01;03

Ударные волны в трехмерном трансзвуковом потоке при пространственном слабом тепловыделении

© А.Н. Кучеров

Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского,
140180 Жуковский, Московская область, Россия
e-mail: ank@aerocentr.msk.su

(Поступило в Редакцию 8 октября 2008 г. В окончательной редакции 2 марта 2009 г.)

Исследовано наличие или отсутствие ударных волн при слабом трехмерном тепловыделении в однородный равномерный трансзвуковой поток газа. Известно, что в двумерном случае при достаточно малом трансзвуковом параметре подобия ударные волны возможны в стационарном течении. Показано, что в осесимметричном и трехмерном вариантах в главном приближении ударных волн нет. В следующем приближении, в котором отсутствует логарифмический множитель малого параметра, ударные волны возможны.

PACS: 47.40.-x, 47.40.Hg, 52.35.Tc

Введение

Источники тепла в газе и жидкости исследуют во многих физических явлениях. Приток энергии может создать лазерное излучение [1–4], электрический разряд [1,5], сгорающее топливо и другие химические реакции [6,7]. В газовой динамике важны, в первую очередь, такие возмущения, как ударные волны, создаваемые источником с распределенной по пространству интенсивностью, в том числе ударные волны в поле самого источника.

Слабые источники тепла в неограниченном пространстве, как правило, вызывают малые изменения газодинамических величин: плотности ρ, давления p, температуры T, энтальпии $h = \gamma p/(\gamma - 1)\rho$, компонент скорости u, v, w. „Слабый“ источник означает, что подводимая в единицу объема за единицу времени энергия $q = g_0 f(x, y, z)$ (g_0 — W/m^3, плотность мощности) мала по сравнению с потоком внутренней энергии E_0 (или энтальпии $h_0 = E_0 + p_0/\rho_0$) невозмущенного газа $G = g_0 r_0/\rho_0 u_0 E_0 \ll 1$, где r_0 — характерный размер.

При существенном тепловыделении ($G \sim 1$) возможно образование ударных волн в сверхзвуковом потоке. В трансзвуковом потоке [8–11] ударные волны возможны даже при малых возмущениях, например внутри лазерного пучка, распространяющегося поперек потока (двумерный источник тепла) [12–15]. Интенсивность ударной волны $\Delta p/p_0 \sim G^{2/3}$ больше, чем масштаб возмущений G в дозвуковом и сверхзвуковом потоке. Порог появления ударных волн по числам Маха $M_0 = u_0/c_0$ (где $c_0^2 = \gamma p_0/\rho_0$ — скорость звука) определяется трансзвуковым параметром подобия $K = (M_0 - 1)/G^{2/3}$ [12,13], так же как и в случае обтекания профиля относительно малой толщины [9,11,16,17]. Экспериментально ударные волны в лазерном пучке пока не обнаружены [18]. Одна из возможных причин — недостаточная близость числа M_0 к единице [12]. Другая причина состоит в том, что при увеличении в эксперименте интенсивности источника за счет усиления поглощения или фокусировки излучения задача становится трехмерной.

В настоящей работе изучены трехмерные источники тепла в трансзвуковом потоке. Исследуется вопрос об ударных волнах в области тепловыделения в главном приближении. Кроме упомянутой задачи распространения лазерного пучка в потоке поглощающего газа, результаты найдут применение в задачах оптического разряда в фокусе лазерного пучка, при излучении электрического разряда и области горения в трансзвуковом потоке.

Явление описывается нелинейными уравнениями Эйлера с заданными источниками тепла q. Интенсивность часто задают на единицу массы газа $q = \rho q_0 f(x, y, z)$ (q_0 — W/kg). После линеаризации этот вариант не отличается от упомянутого выше.

Двумерное стационарное течение с распределенным источником тепла

Приведем основные результаты для двумерного варианта, исследованного ранее [12,15]. Задача имеет два масштаба: внутренний ($x \sim r_0$, $y \sim r_0$) и внешний ($x \sim r_0$, $y \sim r_0/G^{1/3}$), увеличенный в поперечном направлении [12,14]. Возмущения от источника, распространяющиеся вперед со скоростью звука, сносятся вниз по потоку с такой же скоростью и накапливаются. Масштаб возмущений газодинамических величин возрастает от G до $G^{2/3}$, увеличиваются размеры области возмущения в поперечном направлении. Для внутренней задачи, подставляя разложения искомых величин в ряд по малому параметру G

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 + G^{2/3}\rho_1 + G\rho_2 + \dots\ ,$$
$$\frac{p}{p_0} = 1 + G^{2/3}p_1 + Gp_2 + \dots\ ,$$
$$\frac{u}{u_0} = 1 + G^{2/3}u_1 + Gu_2 + \dots\ ,$$
$$\frac{v}{u_0} = Gv_1 + G^{4/3}v_2 + \dots\ , \qquad (1)$$

в уравнения Эйлера (сохранения импульса, массы, энергии [9,10]), получим решения для первого и второго приближения:

$$v_1(x,y) = \frac{1}{\gamma}\int\limits_0^y f(x,y')dy', \quad \rho_1 = -u_1 = \frac{p_1(x)}{\gamma}, \quad (2)$$

$$p_2 = -\gamma u_2 = -\gamma \int\limits_0^y \frac{\partial v_1(x,y')}{\partial x}dy',$$

$$\rho_2 = \frac{p_2}{\gamma} - \frac{1}{\gamma}\int\limits_{-\infty}^x f(x',y)dx'. \quad (3)$$

Координаты x, y отнесены к r_0. Функция p_1 (а также ρ_1, u_1, см. (2)) не зависит от поперечной координаты y и определяется из решения внешней задачи.

