2.$$

Координатные поверхности $\beta = 0$ — внутренность круга ($r < a$), $\beta = \pm\pi$ — внешность круга ($r > a$), лежащего в плоскости $z = 0$.

Поверхность катода можно представить координатными поверхностями $\beta = -\beta_2$, $\beta = 2\pi - \beta_3$, $0 \leq \alpha < \infty$. Поверхность анода задается координатной поверхностью $\beta = \beta_1$, $0 \leq \alpha < \alpha_1$. Расстояние от плоскости кромки катода ($z = 0$) до анода по оси z вычисляется по формуле

$$z = a \operatorname{tg}(\beta_1/2).$$

В случае, если $\beta_1 = \pi$, поверхность анода представляет собой не полый сферический сегмент, а диафрагму в плоскости $z = 0$, радиус отверстия которой равен

$$r = a \operatorname{cth}(\alpha_1/2).$$

2. Математическая постановка задачи

Задача нахождения распределения электростатического потенциала сводится к решению уравнения Лапласа, записанного в тороидальной системе координат

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(r \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(r \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) = 0, \quad (3)$$

где r определяется формулой (1).

Граничные условия определяются заданными потенциалами на аноде и катоде и условиями непрерывности нормальной составляющей вектора смещения на линиях, разделяющих области, но не принадлежащих поверхностям сегментов:

$$u(\alpha, \beta_1) = V(\alpha), \quad 0 \leq \alpha < \alpha_1,$$

$$u(\alpha, -\beta_2) = u(\alpha, 2\pi - \beta_3) = 0, \quad 0 \leq \alpha < \infty,$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial u(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\beta_1-0} = \varepsilon_2 \frac{\partial u(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\beta_1+0}, \quad \alpha_1 < \alpha < \infty. \quad (4)$$

3. Решение задачи

При решении граничной задачи (3), (4) будем использовать метод парных уравнений [5]. Для

этого удобно разбить всю область рассматриваемой электронно-оптической системы на две части: $-\beta_2 < \beta < \beta_1$ и $\beta_1 < \beta < 2\pi - \beta_3$. После чего требуется определить потенциалы $u_{1,2}(\alpha, \beta)$, удовлетворяющие уравнению Лапласа (3) с граничными условиями (4) в соответствующих областях.

Общее решение уравнения Лапласа в каждой из областей можно записать в виде

$$u_1(\alpha, \beta) = \sqrt{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \int_0^\infty (A_1(\tau) \operatorname{sh}(\beta_1 - \beta)\tau + B_1(\tau) \operatorname{sh}(\beta + \beta_2)\tau) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau,$$

$$u_2(\alpha, \beta) = \sqrt{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \int_0^\infty (A_2(\tau) \operatorname{sh}(\beta - \beta_1)\tau + B_2(\tau) \operatorname{sh}(2\pi - \beta_3 - \beta)\tau) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau.$$

Удовлетворяя первому из граничных условий (4), получаем

$$\operatorname{sh}(\beta_1 + \beta_2)\tau B_1(\tau) = \operatorname{sh}(2\pi - \beta_3 - \beta_1)\tau B_2(\tau).$$

Второе из граничных условий (4) дает

$$A_1(\tau) = A_2(\tau) = 0.$$

Таким образом, решение уравнения Лапласа в каждой из областей имеет вид:

$$\begin{aligned} u_1(\alpha, \beta) &= \sqrt{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \\ &\times \int_0^\infty B(\tau) \frac{\operatorname{sh}(\beta + \beta_2)\tau}{\operatorname{sh}(\beta_1 + \beta_2)\tau} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau, \quad -\beta_2 < \beta < \beta_1, \\ u_2(\alpha, \beta) &= \sqrt{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \\ &\times \int_0^\infty B(\tau) \frac{\operatorname{sh}(2\pi - \beta_3 - \beta)\tau}{\operatorname{sh}(2\pi - \beta_3 - \beta_1)\tau} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau, \\ &-\beta_1 < \beta < 2\pi - \beta_3. \end{aligned} \quad (5)$$

Используя разложения потенциала (5), а также первое и третье из условий (4), получаем парные уравнения следующего вида:

$$\int_0^\infty B(\tau) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau = \frac{V(\alpha)}{\sqrt{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta_1}}, \quad 0 \leq \alpha < \alpha_1,$$

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \tau B(\tau) (\varepsilon_1 \operatorname{cth}(\beta_1 + \beta_2)\tau + \varepsilon_2 \operatorname{cth}(2\pi - \beta_3 - \beta_1)\tau) \\ &\times P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau = 0, \quad \alpha_1 < \alpha < \infty, \end{aligned} \quad (6)$$

если выполняются условия: $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ при $\beta_1 = \pi$, либо $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ при $0 < \beta_1 \leq \pi$.

