Журнал технической физики, 2010, том 80, вып. 2

01;03

О капиллярной устойчивости цилиндрической струи диэлектрической жидкости в продольном электростатическом поле

© С.О. Ширяева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: shir@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 2 марта 2009 г. В окончательной редакции 28 мая 2009 г.)

Выведено и проанализировано дисперсионное уравнение для капиллярных волн с произвольной симметрией (с произвольными азимутальными числами) на поверхности цилиндрической струи идеальной несжимаемой диэлектрической жидкости в коллинеарном оси симметрии струи электростатическом поле. Показано, что капиллярную неустойчивость в такой системе могут претерпевать только длинные осесимметричные волны. Ширина диапазона волновых чисел неустойчивых волн, начинающегося с нулевого значения, зависит от диэлектрической проницаемости жидкости и внешней среды и квадрата напряженности электростатического поля. С ростом напряженности поля ширина диапазона волновых чисел неустойчивых волн быстро уменьшается, как и величина инкремента капиллярной неустойчивости, а также значение волнового числа волны, обладающей максимальным инкрементом.

Введение

Феномен капиллярного распада струй жидкости находится в поле внимания исследователей с середины XIX в. и при различных усложняющих проблему внешних условиях изучен достаточно подробно в связи с многочисленными приложениями (см., например, [1–6] и указанную там литературу). Из общефизических соображений известно, что любая изолированная система стремится занять положение с минимальной потенциальной энергией. Поэтому фиксированный объем жидкости, ограниченный свободной поверхностью с формой, отличной от сферической и подверженной действию сил поверхностного натяжения, в отсутствие внешних силовых полей будет стремиться принять сферическую форму, обладающую минимальной площадью свободной поверхности, обеспечивающую минимальность потенциальной энергии капиллярных сил. Сказанное относится и к цилиндрической струе жидкости, которая будет неустойчивой по отношению к капиллярному (т. е. реализующемуся под действием капиллярных сил) разбиению на капли.

Первое строгое аналитическое исследование устойчивости цилиндрической струи идеальной несжимаемой жидкости по отношению к поверхностным капиллярным цилиндрическим осесимметричным волнам бесконечно малой (тепловой [7]) амплитуды выполнено в конце XIX в. Рэлеем [1,2]. Рассматривая амплитуды цилиндрических капиллярных осесимметричных волн в качестве нормальных координат колебательных системы с бесконечно большим количеством степеней свободы, он составил функцию Лагранжа колебательной системы и выписал систему независимых уравнений Лагранжа для различных волновых чисел. Анализ полученной системы уравнений Лагранжа позволил исследовать устойчивость струи по отношению к капиллярным волнам различной длины. В частности, Рэлей показал, что цилиндрическая струя неустойчива по отношению к длинным осесимметричным капиллярным волнам с волновыми числами, удовлетворяющими соотношению: $kR < 1$, где R — радиус струи. Более короткие волны могут беспрепятственно распространяться по струе. Неосесимметричные волны (т. е. волны с азимутальными числами, отличными от нуля) на разряженной поверхности струи всегда устойчивы.

Появление на поверхности электропроводной струи электрического заряда приводит к проявлению неустойчивости и неосесимметричных волн, а также к некоторому расширению спектра неустойчивых осесимметричных волн в область более коротких длин волн [5]. Если незаряженную струю диэлектрической жидкости поместить в коллинеарное ей внешнее электрическое поле, то, как показано в [8–10], оно увеличит устойчивость осесимметричных капиллярных волн на поверхности струи за счет смещения правой границы области устойчивости в сторону более длинных волн. Это вывод был подтвержден в работах [11–13], выполненных для вязкой жидкости с учетом эффекта релаксации электрического заряда, проведенного, однако, не без погрешностей [14]. Феномен стабилизации осесимметричных капиллярных волн продольным электрическим полем представляет значительный интерес в связи с попытками физической трактовки многочисленных режимов электродиспергирования жидкости, наблюдаемых экспериментально [5]. Тем не менее обсуждаемый феномен исследован не достаточно полно. В классической ситуации осесимметричных волн ранее выполненные исследования [8–13] не дают исчерпывающей физической картины его реализации. Исследование влияния продольного электрического поля на устойчивость неосесимметричных волн на поверхности струи, возбуждение которых приводит к проявлению изгибной неустойчивости [5], в реальности только начинается.

В настоящей работе будет исследована устойчивость поверхностных волн с произвольной симметрией во внешнем электростатическом поле, коллинеарном оси симметрии невозмущенной цилиндрической струи, при различных соотношениях диэлектрических проницаемостей жидкости и окружающей среды.

1. Постановка задачи

Пусть имеется бесконечная, движущаяся параллельно однородному электростатическому полю $\mathbf{E}_0$ с постоянной скоростью $\mathbf{U}_0$ (т.е. $\mathbf{U}_0 \parallel \mathbf{E}_0$) цилиндрическая струя идеальной несжимаемой диэлектрической жидкости с массовой плотностью ρ, диэлектрической проницаемостью ε_{in} и коэффициентом поверхностного натяжения γ, имеющая радиус R. Диэлектрическая проницаемость внешней среды ε_{ex}.