Для внешней задачи вводим сжатую координату: $Y = yG^{1/3}$, $Y \sim 1$, $y \gg 1$. Разложения искомых величин в ряд по малому параметру до третьего приближения включительно имеют вид:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 + G^{2/3}R_1 + GR_2 + G^{4/3}R_3 + \dots\ ,$$

$$\frac{p}{p_0} = 1 + G^{2/3}P_1 + GP_2 + G^{4/3}P_3 + \dots\ ,$$

$$\frac{u}{u_0} = 1 + G^{2/3}U_1 + GU_2 + G^{4/3}U_3 + \dots\ ,$$

$$\frac{v}{u_0} = GV_1 + G^{4/3}V_2 + G^{5/3}V_3 + \dots \quad (4)$$

Здесь учтено, что функция V_1 при $Y \to 0$ должна сращиваться с решением v_1 внутренней задачи при $y \to \infty$. Подстановка разложений (4) в уравнения Эйлера позволяет найти системы уравнений до 3-го приближения включительно и замкнуть задачу первого приближения:

$$R_1 = -U_1 = \frac{P_1(x,Y)}{\gamma}, \quad \frac{\partial V_1}{\partial x} - \frac{\partial U_1}{\partial Y} = 0, \quad (5)$$

$$[2K + (\gamma+1)U_1]\frac{\partial U_1}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial Y} = 0,$$

$$V_1(x, Y=0) = \frac{1}{\gamma}\int\limits_0^\infty f(x,y)dy. \quad (6)$$

Тип уравнения изменяется (гиперболический–эллиптический) в зависимости от знака множителя перед $\partial U_1/\partial x$. Если ввести потенциал Φ, $U_1 = \partial\Phi/\partial x$, $V_1 = \partial\Phi/\partial Y$, получим уравнение Кармана–Гудерлея [11]:

$$[2K + (\gamma+1)\Phi_x]\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial Y^2} = 0,$$

$$\Phi_Y(x, Y=0) = \frac{1}{\gamma}\int\limits_0^\infty f(x,y)dy. \quad (7)$$

Вывести (7) можно как из исходных уравнений Эйлера, так и из общего нелинейного уравнения для сжимаемых течений [9,11,13]:

$$\left(\frac{p}{\rho M_0^2} - u^2\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{p}{\rho M_0^2} - v^2\right)\frac{\partial v}{\partial y} - 2uv\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0. \quad (8)$$

Здесь пренебрегается на больших расстояниях $y \gg 1$ источниковым членом $f \approx 0$. Приравнивание по порядку величины первого члена второму (третий — внепорядковый) дает геометрический масштаб области возмущений в поперечном направлении $y = Y/G^{1/3}$, масштаб возмущений газодинамических величин $\Delta u \sim G^{2/3}$ (с учетом того, что $\Delta u \sim \Delta\rho \sim \Delta p$, $v \sim G$) и выражение для трансзвукового параметра подобия K:

$$K = \frac{M_0 - 1}{G^{2/3}}.$$

Первый член в (7) и (8) получен из уравнения сохранения продольной компоненты импульса, второй — из уравнения сохранения массы.

Уравнения (5), (6) (или (7)) — это задача об обтекании полутела, неограниченного при $x \to \infty$. Асимптотические краевые условия при $Y \to \infty$ [8,9,11] и условие отсутствия возмущений в набегающем потоке дополняют условие на оси при $Y = 0$. В [13] построено решение для однородного тепловыделения в круге. При $|2K| < 0.29$ появляются скачки уплотнения: в дозвуковом потоке ($M_0 < 1$) — замыкающий скачок, в сверхзвуковом потоке ($M_0 > 1$) — головная и замыкающая ударные волны. Условие $|2K| < 0.029$ определяет предельный звуковой режим $K \to 0$. Решение при дальнейшем уменьшеии параметра подобия K не изменяется [13].

Осесимметричный источник тепла $f = f(x, r)$

Нелинейная трансзвуковая задача малых возмущений, вызванных телом или источником в данном случае, как было указано выше, всегда сводится к нелинейной задаче Кармана–Гудерлея [11] (Эйлера–Трикоми [9]). Выведем эти уравнения из общих уравнений газодинамики. Оценим порядки газодинамических величин. В масштабе источника $x \sim 1$, $r \sim 1$ отклонение линий тока происходит на величину порядка интенсивности источника G, и, следовательно, поперечная компонента скорости $v \sim G$, т.е. $v = Gv_1 + \dots$ На больших расстояниях r, как увидим далее, порядок величины v изменится. Масштаб изменения продольной скорости Δu и других газодинамических величин ($\Delta\rho \sim \Delta u$ — из уравнения сохранения массы, $\Delta p \sim \Delta u$ — из уравнения сохранения продольной компоненты импульса) больше G, так как линейная теория при $M_0 \to 1$ непригодна (решение имеет такую особенность: $\sim (M_0^2 - 1)^{-1/2}$ [9,10]).

