

# Аномальное гидродинамическое сопротивление, обусловленное дифференциальной диффузией

© Л.Х. Ингель

Научно-производственное объединение „Тайфун“,  
Обнинск, Калужская обл., Россия  
e-mail: ingeli@obninsk.ru

(Поступило в Редакцию 20 мая 2009 г.)

Рассматриваются особенности отклика стратифицированной двухкомпонентной жидкости (например, соленой морской воды) на действие локализованной вертикальной силы. При существенном различии коэффициентов переноса для двух субстанций (тепла и соли) возможно возникновение специфических возмущений плавучести, влияющих на эффективное гидродинамическое сопротивление среды.

## Введение

Гидротермодинамике двухкомпонентных жидкостей (бинарных смесей, например, соленой морской воды) присущ ряд нетривиальных особенностей (см., например, [1–7]). Наиболее известна конвективная неустойчивость, обусловленная двойной (дифференциальной) диффузией — различием значений коэффициентов переноса для разных субстанций. Сходный тип неустойчивости может быть связан с различием краевых условий для разных субстанций [5,7]. В настоящей работе обращается внимание еще на один эффект, ранее, видимо, не обсуждавшийся — возможность существенного влияния двойной диффузии на гидродинамическое сопротивление, даже в однородной по плотности среде.

Физическая идея заключается в следующем. Пусть двухкомпонентная жидкость (для определенности будем говорить о соленой морской воде) вертикально стратифицирована в поле силы тяжести по обеим субстанциям — температуре и солености. Стратификация плотности при этом может отсутствовать или быть статически устойчивой. Приложенная к такой жидкости локализованная вертикальная сила (источник количества движения) приводит к возникновению вертикального течения и, следовательно, возмущений обеих упомянутых субстанций вблизи области приложения силы. Из-за различия коэффициентов обмена скорость релаксации отклонений разных субстанций (температуры и солености) будет различной. Это влияет на соотношение вкладов упомянутых субстанций в возмущение плотности среды, т. е. на возникающие возмущения плавучести. Последние, в свою очередь, влияют на вертикальное движение среды относительно области приложения упомянутой силы. Это означает изменение эффективного гидродинамического сопротивления среды.

Проиллюстрируем это на конкретном примере, когда благодаря высокой степени симметрии задачи удается получить точное аналитическое решение системы уравнений гидротермодинамики и переноса примеси (соли) в приближении Буссинеска.

## Постановка задачи

Рассматривается эффект стационарного однородного по вертикали источника вертикального импульса в безграничной среде, стратифицированной как по температуре, так и по концентрации примеси (соли). В других терминах можно говорить о направленной вверх однородно распределенной силе, приложенной вдоль вертикальной оси  $z$ . Фоновая стратификация плотности среды предполагается нейтральной или устойчивой, так что ситуации с конвективной неустойчивостью фонового состояния не рассматриваются. Для описания возмущений, вызываемых действием такого вытянутого по вертикали источника, будем пользоваться цилиндрической системой координат с направленной вертикально вверх осью  $z$ , совпадающей с источником.

Ищем стационарное решение, которое, как и приложенная к жидкости сила, не зависит от вертикальной координаты  $z$ . В рассматриваемом приближении возникающие вблизи источника стационарные возмущения зависят только от радиальной координаты  $r$ . Тогда, как следует из уравнения неразрывности (пользуемся приближением Буссинеска [1,2]), горизонтальные движения отсутствуют. Предполагаем сначала, что действующая на жидкость направленная вверх сила сосредоточена и однородно распределена непосредственно на оси  $z$ . Тогда в рассматриваемом приближении система уравнений гидродинамики, переноса тепла и примеси имеет вид [1,2]:

$$v \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) + g(\alpha\theta - \beta s) = -P \frac{\delta(r)}{2\pi r}, \quad (1)$$

$$\kappa \left( \frac{d^2 \theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} \right) - \gamma_T w = 0, \quad (2)$$

$$\chi \left( \frac{d^2 s}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{ds}{dr} \right) - \gamma_s w = 0. \quad (3)$$

Здесь  $w$  — вертикальная составляющая скорости;  $\gamma_T$  и  $\gamma_s$  — фоновые вертикальные градиенты температуры и концентрации примеси (температурная или соленостная стратификация по отдельности могут быть

и неустойчивыми, т.е. возможны ситуации с  $\gamma_T < 0$  или  $\gamma_s > 0$ , но плотностная стратификация при этом предполагается нейтральной или устойчивой; в частности, предполагается устойчивость фонового состояния по отношению к эффектам двойной диффузии [1,2];  $\theta$  и  $s$  — возмущения температуры и концентрации примеси;  $\nu, \kappa$  и  $\chi$  — соответствующие коэффициенты обмена;  $\alpha$  — термический коэффициент расширения среды,  $\beta$  — соответствующий коэффициент для примеси (в океанологии его называют коэффициентом соленостного сжатия);  $g$  — ускорение свободного падения;  $\delta$  — символ дельта-функции Дирака. Постоянная  $P$  ( $m^3 s^{-2}$ ) представляет собой действующую на среду силу (на единицу длины вдоль вертикальной оси  $z$ ), отнесенную к средней плотности среды (т.е. нормированную на плотность силу, приходящуюся на единицу длины источника импульса). Коэффициенты обмена предполагаются постоянными.