Для упрощения задачи перейдем в инерциальную систему координат, движущуюся вместе со струей с такой же скоростью $\mathbf{U}_0$. В такой системе отсчета поле скоростей течения жидкости в струе $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ полностью определяется возможными (имеющими, например, тепловую природу) капиллярными волнами на ее поверхности и в безразмерных переменных $\rho = \gamma = R = 1$, в которых будет проведено все рассмотрение, является параметром такого же порядка малости, что и амплитуда волн. Движение жидкости будем принимать потенциальным, т.е. $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \equiv \boldsymbol{\nabla}\psi(\mathbf{r}, t)$, где $\psi(\mathbf{r}, t)$ — потенциал поля скоростей волнового движения жидкости. Зададимся целью исследовать критические условия реализации неустойчивости капиллярных волн на поверхности такой струи.

Весь анализ проведем в цилиндрической системе координат $\{r, \varphi, z\}$ с осью OZ, орт $\mathbf{n}_z$ которой совпадает по направлению с осью симметрии цилиндрической струи, и направлен вдоль вектора скорости $\mathbf{U}_0$. Уравнение свободной поверхности струи, возмущенной тепловым капиллярным волновым движением, т.е. имеющим размерные амплитуды $\sim \sqrt{\kappa T/\gamma}$, где κ — постоянная Больцмана; T — абсолютная температура [7], запишем в виде:

$$F(r, \varphi, z, t) = r - \big(1 + \xi(\varphi, z, t)\big) = 0.$$

В этом соотношении $\xi(\varphi, z, t)$ — возмущение цилиндрической поверхности струи, вызванное капиллярным волновым движением.

Математическая формулировка задачи о расчете капиллярного волнового течения жидкости в струе идеальной несжимаемой жидкости состоит из уравнений гидродинамики и электростатики (в предположении, что скорость движения жидкости много меньше релятивистской), т.е. $\mathbf{E}_j = -\nabla\Phi_j(\mathbf{r}, t)$, $j \in \{\text{in}; \text{ex}\}$:

$$\Delta\psi(\mathbf{r}, t) = 0; \quad \Delta\Phi_{\text{in}}(\mathbf{r}, t) = 0; \quad \Delta\Phi_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t) = 0$$

с граничными условиями

$$r = 1 + \xi: \qquad \frac{dF}{dt} \equiv \frac{\partial F}{\partial t} + \nabla\psi \cdot \nabla F = 0;$$

$$P_{\text{in}} - P_{\text{ex}} + P_E = P_\gamma;$$

$$\varepsilon_{\text{in}}[\mathbf{n} \cdot \nabla\Phi_{\text{in}}(\mathbf{r}, t)] = \varepsilon_{\text{ex}}[\mathbf{n} \cdot \nabla\Phi_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t)];$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla\Phi_{\text{in}}(\mathbf{r}, t) = \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla\Phi_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t);$$

$$r \to 0: \qquad \nabla\psi(\mathbf{r}, t) \to 0; \quad \Phi_{\text{in}}(\mathbf{r}, t) < \infty;$$

$$r \to \infty: \qquad -\nabla\Phi_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0.$$

Здесь $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{n}$ — единичные векторы касательной и нормали к возмущенной поверхности струи; $\Phi_{\text{in}}(\mathbf{r}, t)$ и $\Phi_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t)$ — электростатические потенциалы в струе и в среде соответственно; P_{ex} — давление во внешней среде;

$$P_{\text{in}}(\mathbf{r}, t) \equiv P_{\text{in}}^{(0)} - \frac{\partial\psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \frac{1}{2}\left(\nabla\psi(\mathbf{r}, t)\right)^2$$

— поле давлений внутри струи; $P_{\text{in}}^{(0)}$ — постоянное давление в цилиндрической струе в отсутствие волнового движения в ней; $P_\gamma \equiv \operatorname{div}\mathbf{n}$ — давление сил поверхностного натяжения; P_E — давление электрического поля на поверхность капли:

$$P_E = -\frac{\varepsilon_{\text{ex}}}{8\pi}\left[(\nabla\Phi_{\text{ex}})^2 - 2(-\mathbf{n} \cdot \nabla\Phi_{\text{ex}})^2\right] + \frac{\varepsilon_{\text{in}}}{8\pi}\left[(\nabla\Phi_{\text{in}})^2 - 2(\mathbf{n} \cdot \nabla\Phi_{\text{in}})^2\right].$$

Кроме выписанных условий должно выполняться требование постоянства объема участка струи, длина которого равна длине волны λ:

$$\int\limits_{z_0}^{z_0+\lambda}\int\limits_0^{1+\xi}\int\limits_0^{2\pi} dz\, r dr\, d\varphi = \pi\lambda.$$

