

01;03

## О расчете скорости переноса вещества периодическими волнами, распространяющимися по поверхности вязкой жидкости

© Д.Ф. Белоножко, А.В. Козин

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
150000 Ярославль, Россия  
e-mail: belonozhko@mail.ru

(Поступило в Редакцию 13 мая 2009 г.)

Построено обобщение классической модели дрейфа Стокса, описывающей перенос вещества периодическими волнами, распространяющимися по поверхности бесконечно глубокой несжимаемой идеальной жидкости, на случай вязкой жидкости. Предложено аналитическое выражение для скорости добавочного течения, в которое жидкость вовлекается горизонтальными вязкими сдвиговыми напряжениями, возникающими между соседними по глубине горизонтальными слоями жидкости, участвующими в дрейфовом движении.

### Введение

В середине XIX в. английский физик Г. Стокс (G. Stokes) обнаружил, что распространение гравитационных периодических волн по горизонтальной поверхности жидкости вызывает медленное по сравнению с фазовой скоростью волн общее дрейфовое движение жидких частиц, называемое теперь „дрейф Стокса“ [1,2]. Г. Стокс рассмотрел задачу о расчете поля скоростей в бесконечно глубокой идеальной несжимаемой жидкости, по горизонтальной поверхности которой распространяется гравитационная волна, амплитуда которой мала по сравнению с ее длиной. Решение задачи в квадратичном приближении по амплитуде волны показало, что периодическое волновое возмущение свободной поверхности вызывает внутри самой жидкости не только периодические движения жидких частиц около некоторого среднего положения, но и горизонтальное движение этого среднего положения в направлении распространения волны.

Г. Стокс получил выражение для абсолютного значения скорости этого дрейфового движения (см. [1,2]):

$$w_S = Ak^2\omega_0 \exp(-2kd). \quad (1)$$

Здесь  $A$  — амплитуда волны;  $k$  — волновое число;  $\omega_0$  — циклическая частота волнового движения;  $d$  — глубина, на которой вычисляется скорость дрейфа. Формула (1), выведенная для скорости дрейфа, вызванного гравитационной волной, справедлива и для капиллярно-гравитационной волны, если циклическую частоту  $\omega_0$  положить равной [2]:

$$\omega_0 = \sqrt{gk(1 + \alpha^2k^2)}; \quad \alpha = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}. \quad (2)$$

Здесь  $\alpha$  — капиллярная постоянная жидкости,  $g$  — ускорение свободного падения,  $\gamma$  — коэффициент поверхностного натяжения и  $\rho$  — плотность жидкости.

Существование дрейфа Стокса подтверждено многочисленными наблюдениями и экспериментами [2–4],

однако до сих пор широко распространено ошибочное представление, согласно которому вызываемое периодической бегущей волной малой амплитуды движение частиц жидкости представляет собой только круговые движения около некоторого среднего неподвижного положения [5–8]. Этот вывод основан на грубом анализе в линейном приближении по амплитуде волны и качественно неверен. Как показано в [2–4], за период  $T = 2\pi/\omega_0$  частица жидкости, расположенная на свободной поверхности, по которой распространяется бегущая периодическая волна, описывает в вертикальной плоскости не окружность, а виток, по форме близкий к полной дуге окружности радиусом  $A$  ( $A$  — амплитуда волны). Вследствие затухания движения с глубиной нижняя часть витка вынуждена быть короче верхней на некоторую малую по сравнению с амплитудой величину. Поэтому через время  $T$  частица возвращается не в исходное положение, а оказывается смещенной относительно него в направлении распространения волны. С каждым новым витком величина этого смещения систематически накапливается и складывается в средний дрейф, скорость которого и определяется формулой (1). Аналогичные движения совершают жидкие частицы, расположенные не на свободной поверхности, а на определенной глубине. С увеличением глубины амплитуда периодических движений и скорость среднего дрейфа уменьшаются [1–4].

Для многочисленных приложений, имеющих дело с волновыми движениями на свободной поверхности жидкости, представляет интерес учитывать возникающее в результате распространения поверхностных волн дрейфовое течение, которое может оказаться причиной переноса вдоль поверхности жидкости распределенного по ней поверхностно-активного вещества (ПАВ) или электрического заряда. Однако важно обратить внимание на то, что в общем случае динамикой распределения некоторой субстанции по свободной поверхности жидкости управляют вязкие касательные напряжения [9,10], которые в модели дрейфа Стокса не учтены. Аналитическое описание влияния вязких сил на структуру дрейфового

течения, вызываемого волновым движением, отсутствовало на протяжении более чем полуторавековой истории вопроса, поскольку не имелось корректного аналитического асимптотического решения задачи о расчете влияния вязкости на закономерности распространения нелинейной периодической капиллярно-гравитационной волны. Только в начале текущего столетия такое решение было предложено в работах [11–13], и исследование вопроса стало возможным.

В дальнейшем изложении рассмотрен аналитический расчет поля скоростей в бесконечно глубокой несжимаемой вязкой жидкости, по свободной горизонтальной поверхности которой распространяется периодическая капиллярно-гравитационная волна малой, но конечной амплитуды. Решение строится во втором приближении по амплитуде волны. В отличие от работ [11–13] основное внимание уделяется подробностям решения, связанным с появлением нового дрейфового слагаемого. В процедуре решения применяется система обозначений, позволяющая сосредоточить усилия на определении только дрейфовой части течения, не вычисляя полностью все его составляющие. Предлагаемый подход позволяет эффективно рассматривать более сложные задачи, такие как аналитический расчет вызванного волновым движением среднего поверхностного дрейфа ПАВ или релаксирующего поверхностного электрического заряда.