Разложения решения по малым параметрам ищется в следующем виде, с учетом, что в осесимметричном варианте появляются лоагарифмы от малого параметра [11], так как уравнение потенциала допускает частное решение $\ln(r)$:

$$\frac{u}{u_0} = 1 - G(u_{11} \ln G + u_1) + \dots\ ,$$
$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 + G(\rho_{11} \ln G + \rho_1) + \dots\ ,$$
$$\frac{p}{p_0} = 1 + G(p_{11} \ln G + p_1) + \dots\ ,$$
$$\frac{v}{u_0} = Gv_1 + \dots\ , \quad K = \frac{M_0 - 1}{G^m}. \tag{9}$$

Показатель степени m определим далее. Второй индекс (u_{11} и т.д.) введен для нумерации логарифмических членов. Подставив (9) в уравнения Эйлера, получим приближения, включающие источник тепла f (в качестве примера рассмотрим нормированную гауссову функцию $f(x, r)$: $2\pi \iint r f\,dr dx = 1$):

$$\gamma\rho_{11} = -\gamma u_{11} = p_{11}(x),$$
$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho_1 + u_1) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_1) = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial x}(\gamma u_1 + p_1) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}\gamma v_1 + \frac{\partial}{\partial r} p_1 = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial x}(p_1 - \gamma\rho_1) = f(x, r),$$
$$f = C\exp(-x^2 - r^2), \quad C = \frac{1}{\pi\sqrt{\pi}}. \tag{10}$$

Уравнения (10) после исключения величин ρ_1, u_1, p_1, дают явное выражение для v_1 и все решения для остальных членов $\sim G$:

$$v_1 = \frac{1}{\gamma r}\int_0^r r' f\,dr'$$
$$= \frac{C\exp(-x^2)\big(1 - \exp(-r^2)\big)}{2\gamma r}\bigg|_{r\to\infty} \to \frac{A(x)}{r},$$
$$A = \frac{C\exp(-x^2)}{2\gamma},$$
$$p_1(x, r) = -\gamma\int_0^r \frac{\partial v_1}{\partial x}\,dr' + C_1(x) = \left[-\frac{\gamma}{2}\frac{dA}{dx}\,\mathrm{Ein}(r^2)\right.$$
$$\left. + C_1(x)\right]_{r\to\infty} \to -\frac{\gamma}{2}A'(x)\left[C_E + \ln r^2\right] + C_1(x),$$
$$u_1(x, r) = -\frac{p_1}{\gamma}, \quad \rho_1(x, r) = \frac{p_1}{\gamma} - \int_{-\infty}^{x} f\,dx', \tag{11}$$
$$\mathrm{Ein}\,(z) = \int_0^z \frac{1 - \exp(-t)}{t}\,dt.$$

Здесь $\mathrm{Ein}\,(z) = E_1(z) + \ln(z) + C_E$ [19], $E_1(z)$ — интегральная показательная функция, $C_E = 0.5772$ — постоянная Эйлера, $C_1(x)$ — постоянная интегрирования (находится в процессе сращивания с внешним решением). На оси при $r \to 0$ величина $v_1 \to 0$; значения ρ_1, u_1, p_1 не имеют особенности, так как $\mathrm{Ein}\,(z)\big|_{z\to 0} \to 0$.

Для внешней задачи введем сжатую координату $Y = rG^a$ такую, чтобы при $r \to \infty$ было выполнено условие $Y \sim 1$. Постоянную a определим далее из оценок. На больших расстояниях $r \to \infty$ для искомых внешних величин имеем следующие асимптотические представления из (11):

$$v \to G\frac{A(x)}{r} = \frac{G^{1+a}A(x)}{Y}, \quad u_1 = -\frac{p_1}{\gamma} = -\rho_1,$$
$$p \to G[p_{11}(x) + \gamma A'(x)a]\ln G$$
$$+ G\left\{-\gamma A'(x)\left[\ln Y + \frac{C_E}{2}\right] + C_1(x)\right\}, \tag{12}$$
$$u \to 1 - G\left[\frac{p_{11}(x)}{\gamma} + aA'(x)\right]\ln G$$
$$- G\left\{-A'(x)\left[\ln Y + \frac{C_E}{2}\right] + \frac{C_1(x)}{\gamma}\right\},$$
$$\rho \to 1 + G\left[\frac{p_{11}(x)}{\gamma} + aA'(x)\right]\ln G$$
$$+ G\left\{-A'(x)\left[\ln Y + \frac{C_E}{2}\right] + \frac{C_1(x)}{\gamma}\right\}.$$

Следовательно, во внешней области $r \gg 1$, $Y = rG^a \sim$ ~ 1 возмущения искомых величин есть:

$$\Delta p \sim G[\ln G + O(1)] \sim \Delta u \sim \Delta\rho,$$
$$v \sim G^{1+a}; \quad \frac{p}{p_0} = 1 + G(P_{11}\ln G + P_1) + \dots\ ,$$
$$\frac{u}{u_0} = 1 + G(U_{11}\ln G + U_1) + \dots\ ,$$
$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 + G(R_{11}\ln G + R_1) + \dots\ , \quad \frac{v}{u_0} = G^{1+a}V_1 + \dots\ ,$$