Подчеркнем, что полная система уравнений гидротермодинамики и переноса примеси свелась к линейной системе в обыкновенных производных (1)–(3) только благодаря симметрии задачи, без каких-либо предположений о малости амплитуд возмущений (но следует оговориться, что от амплитуды, вероятно, зависит устойчивость найденного ниже решения).

Вдали от источника (оси  $z$ ) все возмущения, очевидно, должны затухать. При  $r \rightarrow 0$  существует горизонтальный поток количества движения, определяемый источником в уравнении (1) (т.е. приложенной силой):

$$2\pi r \nu \frac{dw}{dr} = -P \quad \text{при } r \rightarrow 0, \quad (4)$$

откуда видно, что  $w$  логарифмически расходится вблизи оси. Горизонтальные потоки тепла и примеси при  $r = 0$ , очевидно, должны обращаться в нуль.

## Решение

Уравнение (1) связывает вертикальную скорость  $w$  с безразмерной плавучестью  $b \equiv \alpha\theta - \beta s$ . Другое уравнение, связывающее эти величины, можно получить, если взять линейную комбинацию уравнений (2) и (3) с коэффициентами  $\alpha/\kappa$  и  $-\beta/\chi$  соответственно:

$$\frac{d^2 b}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{db}{dr} - \frac{N^2}{g\kappa} w = 0. \quad (5)$$

Здесь  $N^2 = N_T^2 + N_s^2/\tau$ ,  $\tau = \chi/\kappa$ ;  $N_T^2 = \alpha g \gamma_T$ ,  $N_s^2 = -\beta g \gamma_s$  — квадраты „термической“ и „соленостной“ частот плавучести (Брента–Вяйсяля). Умножив уравнение (1) на  $N/g\sqrt{\kappa\nu}$ , а (5) — на мнимую единицу и сложив эти уравнения, сводим систему к одному комплексному уравнению относительно переменной  $\eta = \frac{N}{g}\sqrt{\frac{\nu}{\kappa}}w + ib$ :

$$\frac{d^2 \eta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\eta}{dr} - i \frac{\eta}{L^2} = -\frac{P}{gL^2} \frac{\delta(r)}{2\pi r} = -\frac{\sigma}{L^2} \frac{\delta(r)}{2\pi r}, \quad (6)$$

где масштаб длины  $L = (\nu\kappa/N^2)^{1/4}$ .

Решение уравнения (6) может быть выражено через цилиндрические функции. Общее решение однородного уравнения

$$\eta = C_1 H_0^{(1)}\left(\frac{r e^{\frac{3}{4}\pi i}}{L}\right) + C_2 H_0^{(2)}\left(\frac{r e^{\frac{3}{4}\pi i}}{L}\right), \quad (7)$$

где  $H$  — символ функции Ханкеля [8],  $C_1$  и  $C_2$  — постоянные интегрирования. Постоянную  $C_2$  следует выбрать равной нулю из условия затухания возмущений при  $r \rightarrow \infty$ . С учетом (4) нетрудно получить

$$C_1 = \frac{iP}{4gL^2} = \frac{i\sigma N}{4\sqrt{\kappa\nu}}. \quad (8)$$

Решение удобно выразить через функции Кельвина [8]:

$$\eta = \frac{\sigma N}{2\pi\sqrt{\kappa\nu}} \left( \text{ker} \frac{r}{L} + i \text{kei} \frac{r}{L} \right), \quad (9)$$

откуда

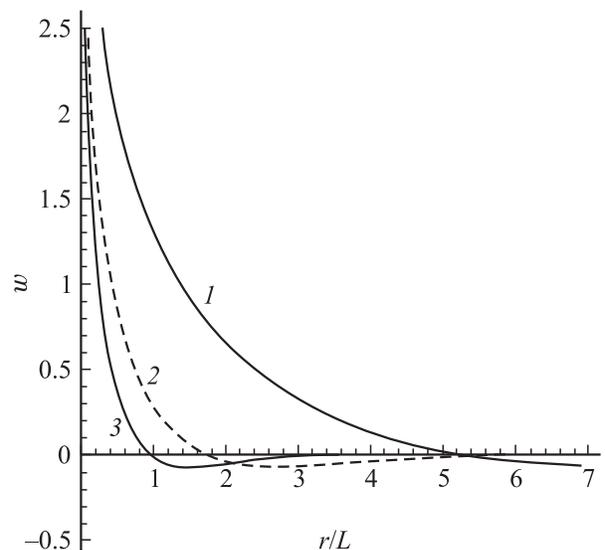
$$w = \frac{P}{2\pi\nu} \text{ker} \frac{r}{L}, \quad b \equiv \alpha\theta - \beta s = \frac{\sigma}{2\pi L^2} \text{kei} \frac{r}{L}. \quad (10)$$

Возмущения температуры и солености, как нетрудно проверить, выражаются следующим образом:

$$\theta = \frac{\gamma_T P}{2\pi N \sqrt{\kappa\nu}} \text{kei} \frac{r}{L}, \quad s = \frac{\gamma_s P}{2\pi N \tau \sqrt{\kappa\nu}} \text{kei} \frac{r}{L}. \quad (11)$$

## Обсуждение

На рисунке представлены нормированные радиальные зависимости вертикальной скорости для различных условий стратификации среды при одинаковой заданной силе. Вдоль источника вертикального импульса формируется восходящая струя с характерной скоростью  $P/2\pi\nu$



Радиальные зависимости вертикальной скорости (нормирована на  $P/2\pi\nu$ ) для различных условий стратификации среды.