## 1. Математическая формулировка задачи

Пусть несжимаемая ньютоновская жидкость с кинетической вязкостью  $\nu$ , плотностью  $\rho$  и коэффициентом поверхностного натяжения  $\gamma$  в декартовой системе координат с осью  $Oz$ , направленной вертикально вверх, в поле сил тяжести  $\mathbf{g}$  заполняет полупространство  $z < 0$ . Физическими свойствами среды над жидкостью будем пренебрегать. Рассмотрим периодическую капиллярно-гравитационную волну, распространяющуюся по свободной поверхности жидкости вдоль горизонтальной оси  $Ox$ . Примем амплитуду волны малой по сравнению с ее длиной и для простоты будем считать движение жидкости не зависящим от горизонтальной координаты  $y$ . Рассмотрим задачу определения средней скорости горизонтального дрейфа жидкости, вызванного распространением периодической волны с известной амплитудой и волновым числом.

Обозначим  $u \equiv u(t, x, z)$  и  $v \equiv v(t, x, z)$  — горизонтальную и вертикальную компоненты поля скоростей движения жидкости;  $\mathbf{e}_x$  и  $\mathbf{e}_z$  — орты осей  $Ox$  и  $Oz$ . Отклонение свободной поверхности жидкости  $\xi = \xi(x, t)$  от равновесного состояния  $z = 0$ , связанное с волновым движением и возникающее в жидкости поле скоростей  $\mathbf{U} = u\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_z$  удовлетворяют известному набору уравнений гидродинамики несжимаемой ньютоновской жид-

кости и соответствующим граничным условиям [1–4]:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{U} + \left( \frac{1}{2} \nabla U^2 + [(\nabla \times \mathbf{U}) \times \mathbf{U}] \right) \\ = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{U} + \mathbf{g}; \quad \nabla \mathbf{U} = 0; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\partial_t \xi + u \partial_x \xi = v; \quad p - 2\rho \nu \mathbf{n}((\mathbf{n} \nabla) \mathbf{U}) = -\frac{\gamma \partial_{xx} \xi}{(1 + (\partial_x \xi)^2)^{3/2}};$$

$$\boldsymbol{\tau}((\mathbf{n} \nabla) \mathbf{U}) + \mathbf{n}((\boldsymbol{\tau} \nabla) \mathbf{U}) = 0;$$

$$z \rightarrow -\infty: \quad u \rightarrow 0; \quad v \rightarrow 0; \quad \nabla \equiv \mathbf{e}_x \partial_x + \mathbf{e}_z \partial_z.$$

Здесь  $p \equiv p(t, x, z)$  — давление внутри жидкости;  $\mathbf{n} \equiv \mathbf{n}(t, x)$  — орт внешней нормали к свободной поверхности, построенный из точки поверхности, которая в момент времени  $t$  имеет горизонтальную координату  $x$ ;  $\boldsymbol{\tau} \equiv \boldsymbol{\tau}(t, x)$  — орт касательной к свободной поверхности;  $\partial_t$  и  $\partial_x, \partial_z$  — частные производные по времени и координатам. Слагаемые, которые в первом уравнении (3) заключены в круглые скобки, тождественны выражению  $(\mathbf{U} \nabla) \mathbf{U}$  (см., например, [2]).

Вместо использования начальных условий, которые в общем случае определяют спектр мод волнового движения, генерируемых в начальный момент времени, будем руководствоваться соображениями максимальной простоты спектрального состава искомого решения. Такой подход традиционен для задач подобного рода и позволяет получить решение, наименее громоздкое в плане аналитического описания и качественного анализа [1–4, 11–13].

Следуя стандартной для нелинейной теории периодических волн малой, но конечной амплитуды методике [1–4, 11–13], решение задачи (3) будем строить в виде разложений неизвестных величин по степеням малого параметра, равного произведению амплитуды волны на ее волновое число  $\varepsilon = kA$ . Ограничившись вторым приближением по параметру  $\varepsilon$ , будем искать неизвестные величины в виде асимптотических разложений:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 + O(\varepsilon^3); \quad \mathbf{U}_1 = O(\varepsilon); \quad \mathbf{U}_2 = O(\varepsilon^2); \\ p &= p_0 + p_1 + p_2 + O(\varepsilon^3); \\ p_1 &= O(\varepsilon); \quad p_2 = O(\varepsilon^2); \\ \xi &= \xi_1 + \xi_2 + O(\varepsilon^3); \quad \xi_1 = O(\varepsilon); \quad \xi_2 = O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь „ $O$ “ — символ порядка величины. В выражениях для вектора скорости оценка порядка относится к каждой из компонент вектора. В финальных выражениях будем раскрывать определение параметра  $\varepsilon$ :  $\varepsilon = kA$ ,  $\varepsilon^2 = k^2 A^2$  и, соблюдая традиционную терминологию, применяющуюся в теории волн малой, но конечной амплитуды на поверхности бесконечно глубокой жидкости [1–4, 11–13], называть переменные  $\mathbf{U}_n, p_n, \xi_n$  величинами  $n$ -го порядка малости по амплитуде волны, имея в виду что фактическим малым параметром является

все же отношение амплитуды волны к ее длине, которое пропорционально безразмерному параметру  $\varepsilon = kA$ .

Подстановка разложений (4) в соотношения (3) и отнесение граничных условий на невозмущенную поверхность  $z = 0$  приводят к разбиению исходной задачи на задачи нулевого, первого и второго порядков малости по амплитуде волны. Подробное описание процедуры разбиения задачи (3) на порядки малости имеется в работах [11,12].

Задача нулевого порядка сводится к определению гидростатического давления  $p_0 = -\rho g z$  в покоящейся жидкости со свободной поверхностью  $z = 0$ .