где функции U_{11}, P_{11}, R_{11}, V_1, U_1, P_1, R_1 описывают решение во внешней области. Используя решение трансзвуковой задачи обтекания тонкого тела [11,16,17], определим показатели степени a и m и, следовательно, величины Y и K. В осесимметричном и в общем трехмерном случае ($y = Y/G^a \gg 1$, $z = Z/G^a \gg 1$) оценки дают одни и те же значения a и m. Остановимся на общем трехмерном варианте, для которого уравнение (8) имеет вид [9,11]:

$$\left(\frac{p}{\rho M_0^2} - u^2\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{p}{\rho M_0^2} - v^2\right)\frac{\partial v}{\partial y}$$
$$+ \left(\frac{p}{\rho M_0^2} - w^2\right)\frac{\partial w}{\partial z} - 2\left[uv\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right.$$
$$\left. + uw\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + vw\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\right] = 0.$$

Приравняв в первых трех слагаемых главные члены, содержащие только V_1, U_1, P_1, R_1 (уравнение Кармана–Гудерлея не содержит членов с U_{11}, P_{11}, R_{11}, а последнее слагаемое — меньше по порядку), приходим к выводу, что для получения уравнения Кармана–Гудерлея должно быть выполнено:

$$G^{m+1} \sim G^2 \sim G^{1+2a},$$

следовательно, $m = 1$, $a = 1/2$. Первое слагаемое даст нам член

$$[2K + (\gamma + 1)U_1]\,\frac{\partial U_1}{\partial x},$$

который в зависимости от его знака определяет тип уравнения (гиперболический/эллиптический). Этот ключевой член есть и в двумерном варианте (7). „Происхождение" этого члена — уравнение сохранения продольной компоненты импульса в исходных уравнениях Эйлера.

Для осесимметричного случая аналогичные оценки также приводят к $m = 1$, $a = 1/2$. В итоге для внешней области $r = YG^{-1/2}$ разложения в ряды по малому параметру имеют вид:

$$\frac{v}{u_0} = G^{3/2}V_1 + G^2[V_{22}\ln^2 G + V_{21}\ln G + V_2] + G^{5/2}\lfloor V_{32}\ln^2 G + V_{31}\ln G + V_3\rfloor + \dots\,,$$

$$\frac{u}{u_0} = 1 + G[U_{11}\ln G + U_1] + G^{3/2}[U_{22}\ln^2 G + U_{21}\ln G + U_2] + G^2\lfloor U_{32}\ln^2 G + U_{31}\ln G + U_3\rfloor + \dots\,,$$

$$\frac{p}{p_0} = 1 + G[P_{11}\ln G + P_1] + G^{3/2}[P_{22}\ln^2 G + P_{21}\ln G + P_2] + G^2\lfloor P_{32}\ln^2 G + P_{31}\ln G + P_3\rfloor + \dots\,,$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 + G[R_{11}\ln G + R_1] + G^{3/2}[R_{22}\ln^2 G + R_{21}\ln G + R_2] + G^2\lfloor R_{32}\ln^2 G + R_{31}\ln G + R_3\rfloor + \dots \tag{13}$$

Уравнения и решения для первых трех приближений, включая $\ln^2 G$ и $\ln G$, имеют вид:

— 1-е приближение

$$\gamma R_{11} = -\gamma U_{11} = P_{11}(x), \tag{14}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(R_1 + U_1) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}(\gamma U_1 + P_1) = 0,$$

$$\frac{\partial \gamma V_1}{\partial x} + \frac{\partial P_1}{\partial Y} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}(P_1 - \gamma R_1) = 0,$$

$$\gamma R_1 = -\gamma U_1 = P_1(x, Y), \quad \frac{\partial V_1}{\partial x} - \frac{\partial U_1}{\partial Y} = 0; \tag{15}$$

— 2-е приближение

$$\gamma R_{22} = -\gamma U_{22} = P_{22}(x, Y), \quad \frac{\partial V_{22}}{\partial x} - \frac{\partial U_{22}}{\partial Y} = 0, \tag{16}$$

$$\gamma R_{21} = -\gamma U_{21} = P_{21}(x, Y), \quad \frac{\partial V_{21}}{\partial x} - \frac{\partial U_{21}}{\partial Y} = 0, \tag{17}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(R_2 + U_2) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}(\gamma U_2 + P_2) = 0,$$

$$\frac{\partial \gamma V_2}{\partial x} + \frac{\partial P_2}{\partial Y} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}(P_2 - \gamma R_2) = 0,$$

$$\gamma R_2 = -\gamma U_2 = P_2(x, Y), \quad \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial U_2}{\partial Y} = 0; \tag{18}$$

— 3-е приближение

$$\frac{\partial}{\partial x}(R_{32} + U_{32}) = -\frac{\partial}{\partial x}(R_{11}U_{11}),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\gamma U_{32} + P_{32}) = 0, \quad \frac{\partial \gamma V_{32}}{\partial x} + \frac{\partial P_{32}}{\partial Y} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(P_{32} - \gamma R_{32}) = \gamma(P_{11} + U_{11})\,\frac{\partial R_{11}}{\partial x}.$$