2. Разбиение по порядкам малости

Малым параметром сформулированной задачи является безразмерная амплитуда волновой деформации поверхности струи $\varepsilon \equiv \max|\xi(\varphi, z, t)|$. Искомые функции деформации поверхности $\xi(\varphi, z, t)$ и гидродинамический потенциал волнового течения жидкости в струе $\psi(\mathbf{r}, t)$ является малым первого порядка по ε. Потенциалы электростатического поля $\Phi_{\text{in}}(\mathbf{r}, t)$ и $\Phi_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t)$ содержат и слагаемые нулевого порядка малости, и их можно представить в виде:

$$\Phi_{\text{in}}(\mathbf{r}, t) \equiv \Phi_{\text{in}}^{(0)}(\mathbf{r}, t) + \phi_{\text{in}}(\mathbf{r}, t);$$

$$\Phi_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t) \equiv \Phi_{\text{ex}}^{(0)}(\mathbf{r}, t) + \phi_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t);$$

где $\Phi_{\text{in}}^{(0)}(\mathbf{r}, t)$ и $\Phi_{\text{ex}}^{(0)}(\mathbf{r}, t)$ — слагаемые нулевого порядка малости по ε, а $\phi_{\text{in}}(\mathbf{r}, t)$ и $\phi_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t)$ — первого. В этой связи сформулированную задачу следует разбить по порядкам малости.

2.1. Нулевой порядок малости

В нулевом порядке малости по ε будем иметь невозмущенный волновым движением цилиндр в коллинеарном его оси электростатическом поле. Это означает, что гидродинамических движений не будет, а оставшиеся искомые величины не будут зависеть от координат r и φ цилиндрической системы координат. В итоге получим задачу

$$\frac{\partial^2\Phi_{\text{in}}^{(0)}(\mathbf{r},t)}{\partial z^2}=0;\quad \frac{\partial^2\Phi_{\text{ex}}^{(0)}(\mathbf{r},t)}{\partial z^2}=0$$

с граничными условиями

$$r=1:\qquad \frac{\partial\Phi_{\text{in}}^{(0)}(\mathbf{r},t)}{\partial z}=\frac{\partial\Phi_{\text{ex}}^{(0)}(\mathbf{r},t)}{\partial z};$$

$$\left(P_{\text{in}}^{(0)}-P_{\text{ex}}^{(0)}\right)+\frac{(\varepsilon_{\text{in}}-\varepsilon_{\text{ex}})}{8\pi}\left(\frac{\partial\Phi_{\text{in}}^{(0)}}{\partial z}\right)^2=1;$$

$$r\to 0:\qquad \Phi_{\text{in}}(\mathbf{r},t)<\infty;$$

$$r\to\infty:\qquad -\nabla\Phi_{\text{ex}}^{(0)}(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}_0;$$

$$\int\limits_{z_0}^{z_0+\lambda}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi} dz\,r\,dr\,d\varphi=\pi\lambda.$$

Решение этой задачи находится легко:

$$\Phi_{\text{in}}^{(0)}(\mathbf{r},t)=-E_0z;\quad \Phi_{\text{ex}}^{(0)}(\mathbf{r},t)=-E_0z;$$

$$\Delta P\equiv\left(P_{\text{in}}^{(0)}-P_{\text{ex}}\right)=1(\varepsilon_{\text{in}}-\varepsilon_{\text{ex}})\frac{E_0^2}{8\pi}.$$

2.2. Первый порядок малости

В первом порядке малости по ε будем иметь задачу

$$\Delta\psi(\mathbf{r},t)=0;\quad \Delta\phi_{\text{in}}(\mathbf{r},t)=0;\quad \Delta\phi_{\text{ex}}(\mathbf{r},t)=0$$

с граничными условиями

$$r=1:\qquad \frac{\partial\xi}{\partial t}=\frac{\partial\psi}{\partial r};$$

$$-\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{(\varepsilon_{\text{in}}-\varepsilon_{\text{ex}})}{8\pi}\left[2\frac{\partial\Phi_{\text{ex}}^{(0)}}{\partial z}\frac{\partial\phi_{\text{ex}}}{\partial z}-\left(1-\frac{\varepsilon_{\text{ex}}}{\varepsilon_{\text{in}}}\right)\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{\partial\phi_{\text{ex}}}{\partial r}-\frac{\partial\Phi_{\text{ex}}^{(0)}}{\partial z}\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)\right]=-\left[\xi+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial\varphi^2}\right];$$

$$\varepsilon_{\text{in}}\left[\frac{\partial\phi_{\text{in}}(\mathbf{r},t)}{\partial r}-\frac{\partial\Phi_{\text{in}}^{(0)}}{\partial z}\frac{\partial\xi}{\partial z}\right]=\varepsilon_{\text{ex}}\left[\frac{\partial\phi_{\text{ex}}(\mathbf{r},t)}{\partial r}-\frac{\partial\Phi_{\text{ex}}^{(0)}}{\partial z}\frac{\partial\xi}{\partial z}\right];$$