Математическая формулировка задачи первого по амплитуде волны порядка малости имеет вид

$$z < 0: \quad \partial_t \mathbf{U}_1 + \frac{1}{\rho} \nabla p_1 - \nu \nabla^2 \mathbf{U}_1 = \mathbf{0}; \quad \nabla \mathbf{U}_1 = \mathbf{0}; \quad (5)$$

$$z = 0: \quad \begin{aligned} \partial_t \xi_1 - v_1 &= 0; \\ -\rho g \xi_1 + p_1 - 2\rho \nu \partial_z v_1 + \gamma \partial_{xx} \xi_1 &= 0; \\ \partial_z u_1 + \partial_x v_1 &= 0; \end{aligned} \quad (6)$$

$$z \rightarrow -\infty: \quad u_1 \rightarrow 0; \quad v_1 \rightarrow 0.$$

Формулировка задачи второго по амплитуде волны порядка малости состоит из выражений

$$z < 0: \quad \begin{aligned} \partial_t \mathbf{U}_2 + \frac{1}{\rho} \nabla p_2 - \nu \nabla^2 \mathbf{U}_2 &= -\frac{\nabla(U_1^2)}{2} \\ &- [(\nabla \times \mathbf{U}_1) \times \mathbf{U}_1]; \quad \nabla \mathbf{U}_2 = \mathbf{0}; \end{aligned} \quad (7)$$

$$z = 0: \quad \begin{aligned} \partial_t \xi_2 - v_2 &= \xi_1 \partial_z v_1 - u_1 \partial_x \xi_1; \\ -\rho g \xi_2 + p_2 - 2\rho \nu \partial_z v_2 + \gamma \partial_{xx} \xi_2 &= 2\rho \nu \xi_1 \partial_{zz} v_1 - \xi_1 \partial_z p_1; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \partial_z u_2 + \partial_x v_2 &= -4\partial_z v_1 \partial_x \xi_1 - \xi_1 \partial_z (\partial_x v_1 + \partial_z u_1); \\ z \rightarrow -\infty: \quad u_2 &\rightarrow 0; \quad v_2 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

## 2. Решение задачи первого по амплитуде волны порядка малости

Решение задачи (5), (6) первого по амплитуде волны порядка малости хорошо известно [6] и может быть описано выражениями типа бегущей волны:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ u_1 \\ v_1 \\ p_1 \end{pmatrix} = \frac{A}{2} \begin{pmatrix} -i(S + 2\nu k^2) \exp(kz) + 2i\nu k q \exp(qz) \\ (S + 2\nu k^2) \exp(kz) - 2\nu k^2 \exp(qz) \\ -\rho S \left(\frac{S}{k} + 2\nu k\right) \exp(kz) \end{pmatrix} \times \exp(St - ikx) + c.c.; \quad (9)$$

$$q = \sqrt{k^2 + \frac{S}{\nu}}$$

или суперпозицией таких волн с различными значениями волновых чисел  $k$ . Набор соотношений (9) при фиксированном значении  $k$  представляет собой отдельную

моду волнового движения. Аббревиатура „с.с.“ означает „комплексно сопряженные слагаемые“;  $A$  — амплитуда волны на свободной поверхности;  $i$  — мнимая единица. Параметр  $S$  называется комплексной частотой. Он связан с волновым числом и другими параметрами задачи дисперсионным уравнением [6]:

$$(S + 2\nu k^2)^2 + \omega_0^2 = 4\nu^2 k^3 \sqrt{k^2 + \frac{S}{\nu}}, \quad (10)$$

где  $\omega_0$  определено в (2). Физический смысл имеют не все значения комплексной частоты  $S$ , разрешающие дисперсионное уравнение, а только те, для которых выполняется условие

$$\operatorname{Re}((S + 2\nu k^2)^2 + \omega_0^2) > 0.$$

Только в этом случае вихревая часть поля скоростей, которая в (9) описывается слагаемыми, пропорциональными  $\exp(qz)$ , затухает с глубиной.

В нижеследующем изложении будут использованы обозначения:

$$r = \operatorname{Re}(S); \quad \omega = \operatorname{Im}(S). \quad (11)$$

Модуль действительного параметра  $r$  характеризует скорость изменения амплитуды волнового движения со временем. По знаку величина  $r$  меньше нуля и поэтому  $|r|$  является декрементом затухания волнового движения. Действительная величина  $\omega$  имеет смысл циклической частоты волнового движения в вязкой жидкости.

На основе анализа дисперсионного уравнения (10) в работе [13] для величин  $r, \omega$ , определенных в (11), и вспомогательного параметра  $q$  были получены асимптотические разложения по малой вязкости:

$$\begin{aligned} \frac{r}{\omega_0} &= -2\sigma^2 + O(\sigma^3); \quad \frac{\omega}{\omega_0} = 1 + O(\sigma^3); \\ \frac{q}{k} &= \frac{(1+i)}{\sigma\sqrt{2}} - \frac{(1-i)\sigma}{2\sqrt{2}} - i\sigma^2 + O(\sigma^3); \quad (12) \\ \sigma &= k\sqrt{\frac{\nu}{\omega_0}} \ll 1. \end{aligned}$$

С помощью асимптотических выражений (12) результаты расчетов с участием величин  $\xi_1, u_1, v_1, p_1$ , определенных в (9), без труда преобразуются к выражениям, справедливым в приближении малой вязкости. Это существенно уменьшает сложность финальной формы расчетных выражений и упрощает их анализ. Например, соотношения (9) с помощью (12), с сохранением только главных по вязкости членов асимптотических разложений и с последующим переходом к действительному способу представления результата, трансформируются к более практичной форме записи:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ u_1 \\ v_1 \\ p_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t - kx) \\ \omega_0 \cos(\omega_0 t - kx) \exp(kz) \\ -\omega_0 \sin(\omega_0 t - kx) \exp(kz) \\ \rho \frac{\omega_0^2}{k} \cos(\omega_0 t - kx) \exp(kz) \end{pmatrix} \exp(-2\nu k^2 t).$$

Выражения (9) намеренно выписаны полностью, хотя в явном виде дрейфовых слагаемых не содержат. На это имеются две причины. Во-первых, для рассмотрения задачи второго порядка малости по амплитуде волны требуется вычисление правых частей соотношений (7) и (8), которые содержат величины  $\xi_1, u_1, v_1$ . Во-вторых, как будет показано ниже, выражения для величин  $u_1, v_1$  играют важную роль при расчете скорости дрейфового течения.