Используя (14) и исключив R_{32}, U_{32}, P_{32}, получим

$$2U_{11}\,\frac{\partial U_{11}}{\partial x} = 0; \;\; \text{следовательно,} \;\; R_{11} \equiv 0 = U_{11} = P_{11}(x), \tag{19}$$

$$\gamma R_{32} = -\gamma U_{32} = P_{32}(x, Y), \quad \frac{\partial V_{32}}{\partial x} - \frac{\partial U_{32}}{\partial Y} = 0, \tag{20}$$

$$\gamma R_{31} = -\gamma U_{31} = P_{31}(x, Y), \quad \frac{\partial V_{31}}{\partial x} - \frac{\partial U_{31}}{\partial Y} = 0, \tag{21}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(R_3 + U_3) = -\frac{\partial}{\partial x}(R_1U_1) - \frac{1}{Y}\frac{\partial}{\partial Y}(YV_1),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\gamma U_3 + P_3) = -2\gamma K\,\frac{\partial U_1}{\partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(P_3 - \gamma R_3) = \gamma(P_1 + U_1)\,\frac{\partial R_1}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \gamma V_3}{\partial x} + \frac{\partial P_3}{\partial Y} = -2\gamma K\,\frac{\partial V_1}{\partial x}. \tag{22}$$

Исключив из первых трех уравнений в (22) величины R_3, U_3, P_3, получим

$$[2K + (\gamma + 1)U_1]\,\frac{\partial U_1}{\partial x} - \frac{1}{Y}\frac{\partial}{\partial Y}(YV_1) = 0,$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} - \frac{\partial U_1}{\partial Y} = 0. \tag{23}$$

Последнее уравнение в (23) есть (15). Уравнения (23) с краевыми условиями (12)

$$V_1\big|_{Y\to 0} \to \frac{A(x)}{Y}, \quad U_1 \to G\left\{A'(x)\left[\ln Y + \frac{C_E}{2}\right] - \frac{C_1(x)}{\gamma}\right\} \tag{24}$$

есть нелинейная трансзвуковая задача, которая допускает при некоторых значениях трансзвукового параметра K ударные волны в поле источника. Это задача для возмущений порядка $\Delta p \sim G \sim \Delta u \sim \Delta\rho$, а в главном приближении имеем $\Delta\rho \sim G\ln G \sim \Delta u \sim \Delta\rho$ в поле источника. Как следует из (14), величины R_{11}, U_{11}, P_{11} не зависят от поперечной координаты Y и, согласно (19), — тождественно равны нулю. Тогда, согласно краевому условию (12) при $Y = 0$, выполняя сращивание внешнего и внутреннего решений, получим:

$$P_{11} = p_{11}(x) + \frac{\gamma A'(x)}{2} \equiv 0, \quad p_{11}(x) = -\frac{\gamma A'(x)}{2},$$

$$u_{11}(x) = \frac{A'(x)}{2} = -\rho_{11}(x).$$

Таким образом, в главном приближении $\sim G \ln G$ в осесимметричном случае решение для слабого распределенного теплового источника не имеет скачков (ударных волн).

Общий трехмерный случай

Пусть $f(x, y, z)$ — произвольная трехмерная функция, достаточно быстро убывающая при больших значениях координат, чтобы полный интеграл по всем координатам от f был конечным. Разложения в ряд по малому параметру искомых величин для внутренней задачи в масштабе $y \sim 1$, $z \sim 1$ запишем в виде:

$$\frac{u}{u_0} = 1 + G(u_{11} \ln G + u_1) + \dots,$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 + G(\rho_{11} \ln G + \rho_1) + \dots,$$

$$\frac{p}{p_0} = 1 + G(p_{11} \ln G + p_1) + \dots,$$

$$\frac{v}{u_0} = Gv_1 + \dots, \quad \frac{w}{u_0} = Gw_1 + \dots \tag{25}$$

Подставив разложения (25) в уравнения Эйлера, получим

$$\gamma\rho_{11} = -\gamma u_{11} = p_{11}(x), \tag{26}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho_1 + u_1) + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}(\gamma u_1 + p_1) = 0,$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial z} = 0$$

(условия безвихренности, потенциальности течения),

$$\frac{\partial}{\partial x}(p_1 - \gamma\rho_1) = f(x, y, z). \tag{27}$$

Введем потенциал возмущений скорости Φ:

$$u_1 = \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \quad v_1 = \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \quad w_1 = \frac{\partial\Phi}{\partial z}.$$

Из последнего уравнения (27), с учетом связей p_1 и ρ_1 с u_1, v_1, w_1, получим

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = \frac{f(x, y, z)}{\gamma}. \tag{28}$$

Общее решение есть:

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{2\pi\gamma} \times \int_{-\infty}^{\infty}\int f(x, \eta, \xi) \ln\sqrt{(y-\eta)^2 + (z-\xi)^2}\, d\eta d\xi. \tag{29}$$

Раскладываем выражение под корнем при больших значениях $y \gg \eta \sim 1$ и $z \gg \xi \sim 1$ в области, где $f(x, \eta, \xi) \sim 1$. При $\eta, \xi \gg 1$ в силу убывания f вклад в интеграл будет меньше по порядку величины, чем при $\eta \sim 1$, $\xi \sim 1$. Член с логарифмом от корня представим в виде

$$\ln\sqrt{y^2 + z^2 + [-2y\eta - 2z\xi + \eta^2 + \xi^2]}$$

$$\approx \ln r - \frac{y\eta + z\xi}{r^2} + \frac{\eta^2 + \xi^2}{2r^2} - \frac{y^2\eta^2 + z^2\xi^2}{r^4} + \dots,$$

$$r^2 = y^2 + z^2. \tag{30}$$

Подставим (30) в (29). Второй член из (30) в силу антисимметричности даст нуль при интегрировании в (29), а оставшиеся определяют главный член для потенциала