Положим

$$B(\tau)(\varepsilon_1 \operatorname{cth}(\beta_1 + \beta_2)\tau + \varepsilon_2 \operatorname{cth}(2\pi - \beta_3 - \beta_1)\tau) = \operatorname{th} \pi \tau C(\tau). \quad (7)$$

Тогда парные уравнения (6) принимают вид:

$$\int_0^\infty (1 - g(\tau))C(\tau)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)V(\alpha)}{\sqrt{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta_1}}, \quad 0 \leq \alpha < \alpha_1, \\ \int_0^\infty \tau \operatorname{th} \pi \tau C(\tau)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau = 0, \quad \alpha_1 \leq \alpha < \infty, \quad (8)$$

где

$$g(\tau) = 1 - \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\operatorname{th} \pi \tau}{\varepsilon_1 \operatorname{cth}(\beta_1 + \beta_2)\tau + \varepsilon_2(2\pi - \beta_3 - \beta_1)\tau}. \quad (9)$$

Переходя к решению (8), полагаем [6,7]

$$C(\tau) = \int_0^{\alpha_1} \varphi(t) \cos \tau t dt, \quad (10)$$

где $\varphi(t)$ — новая неизвестная функция.

Подстановка (10) во второе из уравнений (8) обращает его в тождество. Подставив (10) в первое из уравнений (8), приходим к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода относительно введенной функции $\varphi(t)$:

$$\varphi(x) - \frac{2}{\pi} \int_0^{\alpha_1} K(x, t)\varphi(t) dt = F(x), \quad 0 \leq x < \alpha_1, \quad (11)$$

где правая часть уравнения (11) выражается квадратурой [5]

$$F(x) = \frac{2}{x} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)V(\alpha) \operatorname{sh}(\alpha)}{\sqrt{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta_1} \sqrt{2(\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} \alpha)}} d\alpha, \quad (12)$$

а ядро имеет явный вид

$$K(x, t) = \int_0^\infty g(\tau) \cos \tau x \cos \tau t d\tau. \quad (13)$$

В случае, если в граничных условиях (4) $V(\alpha) = V = \operatorname{const}$ и $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, то функцию (12) можно непосредственно вычислить

$$F(x) = \frac{4V\varepsilon_1}{\pi} \sqrt{1 + \cos \beta_1} \frac{\operatorname{ch} \frac{x}{2}}{\cos \beta_1 + \operatorname{ch} x}. \quad (14)$$

Таким образом, решив уравнение Фредгольма (11)–(13) и используя формулы (7), (9), (10), найдем неизвестные коэффициенты, входящие в разложение электростатического потенциала (5).

Расчет напряженности электростатического поля

В тороидальной системе координат составляющие напряженности электростатического поля по переменным α и β (E_α, E_β) определяются по формулам:

$$E_\alpha = -\frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial u(\alpha, \beta)}{\partial \alpha}, \quad E_\beta = -\frac{1}{h_\beta} \frac{\partial u(\alpha, \beta)}{\partial \beta},$$

где $h_\alpha = h_\beta = \frac{a}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}$ — метрические коэффициенты.

Из (5) составляющие напряженности электростатического поля имеют вид

$$E_{1,\alpha}(\alpha, \beta) = -\frac{1}{2a} \operatorname{sh} \alpha \sqrt{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \int_0^\infty B(\tau) \frac{\operatorname{sh}(\beta + \beta_2)\tau}{\operatorname{sh}(\beta_1 + \beta_2)\tau} \times P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau + \frac{1}{a} (\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^{3/2} \times \int_0^\infty \left(\tau^2 + \frac{1}{4}\right) B(\tau) \frac{\operatorname{sh}(\beta + \beta_2)\tau}{\operatorname{sh}(\beta_1 + \beta_2)\tau} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{-1}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau, \quad -\beta_2 < \beta < \beta_1, \quad (15)$$

$$E_{a,\beta}(\alpha, \beta) = \frac{1}{2a} \sin \beta \sqrt{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \int_0^\infty B(\tau) \frac{\operatorname{sh}(\beta + \beta_2)\tau}{\operatorname{sh}(\beta_1 + \beta_2)\tau} \times P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau - \frac{1}{a} (\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^{3/2} \times \int_0^\infty \tau B(\tau) \frac{\operatorname{ch}(\beta + \beta_2)\tau}{\operatorname{sh}(\beta_1 + \beta_2)\tau} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{-1}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau, \quad -\beta_2 < \beta < \beta_1, \quad (16)$$

$$E_{2,\alpha}(\alpha, \beta) = -\frac{1}{2a} \operatorname{sh} \alpha \sqrt{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \int_0^\infty B(\tau) \times \frac{\operatorname{sh}(2\pi - \beta_3 - \beta)\tau}{\operatorname{sh}(2\pi - \beta_3 - \beta_1)\tau} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau + \frac{1}{a} (\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^{3/2} \times \int_0^\infty \left(\tau^2 + \frac{1}{4}\right) B(\tau) \frac{\operatorname{sh}(2\pi - \beta_3 - \beta)\tau}{\operatorname{sh}(2\pi - \beta_3 - \beta_1)\tau} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{-1}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau, \quad -\beta_1 < \beta < 2\pi - \beta_3, \quad (17)$$