### 3. Дрейфовая часть решения задачи второго по амплитуде волны порядка малости

Решение задачи (7), (8) второго по амплитуде волны порядка малости, в отличие от задачи (5), (6) первого порядка малости, имеет составляющую, описывающую явный дрейф жидкости вдоль оси  $Ox$ . Чтобы не перегружать изложение, ограничимся установлением вида именно этой части решения. Как будет показано ниже, остальная часть решения в процедуре построения выражения для скорости общего дрейфа не используется.

Примем, что решение исходной задачи (3) в первом по амплитуде волны приближении описывается только одной модой волнового движения — набором соотношений вида (9) с заданным значением волнового числа  $k$ . С помощью (9) правую часть первого уравнения системы (7) можно расписать более подробно

$$z < 0: \quad \partial_t \mathbf{U}_2 + \frac{1}{\rho} \nabla p_2 - \nu \nabla^2 \mathbf{U}_2 = V_x \mathbf{e}_x + V_z \mathbf{e}_z;$$

$$\begin{aligned} V_x = A^2 & \left( -2k^3 \omega v \exp((q + q^*)z) \right. \\ & + \left\{ -\frac{1}{2} ikS(S^* + 2vk^2) \exp((k + q)z) + c.c. \right\} \\ & + \left\{ \frac{1}{2} ikS^*(S + 2vk^2) \exp((k + q^*)z) + c.c. \right\} \\ & \times \exp(2rt) + A^2 \Pi(2\theta) \exp(2rt); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_z = A^2 & \left( -|S + 2vk^2|^2 k \exp(2kz) - 2v^2 k^4 (q + q^*) \right. \\ & \times \exp((q + q^*)z) + \{vk^2(k + q)(S^* + 2vk^2) \\ & \times \exp((k + q)z) + c.c.\} + \{vk^2(k + q^*)(S + 2vk^2) \\ & \times \exp(k + q^*) + c.c.\} \exp(2rt) + A^2 \Pi(2\theta) \exp(2rt); \\ & \theta = \omega t - kx. \end{aligned}$$

Звездочка в верхнем индексе означает комплексное сопряжение. Здесь и далее символ  $\Pi(\Theta)$  используется как общее обозначение для различных сумм, состоящих из слагаемых, пропорциональных  $\cos(\Theta)$  и  $\sin(\Theta)$  с коэффициентами при  $\cos(\Theta)$  и  $\sin(\Theta)$ , зависящими только от

координаты  $z$ . Для столбца величин, каждая из которых является суммой подобного рода, будет употребляться полужирный символ  $\mathbf{\Pi}$ .

Полученные выражения для  $V_x$  и  $V_z$  описывают правую часть первого уравнения системы (7) в явной форме. Это позволяет применить метод неопределенных коэффициентов и найти вспомогательные функции  $u_2^a, v_2^a, p_2^a$ , которые, может, и не удовлетворяют всем граничным условиям (8), но разрешают совместно оба уравнения (7):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_2^a \\ v_2^a \\ p_2^a \end{pmatrix} = A^2 & \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\rho|S+2vk^2|^2}{2} \end{pmatrix} \exp(2kz) \right. \\ & + \begin{pmatrix} \frac{ik^3 v^2 (q^2 - (q^*)^2)}{2r - v(q + q^*)^2} \\ 0 \\ -2\rho v^2 k^4 \end{pmatrix} \exp((q + q^*)z) \\ & + \left. \left\{ \begin{pmatrix} \frac{ikv(k^2 - q^2)(S^* + 2vk^2)}{2(2r - v(k + q)^2)} \\ 0 \\ \rho vk^2(S^* + 2vk^2) \end{pmatrix} \exp((k + q)z) + c.c. \right\} \right) \\ & \times \exp(2rt) + A^2 \mathbf{\Pi}(2\theta) \exp(2rt). \end{aligned} \quad (13)$$

Тогда несложно построить подстановку

$$\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2^a \\ v_2^a \\ p_2^a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_2^b \\ v_2^b \\ p_2^b \end{pmatrix},$$

редуцирующую задачу (7), (8) к задаче с однородными уравнениями и неоднородными граничными условиями

$$\begin{aligned} z < 0: \quad \partial_t u_2^b + \frac{1}{\rho} \partial_x p_2^b - \nu \nabla^2 u_2^b &= 0; \\ \partial_t v_2^b + \frac{1}{\rho} \partial_x p_2^b - \nu \nabla^2 v_2^b &= 0; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\partial_x u_2^b + \partial_z v_2^b = 0; \quad (15)$$

$$\begin{aligned} z = 0: \quad \partial_t \xi_2 - v_2^b &= \xi_1 \partial_z v_1 - u_1 \partial_x \xi_1 + v_2^a; \\ -\rho g \xi_2 + p_2^b - 2\rho v \partial_z v_2^b + \gamma \partial_{xx} \xi_2 &= 2\rho v \xi_1 \partial_{zz} v_1 \\ -\xi_1 \partial_z p_1 - p_2^a + 2\rho v \partial_z v_2^a; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \partial_z u_2^b + \partial_x v_2^b &= -4\partial_z v_1 \partial_x \xi_1 - \xi_1 \partial_z (\partial_x v_1 + \partial_z u_1) \\ -\partial_z u_2^a - \partial_x v_2^a; \end{aligned} \quad (18)$$

$$z \rightarrow -\infty: \quad u_2^b \rightarrow 0; v_2^b \rightarrow 0. \quad (19)$$

Учитывая явный вид выражений (9) для величин  $\xi_1, u_1, v_1, p_1$  и (13) для  $u_2^a, v_2^a, p_2^a$ , даже без подробных вычислений легко установить, что структура правой части каждого из граничных условий (16)–(18), задаваемых на уровне  $z = 0$ , может быть описана формулой  $A^2(F(t) + \Pi(2\theta) \exp(2rt))$ , где  $F(t)$  — некоторая функция времени, своя для каждого из условий (16)–(18).