$$\frac{\partial\phi_{\text{in}}(\mathbf{r},t)}{\partial z}=\frac{\partial\phi_{\text{ex}}(\mathbf{r},t)}{\partial z};\quad \frac{\partial\phi_{\text{in}}(\mathbf{r},t)}{\partial\varphi}=\frac{\partial\phi_{\text{ex}}(\mathbf{r},t)}{\partial\varphi};$$

$$r\to 0:\qquad \nabla\psi(\mathbf{r},t)\to 0;\quad |\nabla\phi_{\text{in}}(\mathbf{r},t)|\to 0;$$

$$r\to\infty:\qquad |\nabla\phi_{\text{ex}}(\mathbf{r},t)|\to 0;$$

$$\int\limits_{z_0}^{z_0+\lambda}\int\limits_0^{2\pi}\xi(z,\varphi,t)\,dz\,d\varphi=0.$$

Решение задачи первого порядка малости для неизвестных функций $\xi(\varphi,z,t)$, $\psi(\mathbf{r},t)$, $\phi_{\text{in}}(\mathbf{r},t)$ и $\phi_{\text{ex}}(\mathbf{r},t)$ будем искать в виде разложений по бегущим цилиндрическим волнам в виде

$$\xi(\varphi,z,t)=\int\limits_0^\infty\sum_{m=0}^\infty C_m^{(1)}\exp(im\varphi)\exp(ikz)\exp(-i\omega t)dk;$$

$$\psi(\mathbf{r},t)=\int\limits_0^\infty\sum_{m=0}^\infty C_m^{(2)}I_m(kr)\exp(im\varphi)\exp(ikz)\exp(-i\omega t)dk;$$

$$\phi_{\text{in}}(\mathbf{r},t)=\int\limits_0^\infty\sum_{m=0}^\infty C_m^{(3)}I_m(kr)\exp(im\varphi)\exp(ikz)\exp(-i\omega t)dk;$$

$$\phi_{\text{ex}}(\mathbf{r},t)=\int\limits_0^\infty\sum_{m=0}^\infty C_m^{(4)}K_m(kr)\exp(im\varphi)$$
$$\times\exp(ikz)\exp(-i\omega t)dk,$$

где i — мнимая единица; k и ω — волновое число и циклическая частота волны; m — азимутальный параметр; $I_m(kr)$ и $K_m(kr)$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода соответственно.

3. Дисперсионное уравнение

Подставляя выписанные проекты решений в систему граничных условий, из условия совместности получившейся системы алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложений $C_m^{(l)}$, где $l=1,2,3,4$, несложно получить дисперсионное уравнение задачи, которое выписывается достаточно компактно:

$$\omega_m^2(k,\varepsilon_{\text{in}},\varepsilon_{\text{ex}},w)$$
$$=F_m(k)\left\{k^2+m^2-1+w\frac{(\varepsilon_{\text{in}}-\varepsilon_{\text{ex}})^2k^2}{\varepsilon_{\text{in}}F_m(k)+\varepsilon_{\text{ex}}D_m(k)}\right\};\qquad(1)$$
$$w\equiv\frac{E_0^2}{4\pi};\quad F_m(k)\equiv k\frac{I_{m+1}(k)}{I_m(k)}+m;$$
$$D_m(k)\equiv k\frac{K_{m+1}(k)}{K_m(k)}-m.$$

Положив $m=0$, несложно получить дисперсионное уравнение для осесимметричных капиллярных волн на поверхности незаряженной струи идеальной несжимаемой диэлектрической жидкости в однородном электростатическом поле, приведенное в [8–10]:

$$\omega_0^2(k,\varepsilon_{\text{in}},\varepsilon_{\text{ex}},w)$$
$$=F_0(k)\left\{k^2+w\frac{(\varepsilon_{\text{in}}-\varepsilon_{\text{ex}})^2k^2}{\varepsilon_{\text{in}}F_0(k)+\varepsilon_{\text{ex}}D_0(k)}-1\right\}.\qquad(2)$$

4. Анализ полученных результатов

Волна с заданными значениями волнового k и азимутального m чисел претерпевает неустойчивость, когда $\omega_m^2(k, \varepsilon_{\text{in}}, \varepsilon_{\text{ex}}, w)$ — квадрат ее частоты — проходит через нуль и становится отрицательным. При этом частоты принимают мнимые значения, и амплитуда одной из волн, для которой $\omega_m(k, \varepsilon_{\text{in}}, \varepsilon_{\text{ex}}, w) \equiv i\eta(k, \varepsilon_{\text{in}}, \varepsilon_{\text{ex}}, w)$, начинает экспоненциально нарастать со временем с инкрементом $\eta(k, \varepsilon_{\text{in}}, \varepsilon_{\text{ex}}, w)$.