$$E_{2,\beta}(\alpha, \beta) = \frac{1}{2a} \sin \beta \sqrt{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \int_0^\infty B(\tau) \times \frac{\operatorname{sh}(2\pi - \beta_3 - \beta)\tau}{\operatorname{sh}(2\pi - \beta_3 - \beta_1)\tau} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau + \frac{1}{a} (\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^{3/2} \times \int_0^\infty \tau B(\tau) \frac{\operatorname{ch}(2\pi - \beta_3 - \beta)\tau}{\operatorname{sh}(2\pi - \beta_3 - \beta_1)\tau} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{-1}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau, \quad -\beta_1 < \beta < 2\pi - \beta_3, \quad (18)$$

где $P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{-1}(\operatorname{ch} \alpha)$ — присоединенные функции Лежандра.

Рассмотрим поведение составляющих напряженности электростатического поля E_α, E_β вблизи острой кромки катода. Определим поведение функций (15)–(18) при $\alpha \rightarrow \infty$. Функции Лежандра $P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\text{ch } \alpha)$ можно представить через гипергеометрическую функцию [8]

$$\begin{aligned} \Gamma(1-\mu)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^\mu(\text{ch } \alpha) &= 2^{2\mu}(1-\exp(-2\alpha))^{-\mu} \\ &\times \exp\left(-\left(\frac{1}{2}+i\tau\right)\alpha\right) \\ &\times \Gamma\left(\frac{1}{2}-i\tau-\mu, \frac{1}{2}-\mu; 1-2\mu; 1-\exp(-2\alpha)\right). \end{aligned}$$

Тогда из асимптотического представления [5] при $\text{ch } \alpha \gg 1$

$$\begin{aligned} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^\mu(\text{ch } \alpha) &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi \text{ch } \alpha}} 2\mathcal{R}\left(\frac{\Gamma(i\tau)(2\text{ch } \alpha)^{i\tau}}{\Gamma(1/2+i\tau-\mu)}\right) \\ &\times \left[1 + O\left(\frac{1}{\text{ch}^2 \alpha}\right)\right] \end{aligned}$$

следует, что функции $P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\text{ch } \alpha)$ по переменной α при $\alpha \rightarrow \infty$ убывают как $(\text{ch } \alpha)^{-1/2}$.

Таким образом, вблизи острой кромки катода функции составляющих напряженности электростатического поля E_α, E_β (из (15)–(18)) возрастают как $\exp(\alpha)$.

Кроме того, следует отметить, что координатные поверхности $\alpha = \text{const}$ — торы, при $\alpha \rightarrow \infty$ образующие окружности которых имеют радиус кривизны порядка $\frac{\alpha}{\exp(\alpha)}$, что вполне соответствует вычисленному поведению напряженности поля вблизи острой кромки катода.

Заключение

В работе рассматривается осесимметричная диодная система на основе полевого катода из углеродного материала с острой кромкой. Пространство между катодом и анодом заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε_1 , внешняя область системы заполнена диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε_2 .

Найдено распределение электростатического потенциала (5) и напряженности электростатического поля (15)–(18) во всей области диодной системы для следующих значений параметров:

- 1) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, $0 < \beta_1 \leq \pi$ (анод представляет собой бесконечно тонкий сферический сегмент или диафрагму),
- 2) $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$, $\beta_1 = \pi$ (анод представляет собой диафрагму).

При этом решение граничной задачи (3)–(4) сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода (11) с правой частью (12), (14) и ядром, выписанным в явном виде (13).

Подобные диодные системы могут быть использованы при разработке и проектировании электронных источников на основе как металлических полевых эмиттеров, так и углеродных нанотрубок, имеющих большие перспективы в плане их практического применения в современных электровакуумных приборах.

Список литературы

- [1] *Шешин Е.П.* Структура поверхности и автоэмиссионные свойства углеродных материалов. М.: Физматкнига, 2001. 236 с.
- [2] *Тараненко Н.И., Кравченко В.Ф.* Автоэмиссионные наноструктуры и приборы на их основе. М.: Физматкнига, 2006. 192 с.
- [3] *Baker F.S., Osborn A.R., Williams J.* // J. Phys. D: Appl. Phys. 1974. Vol. 7. N 15. P. 2105–2115.
- [4] *Braun E., Smith J.F., Sykes D.E.* // Vacuum. 1975. Vol. 25. N 9–10. P. 425–426.
- [5] *Уфлянд Я.С.* Метод парных уравнений в задачах математической физики. Л.: Наука, 1977. 220 с.
- [6] *Egorov N.V., Vinogradova E.M.* // Vacuum. 2004. Vol. 72. P. 103–111.
- [7] *Виноградова Е.М., Егоров Н.В., Баранов Р.Ю.* // РиЭ. 2007. Т. 52. Вып. 2. С. 225–230.
- [8] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1973. 296 с.