Это означает, что неизвестные величины, а в частности  $u_2^b \equiv u_2^b(t, x, z)$  и  $p_2^b \equiv p_2^b(t, x, z)$ , следует искать в виде слагаемого, не зависящего от координаты  $x$ , и слагаемого, пропорционального  $\Pi(2\theta) \equiv \Pi(2(\omega t - kx))$ :

$$\begin{aligned} u_2^b &= A^2(w(t, z) + \Pi(2\theta) \exp(2rt)); \\ p_2^b &= A^2(h(t, z) + \Pi(2\theta) \exp(2rt)). \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь  $w(t, z)$  и  $h(t, z)$  — функции, подлежащие определению.

С помощью соотношений (9) несложно вычислить правую часть граничного условия (18). Получающееся выражение весьма громоздко, однако переход к пределу малой вязкости с помощью асимптотических разложений (12) с сохранением только главного по вязкости члена разложения сводит расчеты к довольно простому соотношению

$$\begin{aligned} z = 0: \quad \partial_z u_2^b + \partial_x v_2^b &= 2A^2 k^2 \omega_0 \exp(-4\nu k^2 t) \\ &+ A^2 \Pi(2\theta_0) \exp(-4\nu k^2 t). \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь учтено, что в приближении малой вязкости  $r \approx -2\nu k^2$ ;  $\theta = \omega t - kz \approx \omega_0 t - kz = \theta_0$ .

Подставив соотношения (20) в первое уравнение системы (14), условия (21) и (19), замечая, что  $\partial_x p_2^b \sim \Pi(2\theta_0)$ , несложно отделить не зависящую от параметра  $\theta_0$  составляющую выражений и получить отдельную задачу для определения функции  $w \equiv w(t, z)$

$$z < 0: \quad \frac{\partial w}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0; \quad (22)$$

$$z = 0: \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 2k^2 \omega_0 \exp(-4\nu k^2 t); \quad (23)$$

$$z \rightarrow -\infty: \quad w \rightarrow 0. \quad (24)$$

Согласно (20), величина  $A^2 w \equiv A^2 w(t, z)$  определяет для каждого горизонтального слоя  $z = \text{const}$  общую для всех частиц этого слоя скорость горизонтального дрейфового течения. Это течение представляет собой совершенно новый, ранее не описанный другими исследователями феномен, который далее будет называться добавочным дрейфовым течением.

Добавочное дрейфовое течение принципиально невозможно с точки зрения модели идеальной жидкости, которая лежит в основе классической теории дрейфа Стокса. В модели идеальной жидкости отсутствует балансное соотношение на касательные напряжения, и поэтому условие (23), следующее из (18), оказывается излишним. Оставшиеся соотношения (22) и (24) в пределе  $\nu \rightarrow 0$  однозначно запрещают существование дополнительного дрейфового течения:  $w(t, z) \equiv 0$ .

Чтобы убедиться в неизбежности возникновения добавочного дрейфа, примем, что в начальный момент времени строение течения подчиняется законам идеальной жидкости и добавочное дрейфовое течение при  $t = 0$  отсутствует:

$$w = 0. \quad (25)$$

Решение задачи (22)–(24) с начальным условием (25) имеет вид [14]:

$$\begin{aligned} w(t, z) &= 2k^2 \omega_0 \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \\ &\times \int_0^t \exp\left(-\frac{z^2}{4\nu(t-\eta)}\right) \frac{\exp(-4\nu k^2 \eta)}{\sqrt{t-\eta}} d\eta. \end{aligned} \quad (26)$$

Для вертикальной компоненты поля скоростей, по аналогии с (20) имеем соотношение:

$$v_2^b = A^2(\beta(t, z) + \Pi(2\theta) \exp(2rt)),$$

где  $\beta(t, z)$  — функция, подлежащая определению. Подставив выписанное выражение для  $v_2^b$  и первое из соотношений (20) в (15), несложно убедиться, что  $\partial_z \beta(t, z) \equiv 0$ . Таким образом  $\beta(t, z) \equiv f(t)$  — некоторая функция времени. Чтобы жидкость с течением времени не сдвигалась „как целое“ вдоль вертикальной оси  $Oz$ , следует положить  $f(t) \equiv 0$ . В результате имеем  $v_2^b = A^2 \Pi(2\theta) \exp(2rt)$ .

#### 4. Выражения для компонент поля скоростей с точностью до величин второго порядка малости по амплитуде волны

Выполненные расчеты показывают, что при распространении по горизонтальной поверхности маловязкой несжимаемой бесконечно глубокой жидкости периодической капиллярно-гравитационной волны с волновым числом  $k$  в самой жидкости возникает поле скоростей с компонентами, которые во втором приближении по амплитуде волны имеют вид

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= A\omega_0 \begin{pmatrix} \cos(\theta_0) \\ -\sin(\theta_0) \end{pmatrix} \exp(kz) \exp(-2\nu k^2 t) \\ &+ A^2 \begin{pmatrix} w(t, z) \\ 0 \end{pmatrix} + A^2 \Pi(2\theta_0) \exp(-4\nu k^2 t); \end{aligned} \quad (27)$$

$$\theta_0 = \omega_0 t - kx.$$

Составляющая решения  $u_2^a$ , определенная в (13), не вошла в (27) как величина, имеющая по вязкости более высокий порядок малости, чем выписанные члены.

Сравним (27) с результатом аналогичного расчета компонент поля скоростей, но выполненного на основе уравнений идеальной несжимаемой жидкости [2,15]:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A\omega_0 \begin{pmatrix} \cos(\theta_0) \\ -\sin(\theta_0) \end{pmatrix} \exp(kz) + A^2 \Pi(2\theta_0).$$

Из сравнения этих соотношений с выражениями (27) видно, что переход от модели идеальной несжимаемой жидкости к ньютоновской вязкости сопровождается качественным изменением в структуре поля скоростей. Кроме вполне ожидаемого появления множителей

$\exp(-2\nu k^2 t)$  и  $\exp(-4\nu k^2 t)$ , описывающих экспоненциальное уменьшение скорости в результате вязкой диссипации, появляется добавочное дрейфовое слагаемое  $A^2 w(t, z)$ , качественно изменяющее строение выражения для горизонтальной скорости во втором приближении по амплитуде волны.