В дисперсионном уравнении (1) функциональные множители $F_m(k)$ и $D_m(k)$ являются вещественными положительными при произвольных k и m. Это означает, что при $m \geq 1$ правая часть (1) всегда положительная, частоты $\omega_m(k, \varepsilon_{\text{in}}, \varepsilon_{\text{ex}}, w)$ вещественны и, следовательно, струя устойчива по отношению к неосесимметричным волновым возмущениям ее поверхности. Для $m = 0$ приходим к дисперсионному уравнению (2), имеющему мнимые решения для малых значений волновых чисел (для длинных волн), удовлетворяющих условию:

$$k^2 + w\,\frac{(\varepsilon_{\text{in}} - \varepsilon_{\text{ex}})^2 k^2}{\varepsilon_{\text{in}} F_0(k) + \varepsilon_{\text{ex}} D_0(k)} < 1. \qquad (3)$$

В указанном диапазоне волновых чисел струя претерпевает осесимметричную капиллярную неустойчивость. Несложно видеть, что в отсутствие электрического поля (при $w = 0$) диапазон воловых чисел неустойчивых осесимметричных волн определяется условием: $0 < k < 1$, как и было получено для незаряженной струи при отступлении электрического поля Рэлеем [1–2].

На рис. 1 приведены результаты численного расчета по дисперсионному уравнению (2) зависимости квадрата частоты ω^2 осесимметричных волн от волнового числа k при различных значениях параметров w, ε_{in} и ε_{ex}. Несложно видеть, что с увеличением параметра w, пропорционального квадрату напряженности электрического поля, а также с увеличением диэлектрической проницаемости жидкости ε_{in} и внешней среды ε_{ex} ширина диапазона волновых чисел волн, претерпевающих неустойчивость, сужается.

Если выражение (3) переписать в виде

$$k^2 + w\,\frac{(\varepsilon_{\text{in}} - \varepsilon_{\text{ex}})^2 k^2}{\varepsilon_{\text{in}} F_0(k) + \varepsilon_{\text{ex}} D_0(k)} - 1 = 0$$

и выразить из него, например, ε_{in} как функцию от остальных физических параметров $\varepsilon_{\text{in}} = \varepsilon_{\text{in}}(k, w, \varepsilon_{\text{ex}})$, то по полученному соотношению можно также исследовать зависимость ширины диапазона волновых чисел неустойчивых волн от физических параметров системы.

На рис. 2 приведены зависимости $\varepsilon_{\text{in}} = \varepsilon_{\text{in}}(k)$, построенные при $\varepsilon_{\text{ex}} = 1$ и различных значениях параметра w. Видно, что для фиксированного значения $\varepsilon_{\text{in}} = \varepsilon_{\text{in}}^* \equiv \text{const}$ ширина диапазона волновых чисел неустойчивых волн определится точкой пересечения графика $\varepsilon_{\text{in}} = \varepsilon_{\text{in}}(k)$, построенного при $w = w_* \equiv \text{const}$, с прямой, параллельной оси абсцисс, $\varepsilon_{\text{in}} = \varepsilon_{\text{in}}^* \equiv \text{const}$.