$$\Phi = \frac{1}{2\pi\gamma}\left\{F_1(x)\ln r + \frac{(z^2 - y^2)\big(F_2(x) - F_3(x)\big)}{2r^4}\right\},$$

$$F_1(x) = \int\int_{-\infty}^{\infty} f(x, \eta, \xi)\, d\eta d\xi,$$

$$F_2(x) = \int\int_{-\infty}^{\infty} \eta^2 f\, d\eta d\xi, \quad F_3(x) = \int\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 f\, d\eta d\xi, \tag{31}$$

$$u_1 = \frac{1}{2\pi\gamma}\left\{F_1'(x)\ln r + \frac{(z^2 - y^2)\big(F_2'(x) - F_3'(x)\big)}{2r^4}\right\},$$

$$\rho_1 = -u_1 - \frac{1}{\gamma}\int_{-\infty}^{x} f(x', y, z)dx',$$

$$v_1 = \frac{y}{2\pi\gamma r^2}\left\{F_1(x) + \frac{(y^2 - 3z^2)\big(F_2(x) - F_3(x)\big)}{r^4}\right\},$$

$$p_1 = -\gamma u_1(x, y, z),$$

$$w_1 = \frac{z}{2\pi\gamma r^2}\left\{F_1(x) + \frac{(3y^2 - z^2)\big(F_2(x) - F_3(x)\big)}{r^4}\right\}.$$

Во внешних переменных $Y = yG^{1/2}$, $Z = zG^{1/2}$ получим

$$p_1(x, Y, Z) \to -\frac{1}{\pi}\left\{F_1'(x)\left[-\frac{1}{2}\ln G + \ln r_e\right] + G\,\frac{F_2'(x) - F_3'(x)}{r_e^4}(Z^2 - Y^2)\right\},$$

$$r_e^2 = Y^2 + Z^2,$$

$$v_1 \to \frac{YF_1(x)}{2\gamma\pi r_e^2}G^{1/2} + \dots,$$

$$w_1 \to \frac{ZF_1(x)}{2\gamma\pi r_e^2}G^{1/2} + \dots, \quad u_1 = -\rho_1 = -\frac{p_1}{\gamma}.$$

Окончательно для давления, плотности и компонент скорости находим выражения:

$$\frac{p(x,Y,Z)}{p_0} \approx 1 + G\left[\left(p_{11}(x) + \frac{F_1'(x)}{4\pi}\right)\ln G - \frac{F_1'(x)}{2\pi}\ln r_e\right] + \dots, \tag{32}$$

$$\frac{u(x,Y,Z)}{u_0} \approx 1 + G\left[\left(u_{11}(x) - \frac{F_1'(x)}{4\pi\gamma}\right)\ln G - \frac{F_1'(x)}{2\pi\gamma}\ln r_e\right] + \dots,$$

$$\frac{\rho(x,Y,Z)}{\rho_0} \approx 1 + G\left[\left(\rho_{11}(x) + \frac{F_1'(x)}{4\pi\gamma}\right)\ln G - \frac{F_1'(x)}{2\pi\gamma}\ln r_e\right] + \dots,$$

$$\frac{v}{u_0} \approx G^{3/2}\frac{YF_1(x)}{2\gamma\pi r_e^2} + \dots, \quad \frac{w}{u_0} \approx G^{3/2}\frac{ZF_1(x)}{2\gamma\pi r_e^2} + \dots$$

Из асимптотических выражений следует вид разложений для внешней задачи в масштабе $y = YG^{-1/2}$, $z = ZG^{-1/2}$, $Y, Z \sim 1$:

$$\frac{p(x,Y,Z)}{p_0} = 1 + G[P_{11}\ln G + P_1] + G^{3/2}P_2 + G^2[P_{32}\ln^2 G + P_{31}\ln G + P_3] + \dots,$$

$$\frac{\rho(x,Y,Z)}{\rho_0} = 1 + G[R_{11}\ln G + R_1] + G^{3/2}R_2 + G^2[R_{32}\ln^2 G + R_{31}\ln G + R_3] + \dots,$$

$$\frac{u(x,Y,Z)}{u_0} = 1 + G[U_{11}\ln G + U_1] + G^{3/2}U_2 + G^2[U_{32}\ln^2 G + U_{31}\ln G + U_3] + \dots,$$

$$\frac{v}{u_0} = G^{3/2}V_1 + G^2V_2 + G^{5/2}[V_{32}\ln^2 G + V_{31}\ln G + V_3] + \dots,$$

$$\frac{w}{u_0} = G^{3/2}W_1 + G^2W_2 + G^{5/2}[W_{32}\ln^2 G + W_{31}\ln G + W_3] + \dots \tag{33}$$

Трансзвуковой параметр подобия есть $K = (M_0 - 1)/G$, как показано выше. Подстановка (33) в уравнения Эйлера дает:

$$\gamma R_{11} = -\gamma U_{11} = P_{11}(x), \tag{34}$$

$$P_1 = -\gamma U_1 = \gamma R_1(x,Y,Z),$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} - \frac{\partial U_1}{\partial Y} = 0,$$

$$\frac{\partial W_1}{\partial x} - \frac{\partial U_1}{\partial Z} = 0 \quad \text{(условия безвихренности);} \tag{35}$$