## 5. Выражение для скорости горизонтального дрейфа жидкой частицы, учитывающее вязкость

Выражения (27) описывают поле скоростей течения жидкости в эйлеровом представлении [7]. Чтобы вычислить скорость отдельной жидкой частицы, необходимо перейти от описания поля скоростей в переменных Эйлера

$$\mathbf{U} \equiv \mathbf{U}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{U}(t, x, z) = u(t, x, z)\mathbf{e}_x + v(t, x, z)\mathbf{e}_z$$

к описанию в форме Лагранжа:

$$\mathbf{U}_L \equiv \mathbf{U}_L(t, \mathbf{r}) = \mathbf{U}_L(t, x, z) = u_L(t, x, z)\mathbf{e}_x + v_L(t, x, z)\mathbf{e}_z.$$

В обоих случаях аргументом рассматриваемых величин является радиус-вектор  $\mathbf{r}$  точки с координатами  $x, z$ . В эйлеровом представлении  $\mathbf{r}$  определяет положение неподвижной точки пространства, через которую, сменяя друг друга, с течением времени  $t$  со скоростью  $\mathbf{U}(t, \mathbf{r})$  переносятся различные жидкие частицы. В представлении Лагранжа  $\mathbf{r}$  фиксирует положение отдельной жидкой частицы в момент времени  $t = 0$ , а вектор  $\mathbf{U}_L(t, \mathbf{r})$  характеризует изменение скорости именно этой жидкой частицы с течением времени [7].

Авторами монографии [2] показано, что в задаче о распространении периодической капиллярно-гравитационной волны малой амплитуды по горизонтальной поверхности жидкости во втором приближении по амплитуде волнового движения вектор скорости жидкой частицы в лагранжевом представлении может быть выражен через компоненты вектора скорости в эйлеровом описании по формуле (см. [2], глава 2, § 13):

$$\mathbf{U}_L(t, \mathbf{r}) = \mathbf{U}(t, \mathbf{r}) + \left( \left( \int_0^t \mathbf{U}(\eta, \mathbf{r}) d\eta \right) \nabla \right) \mathbf{U}(t, \mathbf{r}).$$

Для горизонтальной компоненты скорости имеем:

$$u_L(t, x, z) = u(t, x, z) + \left\{ \left( \int_0^t u(\eta, x, z) d\eta \right) \partial_x u(t, x, z) + \left( \int_0^t v(\eta, x, z) d\eta \right) \partial_z u(t, x, z) \right\}. \quad (28)$$

Подставив соотношения (27) в (28), сохраняя слагаемые не выше второго порядка малости по амплитуде волнового движения и только главные члены разложения по вязкости, несложно найти выражение для горизонтальной скорости отдельной жидкой частицы, которая при  $t = 0$  находилась в точке с координатами  $x$  и  $z$ :

$$u_L = A\omega_0 \cos(\theta_0) \exp(-2\nu k^2 t) \exp(kz) + [A^2 \Pi(2\theta_0) \exp(-4\nu k^2 t) + A^2 w(t, z)] + \{A^2 \Pi(\omega_0 t) \exp(-2\nu k^2 t) + A^2 k \omega_0 \exp(2kz) \exp(-4\nu k^2 t)\}. \quad (29)$$

В первой строчке правой части формулы (29) записано выражение, в которое преобразуется первое слагаемое  $u(t, x, z)$  правой части (28). Часть выражения (28), взятая в фигурные скобки, преобразуется в сумму двух слагаемых, которые в (29) тоже заключены в фигурные скобки.

Слагаемые в правой части (29), имеющие периодический по времени  $t$  множитель (пропорциональные  $\cos(\theta_0)$ ,  $\Pi(2\theta_0)$  и  $\Pi(\omega_0 t)$ ), отвечают за колебания жидкой частицы относительно некоторого среднего положения, а остальные  $A^2 w(t, z) + A^2 k \omega_0 \exp(2kz) \exp(-4\nu k^2 t)$  характеризуют горизонтальную скорость дрейфа этого среднего положения.

Назовем часть дрейфового течения, обладающую скоростью

$$u_S(t, z) = A^2 k \omega_0 \exp(2kz) \exp(-4\nu k^2 t), \quad (30)$$

модифицированным дрейфом Стокса. Модифицированный дрейф Стокса отличается от классического экспоненциальным множителем  $\exp(-4\nu k^2 t)$ , описывающим уменьшение горизонтальной скорости дрейфа с течением времени за счет вязкой диссипации.

Таким образом, общий горизонтальный дрейф вязкой жидкости, вызванный распространением по ее поверхности периодической волны, происходит со скоростью

$$u_D = u_S(t, z) + A^2 w(t, z) \quad (31)$$

и складывается из модифицированного дрейфа Стокса и добавочного дрейфового течения, горизонтальная скорость которого описывается слагаемым  $A^2 w(t, z)$  ( $w(t, z)$ , рассчитывается по формуле (26)). Причины появления добавочного течения обсуждаются ниже.

Интересно отметить, что выражение (30) для скорости модифицированного дрейфа Стокса  $u_S(t, z)$ , имеющие второй по амплитуде волны порядок малости, возникает исключительно в результате манипуляций с решением задачи первого по амплитуде волны порядка малости, которое само по себе дрейфовой компоненты не содержит. Это связано с тем, что во втором приближении по амплитуде волны справедливы асимптотиче-

ские равенства:

$$\left( \int_0^t u(\eta, x, z) d\eta \right) \partial_x u(t, x, z) \approx \left( \int_0^t u_1(\eta, x, z) d\eta \right) \partial_x u_1(t, x, z);$$

$$\left( \int_0^t v(\eta, x, z) d\eta \right) \partial_z u(t, x, z) \approx \left( \int_0^t v_1(\eta, x, z) d\eta \right) \partial_z u_1(t, x, z).$$