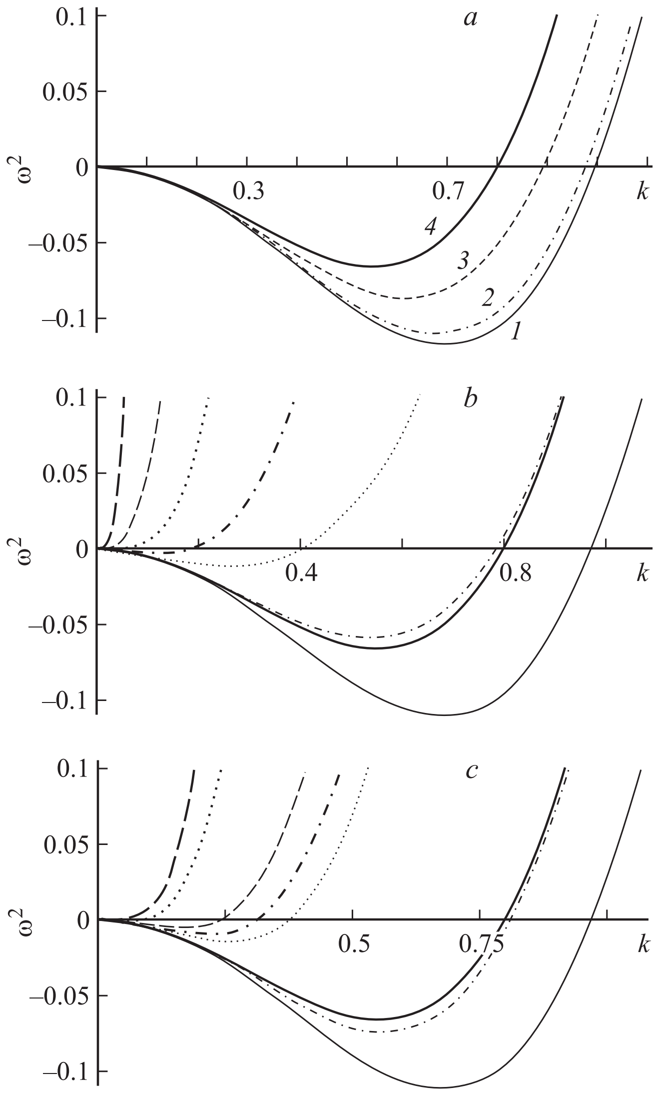

Рис. 1. Зависимости квадрата безразмерной частоты ω^2 осесимметричных волн от безразмерного волнового числа k при различных значениях физических параметров. a — $\varepsilon_{\text{in}} = 2$; $\varepsilon_{\text{ex}} = 1$. Параметр w принимает различные значения: $w = 0$ — тонкая кривая; 0.1 — штрихпунктир; 0.5 — пунктир; 1 — жирная кривая. b — $\varepsilon_{\text{ex}} = 1$. Параметр w принимает два значения: $w = 0.1$ — тонкие кривые; 1 — жирные. Параметр ε_{in} принимает четыре различных значения: $\varepsilon_{\text{in}} = 2$ — сплошные кривые; 5 — штрихпунктир; 10 — точечные кривые; 100 — пунктир. c — $\varepsilon_{\text{in}} = 2$. Параметр w принимает два значения: $w = 0.1$ — тонкие кривые; 1 — жирные. Параметр ε_{ex} принимает четыре различных значения: $\varepsilon_{\text{ex}} = 1$ — сплошные кривые; 10 — штрихпунктир; 50 — точечные кривые; 100 — пунктир.

Несмотря на то что капиллярную неустойчивость могут претерпевать сразу бесконечное число волн с волновыми числами из непрерывного конечного диапазона значений, реальная картина дробления струи на капли определяется одной волной, обладающей при прочих равных условиях максимальным инкрементом неустойчивости [15].

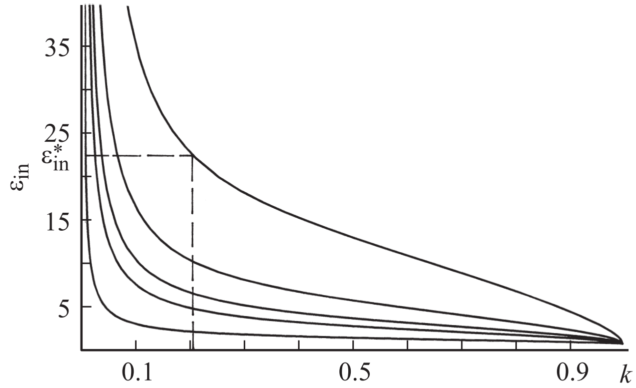

Рис. 2. Зависимости $\varepsilon_{in} = \varepsilon_{in}(k)$, построенные при $\varepsilon_{ex} = 1$ и различных значениях параметра w: $w \in \{0.05; 0.2; 0.5; 1; 10\}$. Кривые расположены в порядке изменения параметра w: верхняя кривая соответствует $w = 0.05$, нижняя — 10.

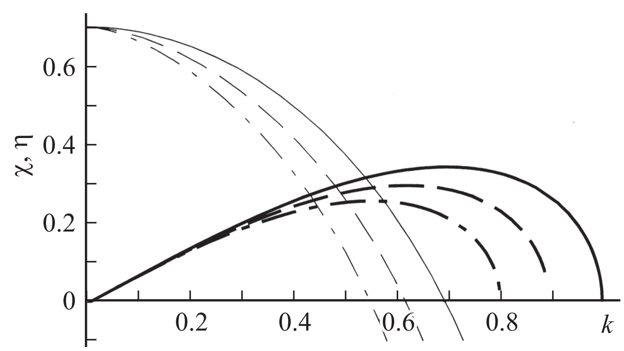

Рис. 3. Зависимости величины безразмерного инкремента неустойчивости осесимметричных волн η от безразмерного волнового числа — жирные кривые, и его производной по волновому числу $\chi \equiv (\partial\eta/\partial k)$ — тонкие кривые, рассчитанные при $\varepsilon_{ex} = 1$, $\varepsilon_{in} = 2$ и различных значениях w: $w = 0$ — сплошные кривые; 0.5 — пунктир; 1 — штрихпунктир.

На рис. 3 приведены зависимости от волнового числа величины инкремента неустойчивости осесимметричных волн η и его производной по волновому числу $\chi \equiv (\partial\eta/\partial k)$, рассчитанные по (2) при заданных значениях диэлектрических проницаемостей и различных значениях параметра w. Условие $\chi \equiv (\partial\eta/\partial k) = 0$ позволяет найти волновые числа, соответствующие максимальным значениям инкремента. Несложно видеть, что с ростом параметра w (с ростом величины напряженности электростатического поля) уменьшаются как значения инкрементов, так и волновые числа волн с максимальной скоростью нарастания амплитуды. Другими словами, с увеличением напряженности продольного электростатического поля длины наиболее неустойчивых волн растут, а инкременты их неустойчивости снижаются. Данное обстоятельство позволяет объяснить особенности электродиспергирования жидкости в веретенообразном режиме [16,17].