— 2-е приближение

$$\frac{\partial}{\partial x}(R_2 + U_2) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}(\gamma U_2 + P_2) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\gamma V_2 + \frac{\partial}{\partial Y}P_2 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}\gamma W_2 + \frac{\partial}{\partial Z}P_2 = 0,$$

следовательно, при нулевых краевых условиях подходит решение:

$$R_2 = 0 = U_2 = P_2 = W_2 = V_2. \tag{36}$$

Более общее решение с точностью до одной неизвестной функции $P_2(x,Y,Z)$ есть (можно также свести систему к уравнению Лапласа для потенциала):

$$U_2 = -\frac{P_2}{\gamma} = -R_2, \quad V_2 = -\gamma\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{\partial P_2(x',Y,Z)}{\partial Y}\,dx',$$

$$W_2 = -\gamma\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{\partial P_2(x',Y,Z)}{\partial Z}\,dx'. \tag{37}$$

— 3-е приближение

$$\frac{\partial}{\partial x}(R_{32} + U_{32}) = -\frac{\partial}{\partial x}(R_{11}U_{11}), \quad \frac{\partial}{\partial x}(\gamma U_{32} + P_{32}) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\gamma V_{32} + \frac{\partial}{\partial Y}P_{32} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}\gamma W_{32} + \frac{\partial}{\partial Z}P_{32} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(P_{32} - \gamma R_{32}) = \gamma(P_{11} + U_{11})\frac{\partial R_{11}}{\partial x}.$$

Исключив R_{32}, U_{32}, P_{32} находим:

$$R_{11} \equiv 0 = U_{11} = P_{11}, \tag{38}$$

при этом

$$\gamma R_{32} = -\gamma U_{32} = P_{32}(x,Y,Z),$$

$$\frac{\partial V_{32}}{\partial x} - \frac{\partial U_{32}}{\partial Y} = 0, \quad \frac{\partial W_{32}}{\partial x} - \frac{\partial U_{32}}{\partial Z} = 0, \tag{39}$$

аналогично

$$\gamma R_{31} = -\gamma U_{31} = P_{31}(x,Y,Z),$$

$$\frac{\partial V_{31}}{\partial x} - \frac{\partial U_{31}}{\partial Y} = 0, \quad \frac{\partial W_{31}}{\partial x} - \frac{\partial U_{31}}{\partial Z} = 0.$$

Можно ввести функции возмущений потенциала Φ_{31}, Φ_{32}. Например, для Φ_{31}

$$V_1 = \frac{\partial \Phi_{31}}{\partial Y}, \quad W_1 = \frac{\partial \Phi_{31}}{\partial Z}, \quad \frac{\partial^2 \Phi_{31}}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{31}}{\partial Z^2} = 0. \tag{40}$$

Завершаем третье приближение

$$\frac{\partial}{\partial x}(R_3+U_3)=-\frac{\partial}{\partial x}(R_1U_1)-\frac{\partial V_1}{\partial Y}-\frac{\partial W_1}{\partial Z},$$
$$\frac{\partial}{\partial x}(\gamma U_3+P_3)=-2\gamma K\frac{\partial U_1}{\partial x},$$
$$\frac{\partial}{\partial x}(P_3-\gamma R_3)=\gamma(P_1+U_1)\frac{\partial R_1}{\partial x},$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\gamma V_3+\frac{\partial}{\partial Y}P_3=-2\gamma K\frac{\partial V_1}{\partial x},$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\gamma W_3+\frac{\partial}{\partial Y}P_3=-2\gamma K\frac{\partial W_1}{\partial x}. \quad (41)$$

Исключив из первых трех уравнений в (41) величины R_3, U_3, P_3, получим с учетом (34):

$$[2K+(\gamma+1)U_1]\frac{\partial U_1}{\partial x}-\frac{\partial V_1}{\partial Y}-\frac{\partial W_1}{\partial Z}=0,$$
$$\frac{\partial V_1}{\partial x}-\frac{\partial U_1}{\partial Y}=0,\quad \frac{\partial W_1}{\partial x}-\frac{\partial U_1}{\partial Z}=0. \quad (42)$$

Введя потенциал возмущений Φ_1 такой, что $U_1=\partial\Phi_1/\partial x$, $V_1=\partial\Phi_1/\partial y$, $W_1=\partial\Phi_1/\partial z$, находим:

$$\left[2K+(\gamma+1)\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\right]\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial Y^2}-\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial Z^2}=0. \quad (43)$$

Краевые условия:

$$\Phi_{1x}\big|_{r_e\to 0}\to\frac{F_1'(x)}{2\gamma\pi}\ln r_e,\quad \Phi_{1Y}\big|_{r_e\to 0}\to\frac{F_1(x)}{2\gamma\pi}\,\frac{Y}{r_e^2},$$
$$\Phi_{1Z}\big|_{r_e\to 0}\to\frac{F_1(x)}{2\gamma\pi}\,\frac{Z}{r_e^2}. \quad (44)$$

Уравнение (43) с краевыми уcлвиями (44) — это нелинейная трансзвуковая задача Кармана–Гудерлея, которая допускает, при некоторых значениях параметра K, наличие ударных волн (скачков) в поле источника для возмущений порядка $\Delta p\sim G\sim\Delta u\sim\Delta\rho$.