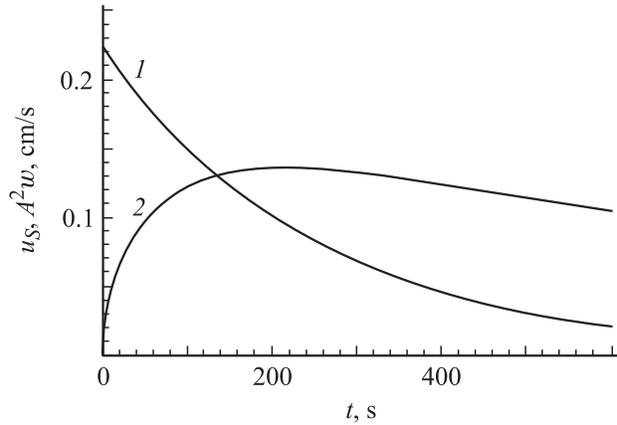
Именно поэтому часть выражения (28), заключенная в фигурные скобки, в расчетах, выполняемых во втором приближении по амплитуде волны, выражается только через компоненты поля скоростей первого по амплитуде волны порядка малости. После подстановки выражений для соответствующих компонент скорости вторая строчка (28) преобразуется в сумму двух слагаемых (см. выражение в фигурных скобках в правой части (29)). Одно из них характеризует вклад в периодическое движение жидкой частицы, а другое — вклад в скорость ее дрейфового переноса, который в настоящей работе назван модифицированным дрейфом Стокса.

Горизонтальная компонента скорости  $u_2$ , найденная в результате решения задачи второго по амплитуде волны порядка малости, входит только в выражение для полной скорости  $u \approx u_1 + u_2$ , являющейся первым слагаемым в правой части (28). При переходе от (28) к (29)  $u_2$  просто заменяется на свое аналитическое выражение, которое в правой части (29) заключено в квадратные скобки. Не зависящая от координаты  $x$  часть этого выражения  $A^2w(t, z)$  вносит вклад в скорость горизонтального дрейфового движения, названного добавочным дрейфом. Явные выражения для периодических по координате  $x$  компонент решения задачи второго по амплитуде волны порядка малости в вычислении скорости дрейфового течения не участвуют.

Для вычисления  $z$ -компоненты дрейфовой скорости несложно провести аналогичные вычисления и убедиться, что в вертикальном направлении дрейф жидких частиц не происходит.

## 6. Механизм возникновения добавочного дрейфового течения

Для выяснения причин появления добавочного дрейфового течения рассмотрим пример расчета совместной эволюции горизонтальной скорости модифицированного дрейфа Стокса  $u_S(t, z)$  и скорости добавочного дрейфа  $A^2w(t, z)$  на уровне  $z = 0$ .



Зависимости от времени для двух составляющих скорости горизонтального дрейфового движения частиц жидкости на поверхности воды вдоль направления распространения периодической капиллярно-гравитационной волны длиной  $2\pi/k = \lambda = 20$  см и амплитудой  $A = 2$  мм: 1 — скорость модифицированного дрейфа Стокса  $u_S(t, 0)$  (формула (30)); 2 — скорость добавочного дрейфа  $A^2w(t, 0)$  (формула (26)).

На рисунке построены зависимости изменения со временем значений скоростей  $u_S(t, 0)$  и  $A^2w(t, 0)$  дрейфовых течений, возбужденных периодической капиллярно-гравитационной волной длиной 20 см и амплитудой 2 мм, распространяющейся по поверхности воды ( $\rho = 1 \text{ г/см}^3$ ,  $\gamma = 72 \cdot 10^{-4} \text{ Н/см}$ ,  $\nu = 0.01 \text{ см}^2/\text{с}$ ).

Из рисунка видно, что на начальном этапе движения главной частью полного горизонтального дрейфа является модифицированный дрейф Стокса (кривая 1). Дрейфовое движение происходит почти по законам идеальной жидкости, только модуль скорости дрейфа благодаря вязкой диссипации слабо уменьшается с течением времени.

В то же время благодаря компонентам вязких сил, обусловленных наличием дрейфовой части течения, в картине поля скоростей начинают происходить изменения иного рода. Возникающие в жидкости вязкие напряжения, как и поле скоростей, имеют периодические по горизонтальной координате и непериодические по ней составляющие. Появление непериодической горизонтальной составляющей вязких напряжений связано непосредственно с дрейфовой компонентой течения. Ввиду того, что скорость горизонтального дрейфа  $u_S(t, z)$ , согласно (30), изменяется с глубиной, и выполняется неравенство  $\partial_z u_S(t, z) \neq 0$ , по свойству ньютоновской жидкости между соседними горизонтальными слоями возникают горизонтальные вязкие сдвиговые напряжения  $\rho\nu\partial_z u_S(t, z)$  [16]. Под действием этих сдвиговых напряжений жидкость вовлекается в добавочное горизонтальное дрейфовое движение, скорость которого и описывается функцией  $A^2w(t, z)$  (кривая 2).

При выбранном начальном условии (25) скорость добавочного дрейфа со временем монотонно увеличивается от нуля в момент времени  $t = 0$  до скорости модифицированного дрейфа Стокса. При значениях

физических параметров, использованных для построения рисунка, выравнивание скоростей обоих дрейфов происходит примерно через  $2\text{ min}$  с момента начала движения. В течение этого времени модифицированный дрейф Стокса посредством горизонтальных вязких напряжений оказывает на жидкость увлекающее действие, распространяющееся от поверхности к глубинным слоям. После выравнивания значений дрейфовых скоростей скорость модифицированного дрейфа Стокса продолжает экспоненциально уменьшаться и оказывается меньше, чем скорость разогнавшегося добавочного дрейфа. Модифицированный дрейф Стокса начинает оказывать тормозящее действие на добавочный дрейф благодаря тем же вязким напряжениям, но действующим в противоположном направлении. На торможение добавочного дрейфа затрачивается некоторое время (на рисунке это время около минуты), после чего его скорость достигает максимума, и затем начинает уменьшаться вслед за уменьшающейся скоростью модифицированного дрейфа Стокса.