Следует отметить, что в феномене электродиспергирования жидкости экспериментально наблюдается более десятка различных режимов [5,16–19], теоретическое осознание которых не до конца завершено. В устройствах для электродиспергирования жидкость подается в разрядную систему по металлическому капилляру, на торце которого образуется примерно полусфероидальный мениск жидкости. Электрическое поле между капилляром и противоэлектродом вытягивает из мениска струйку жидкости [20,21], которая и распадается на отдельные капли. Вытягиваемая струйка сужается по мере удаления от торца капилляра, а отрыв капелек имеет место с тонкого конца струйки. В веретенообразном режиме электродиспергирования иногда наблюдается одновременный разрыв струйки в сечениях разного диаметра: непосредственно у вершины мениска, где радиус струйки велик, и на тонком ее конце, где он мал [16,17]. Для теоретического истолкования такого феномена как раз и можно привлечь результаты проведенного в настоящей работе анализа.

На рис. 4 приведены зависимости от параметра w величин: волнового числа волны, обладающей максимальным инкрементом k_{max}, и самого максимального

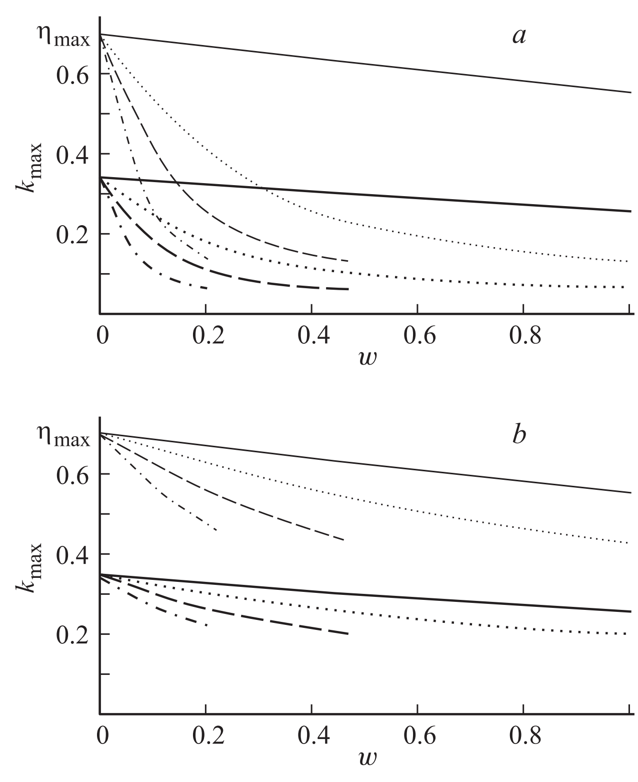

Рис. 4. Зависимости от параметра w величин: волнового числа волны, обладающей максимальным инкрементом k_{max} — тонкие кривые, и самого максимального инкремента η_{max} — толстые кривые, рассчитанные при: a — $\varepsilon_{ex} = 1$ и различных значениях ε_{in}: $\varepsilon_{in} = 2$ — сплошные кривые; 5 — точечные, 7 — пунктир; 10 — штрихпунктир. b — $\varepsilon_{in} = 2$ и различных значениях ε_{ex}: $\varepsilon_{ex} = 1$ — сплошные кривые; 5 — точечные, 7 — пунктир; 10 — штрихпунктир.

инкремента $\eta_{\max}$, рассчитанные при: рис. 4, a — фиксированном значении $\varepsilon_{\mathrm{ex}} = 1$ и различных значениях $\varepsilon_{\mathrm{in}}$; рис. 4, b — фиксированном значении $\varepsilon_{\mathrm{in}} = 1$ и различных значениях $\varepsilon_{\mathrm{ex}}$. Видно, что и волновые числа и значения инкрементов убывают с ростом w и величины диэлектрических проницаемостей.

В проведенном рассмотрении значения параметра w, как правило, брались малыми. Причина этого состоит в том, что, например, значение параметра $w = 1$ соответсвует размерной напряженности электростатического поля $E_0 = 2\sqrt{\pi\gamma/R}$. Для струи воды радиусом $R = 400\,\mu\mathrm{m}$ при $\gamma = 72\,\mathrm{dyne/cm}$ это соответствует $E_0 \approx 150\,\mathrm{CGSE} = 45\,\mathrm{kV/cm}$. Такая напряженность электростатического поля существенно превышает напряжение электрического пробоя воздуха в постоянном однородном электрическом поле при атмосферном давлении, которое, согласно [22], составляет $\approx 26\,\mathrm{kV/cm}$. Для струи этилового спирта того же радиуса при $\gamma = 23\,\mathrm{dyne/cm}$ получим: $E_0 \approx 85\,\mathrm{CGSE} = 25.5\,\mathrm{kV/cm}$.