(на периферии струи имеет место компенсирующее оседание). Нетривиальна зависимость характерной ширины этой струи  $L$  от стратификации субстанции. Кривая 1 соответствует однокомпонентной среде, устойчиво стратифицированной по температуре:  $N_s^2 = 0$ ,  $N_T^2 = \Omega^2 > 0$ , где  $\Omega$  — положительная константа соответствует размерности. Кривая 2 относится к случаю нейтрально стратифицированной по плотности среды, в которой устойчивая стратификация соли в точности компенсирует неустойчивую температурную стратификацию:  $N_s^2 = -N_T^2 = \Omega^2 > 0$ . Радиус  $r$  на рисунке нормирован на значение  $L$  для этого случая (коэффициент диффузии соли принимается в 100 раз меньшим коэффициента температуропроводности [1]:  $\tau = 10^{-2}$ ). Кривая 3 также соответствует случаю однородной по плотности среды, но значения  $\gamma_T$  и  $\gamma_s$  приняты в 10 раз большими, чем в предыдущем случае.

При переходе от устойчиво стратифицированной среды к однородной, на первый взгляд, можно было ожидать, что последняя должна легче вовлекаться в вертикальное движение. Но сравнение кривых 1 и 2 показывает, что в данном случае дело обстоит наоборот. Нейтрально стратифицированная по плотности среда оказывает большее сопротивление вертикальной силе и меньше вовлекается в вертикальное движение. В этом проявляется эффект двойной (дифференциальной) диффузии, о котором идет речь. Температурные возмущения, вызываемые вертикальными движениями среды, относительно быстро релаксируют, в то время как долгоживущие возмущения солёности препятствуют вертикальным движениям — это видно из сравнения кривых 2, 3 с 1. При неустойчивости стратификации солёности, как нетрудно видеть, возможен обратный эффект — аномально низкое гидродинамическое сопротивление (заданный источник количества движения может сильно влиять на вертикальное течение).

## Заключение

Полученное решение является специальным частным случаем напорной струи. Обычно рассматриваются напорные струи, генерируемые локальными источниками количества движения [9]. В данном случае источник вытянут по вертикали. Такая симметрия задачи позволила получить точное аналитическое решение без ограничений на амплитуду источника. Качественные свойства такой струи в двухкомпонентной среде оказались нетривиальными. Например, при одной и той же приложенной силе и стратификации плотности интенсивность струи может быть существенно различной в зависимости от относительного вклада каждой из гидродинамических компонент в плотностную стратификацию. Поскольку одна и та же сила может индуцировать в среде движения с разными амплитудами, то одна и та же скорость движения сквозь среду может встречать разное сопротивление. Иными словами речь идет о возможности существенных вариаций гидродинамического сопротивления среды при одной и той же стратификации плотности.

Выше предполагалось, что источник количества движения (направленная вертикально вверх сила) сосредоточен на оси струи. В связи с сингулярным характером источника полученное для вертикальной скорости решение логарифмически расходится вблизи оси  $r = 0$ . Это решение нетрудно регуляризовать, рассмотрев распределенный вблизи вертикальной оси источник количества движения. Но если поперечные (горизонтальные) размеры этого источника много меньше эффективного радиуса возникающей вертикальной струи  $L$ , то такое уточнение решения сказывается лишь в относительно малой приосевой области.

## Список литературы

- [1] Тернер Дж. Эффекты плавучести в жидкостях. М.: Мир, 1977. (Termer J.S. Bouyancy effects in fluids. Cambridge: University Press, 1973).
- [2] Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 372 с.
- [3] Ханперт Г., Тернер Дж. // Современная гидродинамика. Успехи и проблемы. М.: Мир, 1997. С. 413–453.
- [4] Ингель Л.Х. // УФН. 2002. Т. 172. № 6. С. 691–699.
- [5] Ингель Л.Х. // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 2. С. 43–47.
- [6] Калашник М.В., Ингель Л.Х. // ЖЭТФ. 2006. Т. 130. № 1. С. 161–170.
- [7] Ингель Л.Х. // Докл. РАН. 2006. Т. 408. № 1. С. 92–95.
- [8] Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с. (Abramovitz M., Stegun I.A. Handbook of Mathematical Functions. Washington: National Bureau of Standards, 1978).
- [9] Скопер Р. Аэродинамика окружающей среды. М.: Мир, 1980. 549 с. (Scorer R.S. Environmental Aerodinamics. NY: Ellis Horwood Ltd, 1978).