В главном приближении имеем возмущения более высокого порядка $\Delta p\sim G\ln G\sim\Delta u\sim\Delta\rho$ в поле источника. Используя (38), согласно которому $R_{11}\equiv 0=U_{11}=P_{11}$, и разложения для внутреннего решения (32), взятые при $Y,Z\to 0$ $(r_e=(Y^2+Z^2)^{1/2}\to 0)$,

$$P_{11}\big|_{r_e\to 0}\to p_{11}(x)+\frac{F_1'(x)}{4\pi},$$
$$U_{11}\big|_{r_e\to 0}\to u_{11}(x)-\frac{F_1'(x)}{4\pi\gamma},$$
$$R_{11}\big|_{r_e\to 0}\to \rho_{11}(x)+\frac{F_1'(x)}{4\pi\gamma},$$

получим главные члены для внутреннего решения в области $y_{\text{phys}}\sim r_0$, $z_{\text{phys}}\sim r_0$:

$$p_{11}(x)=-\frac{F_1'(x)}{4\pi}=-\gamma u_{11}=\gamma\rho_{11},$$
$$F_1(x)=\int\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,\eta,\xi)d\eta d\xi,\quad F_1'=\frac{dF_1}{dx}.$$

В общем виде для произвольной интенсивности источника $f(x,y,z)$ имеем решения при $y,z\sim 1$:

$$\frac{p}{p_0}=1+G[p_{11}(x)\ln G+p_1(x,y,z)]+\ldots,$$
$$\Delta u\approx-\Delta\rho\approx-\frac{\Delta p}{\gamma}\approx-\frac{p_{11}(x)}{\gamma}G\ln G,$$
$$\frac{v}{u_0}=Gv_1(x,y,z)+\ldots,\quad \frac{w}{u_0}=Gw_1+\ldots \quad (45)$$

Следовательно, в главном приближении $\sim G\ln G$ в общем трехмерном случае решение для слабого распределенного теплового источника не имеет скачков (ударных волн) в области источника.

Заключение

В осесимметричном и в общем трехмерном случае распределенного теплового источника слабой интенсивности в трансзвуковом потоке в главном приближении ударных волн нет в области источника. Возмущения давления, плотности, продольной компоненты скорости зависят только от одной продольной по потоку координаты x. Зависимости от поперечных координат начинают проявляться на больших расстояниях порядка $r_{\text{phys}}\sim r_0G^{-1/2}$. В этом масштабе в следующем приближении по малому параметру задача описывается нелинейным трансзвуковым уравнением Кармана–Гудерлея, решение которого, как известно, при некоторых значениях трансзвукового параметра подобия K включает ударные волны.

Отсутствие скачков плотности внутри лазерного пучка в главном приближении на участках сильного поглощения или фокусировки (с нарушением предположения о двумерности источника тепловыделения в газ) есть благоприятный фактор, например, для эффекта теплового самовоздействия [15], который играет важную роль в задаче транспортировки лазерного излучения на большие расстояния.

Работа выполнена при поддержке Государственной программы ведущих научных школ (грант НШ-4272.2006.1) и программы № П-09 президиума РАН.

Список литературы

[1] *Райзер Ю.П.* Физика газового разряда. М.: Наука, 1994. 536 с.
[2] *Третьяков П.К., Грачев Г.Н., Иванченко А.И.* и др. // ДАН. 1994. Т. 336. № 4. С. 466–467.
[3] *Третьяков П.К., Гаранин Г.Ф., Грачев Г.Н.* и др. // ДАН. 1996. Т. 351. № 3. С. 339–340.
[4] *Кучеров А.Н.* // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 7. С. 74–77.
[5] *Ершов А.П., Сурконт О.С., Тимофеев И.Б.* и др. // ТВТ. 2004. Т. 42. № 4. С. 516–522.
[6] *Станюкович К.П.* Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Наука, 1971. 854 с.

[7] *Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966. 686 с.
[8] *Гудерлей К.* Теория околозвуковых течений. М.: ИЛ, 1960. 422 с. (Guderley K.G. Theorie Schallnaher Strömungen. Göttingen: Springer-Verlag, 1957).
[9] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
[10] *Черный Г.Г.* Газовая динамика. М.: Наука, 1988. 424 с.
[11] *Коул Дж., Кук Л.* Трансзвуковая аэродинамика. М.: Мир, 1989. 360 с. (Transonic Aerodynamics. N. Y.: Elsevier Science Publishers B.V., 1986).
[12] *Коган М.Н., Кучеров А.Н.* // Изв. вузов. Физика. 1983. Т. 26. № 2. С. 104–110.
[13] *Коган М.Н., Кучеров А.Н., Михайлов В.В., Фонарев А.С.* // Изв. АН. Механика жидкости и газа. 1978. № 5. С. 95–102.
[14] *Кучеров А.Н.* // ДАН. 1998. Т. 363. № 3. С. 315–318.
[15] *Кучеров А.Н.* // ЖЭТФ. 1999. Т. 116. Вып. 1(7). С. 105–129.
[16] *Karman T.* // J. of Mathematics and Physics. 1947. Vol. 26. N 3. P. 182–190.
[17] *Cole J.D., Messiter A.F.* // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik (ZAMP). 1957. Bd VIII. N 1. S. 1–25.
[18] *Brown R.T., Smith D.C.* // Appl. Phys. Lett. 1974. Vol. 25. N 9. P. 500–503.
[19] Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовиц, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с. (Handbook of Mathematical Functions / Ed. by M. Abramowitz and I.A. Stegun. USA, 1964).