В экспериментах по электродиспергированию используются жидкости, коэффициенты поверхностного натяжения которых изменяются в весьма широких пределах от $\approx 2\,\mathrm{dyne/cm}$ для жидкого водорода до $\sim 1000\,\mathrm{dyne/cm}$ для жидких полупроводников и окислов, а образующиеся при электродиспергировании струи имеют радиус $\sim 20-1000\,\mu\mathrm{m}$ [5,16–19]. Значения параметра $w \gg 1$ тем не менее также имеют смысл и могут характеризовать устойчивость струи в вакууме, например, в жидкометаллических источниках ионов [23] или в масс-спектрометрах для анализа нелетучих и термически нестойких веществ (например, органического происхождения) [24,25], когда используется электрогидродинамический способ подачи вещества.

Заключение

В проведенном исследовании выяснилось, что продольное однородное электростатическое поле не вызывает неустойчивости неосесимметричных волн на поверхности струи, как это имеет место для радиального электростатического поля [26–28], и стабилизирует капиллярную неустойчивость осесимметричных волн. Стабилизация капиллярной неустойчивости проявляется в сужении диапазона неустойчивых волн (правая граница диапазона: $0 < k^2 \leq 1$ волновых чисел, в котором реализуется капиллярная неустойчивость, с ростом w стремится к $k^2 = 0$) и в снижении значений инкрементов неустойчивости. На характеристики стабилизации существенное влияние оказывают диэлектрические проницаемости окружающей среды и жидкости струи.

Работа выполнена в рамках тематического плана университета, при поддержке грантов губернатора Ярославской области, Рособразования № 2.1.1/3776, РФФИ № 09-01-00084 и 09-08-00148.

Список литературы

[1] *Strutt J.W. (Lord Rayleigh)* // Proc. London Math. Soc. 1878. Vol. 10. P. 4–13.
[2] *Стретт Дж.В. (Лорд Рэлей).* Теория звука. Т. 2. М.: Гостехиздат, 1955. 475 с.
[3] *Ентов В.М., Ярин А.Л.* // ВИНИТИ. Итоги науки и техники. Сер. „Механика жидкости и газа“. 1984. Т. 17. С. 112–197.
[4] Монодиспергирование вещества: принципы и применение / Е.В. Аметистов, В.В. Блаженков, А.К. Городов и др.; Под ред. В.А. Григорьева. М.: Энергоатомиздат, 1991. 336 с.
[5] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Волкова М.В.* Спонтанный капиллярный распад заряженных струй. Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 2007. 340 с.
[6] *Eggers J., Willermaux E.* // Rep. Prog. Phys. 2008. N 036 601. 79 p.
[7] *Френкель Я.И.* // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. № 4. С. 348–350.
[8] *Nayyar N.K., Murty G.S.* // Proc. Phys. Soc. 1960. Vol. 75. Pt. 3. N 483. P. 369–373.
[9] *Глонти Г.А.* // ЖЭТФ. 1958. Т. 34. № 5. С. 1328–1330.
[10] *Raco R.J.* // AIAA J. 1968. Vol. 6. N 5. P. 979–980.
[11] *Saville D.A.* // J. Fluid. Mech. 1971. Vol. 48. N 4. P. 815–827.
[12] *Mestel A.J.* // J. Fluid. Mech. 1996. Vol. 312. N 2. P. 311–326.
[13] *Шутов А.А.* // Изв. РАН. МЖГ. 2006. № 6. С. 52–67.
[14] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 11. С. 22–28.
[15] *Левич В.Г.* Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 700 с.
[16] *Cloupeau M., Prunet Foch B.* // J. Electrostatics. 1990. Vol. 25. P. 165–184.
[17] *Jaworek A., Krupa A.* // J. Aerosol Sci. 1999. Vol. 30. N 7. P. 873–893.
[18] *Shiryaeva S.O., Grigor'ev A.I.* // J. Electrostatics. 1995. Vol. 34. P. 51–59.
[19] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Святченко А.А.* Классификация режимов работы электрогидродинамических источников ионов. Препринт ИМ РАН № 25. Ярославль, 1993. 118 с.
[20] *Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2007. Т. 77. Вып. 2. С. 31–40.
[21] *Григорьев А.И., Пожарицкий Д.М.* // ЖТФ. 2008. Т. 78. Вып. 10. С. 40–46.
[22] *Александров А.Ф., Бычков В.Л., Грачев Л.П.* и др. // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 3. С. 38–43.
[23] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 1992. Т. 62. Вып. 12. С. 9–20.
[24] *Золотой Н.Б., Карпов Г.В., Скурат В.Е.* // 1988. ЖТФ. Т. 58. Вып. 2. С. 315–323.
[25] *Ширяева С.О., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1993. Т. 63. Вып. 8. С. 162–170.
[26] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Левчук Т.В., Рыбакова М.В.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 5. С. 5–12.
[27] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Левчук Т.В.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 11. С. 22–30.
[28] *Григорьев А.И., Воронина Н.В., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2008. Т. 78. Вып. 2. С. 33–41.