Из приведенного примера видно, что общий дрейф, вызванный распространением капиллярно-гравитационной волны, гораздо интенсивнее, чем модифицированный дрейф Стокса. Эксперименты, описание которых можно найти в [3,4], свидетельствуют о том, что результаты измерений скорости общего дрейфа, вызванного распространением по поверхности жидкости периодических волн, в ряде случаев на 30–40% отличаются от скорости, рассчитанной по формуле Стокса. Причем простое включение в расчет экспоненциального множителя, учитывающего вязкую диссипацию, ситуацию не спасает. Феномен добавочного дрейфа, порожденного горизонтальными вязкими напряжениями, представляется вполне адекватным объяснением наблюдаемого несоответствия.

Конечно, выражения (26) и (30), отвечающие за отдельные составляющие дрейфового течения, получены в приближении малой вязкости. Но при изложении процедуры построения этих выражений в разд. 2–5 выделены решающие моменты решения и результаты промежуточных вычислений, справедливые при любом значении вязкости. Руководствуясь материалами разд. 2–5, но не переходя к приближению малой вязкости, заинтересованный читатель может получить соотношения для дрейфовых слагаемых, верные при произвольном значении вязкости. При этом общая структура выражений (26) и (30) сохранится, однако множителя при экспонентах будут сложным образом выражаться через действительную и мнимую части комплексной частоты  $S$ , которую в свою очередь придется рассчитывать из дисперсионного уравнения (10) либо численно, либо по весьма громоздким аналитическим формулам. Выражения для коэффициентов при  $\eta$ ,  $z^2$  и  $t$  в показателях экспонент формул (26), (30) также усложнятся. Помимо этого в выражении (31) для общего дрейфа появится еще одно слагаемое, возникающее, если учесть не зависящую от координаты  $x$  часть выражения для  $u_2^c$  (см. (13)).

В разд. 4 при построении соотношений для поля скоростей (27) эта добавка была опущена как величина, имеющая по вязкости более высокий порядок, чем удержанные слагаемые. Таким образом, в общем случае  $A^2w(t, z)$  является только частью скорости добавочного дрейфового течения, которая при малой вязкости становится главной ее составляющей.

Отдельно следует отметить, что в проведенном анализе использовано решение задачи (22)–(24) для функции  $w(t, z)$ , отвечающее нулевому начальному условию (25), при котором четко устанавливается неизбежность появления добавочного дрейфа. При необходимости несложно принять во внимание решение задачи (22)–(24) при произвольном начальном условии. Соответствующее общее решение приведено, например, в справочнике [14].

## Заключение

Известная классическая модель Стокса, описывающая дрейф вещества, вызванный распространением по свободной поверхности жидкости нелинейной периодической волны, несовершенна. Во-первых, в ней не учитывается диссипация энергии течения, происходящая в реальной движущейся жидкости; во-вторых, в модели Стокса не принимается во внимание влияния на дрейф горизонтальных вязких напряжений, неизбежно возникающих в реальном дрейфовом течении, скорость которого уменьшается с глубиной.

Построение в настоящей работе обобщение классической модели дрейфа Стокса показало, что дрейф в бесконечно глубокой несжимаемой вязкой жидкости, вызванный распространением по ее поверхности периодической капиллярно-гравитационной волны, имеет две составляющие. Одну из них представляется целесообразным назвать модифицированным дрейфом Стокса, поскольку выражение для скорости этой компоненты дрейфового потока отличается от формулы Стокса только множителем, обеспечивающим обусловленное вязкой диссипацией экспоненциальное уменьшение интенсивности течения со временем. Кроме модифицированного дрейфа Стокса существенный вклад в общее дрейфовое движение вносит добавочное дрейфовое течение, в которое жидкость вовлекается горизонтальными вязкими напряжениями, действующими в направлении распространения модифицированного дрейфа Стокса. Феномен добавочного дрейфа обнаруживается исключительно в модели вязкой жидкости и невозможен с точки зрения законов движения идеальной жидкости.

Разработанная процедура расчета дрейфа особенно актуальна для приложений, имеющих дело с явлениями на свободной поверхности жидкости, развивающимися при участии вязких напряжений. В частности, предложенный подход позволяет для самых разнообразных субстанций (поверхностного заряда, поверхностно-активного вещества и т.п.), распределенных по свободной поверхности

жидкости, аналитически рассчитывать скорость их поверхностного дрейфа, вызванного волновым возмущением поверхности.

Работа выполнена в рамках тематического плана университета при поддержке гранта губернатора Ярославской области, гранта Росообразования № 2.1.1/3776 и государственного контракта № 02.552.11.7028; Федеральной целевой программы „Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007–2012 годы“.

## Список литературы

- [1] Ламб Г. Гидродинамика. М.; Л.: ОГИЗ, Гос. изд-во технико-теоретической лит., 1947. 928 с.
- [2] Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане. Ч. 1. М.: Мир, 1981. 480 с.
- [3] Longuet-Higgins M.S. // Royal. Soc. London. Trans. Ser. A. 1953. Vol. 245. N 903. P. 535–581.
- [4] Longuet-Higgins M.S. // J. Fluid Mech. 1986. Vol. 173. P. 683–707.
- [5] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учеб. пособие. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 736 с.
- [6] Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматлит, 1959. 700 с.
- [7] Гольдштейн Р.В., Городцов В.А. Механика сплошных сред. Ч. 1. М.: Наука. Физматлит, 2000. 256 с.
- [8] Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. II. Термодинамика и молекулярная физика. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1975. 552 с.
- [9] Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 11. С. 29–37.
- [10] Белоножко Д.Ф., Ширяева С.О., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 2. С. 37–44.
- [11] Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 2. С. 184–192.
- [12] Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 4. С. 28–37.
- [13] Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 3. С. 5–13.
- [14] Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001. 576 с.
- [15] Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 6. С. 102–109.
- [16] Фабер Т.Е. Гидроаэродинамика. М.: Постмаркет, 2001. 560 с.