

# Гравитационное и электростатическое поле однородного кругового конуса

© Б.П. Кондратьев, Н.Г. Трубицына

Удмуртский государственный университет,  
426034 Ижевск, Россия  
e-mail: kond@uni.udm.ru

(Поступило в Редакцию 23 марта 2009 г.)

Поставлена и методом контурных интегралов решена задача о простейших элементах, представляющих внешнее поле гравитирующего (или заряженного статическим электричеством) однородного кругового конуса. Выяснено, что точка заострения имеет логарифмическую особенность и в эквиравитирующей каркас фигуры не входит. В целом для конуса существует только один эквиравитирующий стержень с чисто мнимой плотностью, представленной элементарными функциями. Доказано, что этот стержень удовлетворяет всем необходимым требованиям: его масса и пространственный потенциал вещественны и эквивалентны аналогичным характеристикам конуса. Независимая проверка в асимптотическом пределе неоднородного круглого диска подтверждает главный результат. С помощью стержня пространственный потенциал конуса выражен вначале через однократный интеграл, а затем — через стандартные полные эллиптические интегралы и через специальный ряд по гармоническим функциям. Получено семейство эквипотенциалей.

PACS: 02.30.Em

## Введение

Ньютоновские гравитационные и кулоновские электростатические силы зависят от расстояния по закону квадратов, консервативны и обладают потенциалом. В физике и астрономии важно знать силовые поля и потенциалы для тел самой разной формы. Однако из-за математических трудностей список тел с известным потенциалом и донныне остается весьма кратким. Из трехмерных тел трудами классиков были всесторонне изучены шары и эллипсоиды (однородные или с гомотетичной структурой), см., например, [1,2]. Недавно [3,4] были получены новые результаты для эллипсоидов с более сложной внутренней структурой слоев, однородных кубоидов, шаровых линз и для частных случаев тора. Определенный прогресс намечился и в нахождении потенциалов для двумерных тел, включая однородные и неоднородные круглые и эллиптические диски [4]. Подчеркнем, что эти и многие другие результаты были получены с помощью новых методов, развитых в монографиях [3,4].

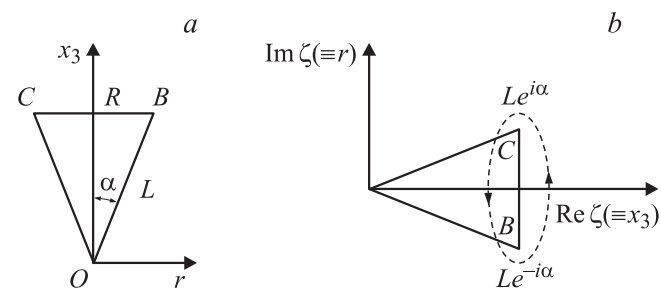
В теории потенциала появилось новое направление со своими методами и задачами: теория эквиравитирующих элементов. Речь идет о доказательстве существования и методах поиска эквиравитирующих элементов, с помощью которых внешние силовые поля осесимметричных тел можно представлять уже не в виде тройных интегралов, а в более простом виде: через однократные интегралы, или даже в конечном виде. К таким элементам относят стержни и диски с реальной или комплексной на них плотностью, а также материальные точки. Продуктивным является и метод представления потенциалов тел и с помощью

софокусных оболочек, сплошных слоисто-неоднородных сфероидов и трехосных эллипсоидов [3,4].

В настоящей работе решена задача об одномерном стержне, с помощью которого удастся точно представить внешнее силовое поле однородного гравитирующего (или заряженного статическим электрическим зарядом) кругового конуса. С помощью стержня получено выражение пространственного потенциала конуса. Проведена всесторонняя проверка результатов.

## 1. Постановка задачи и эквиравитирующий стержень

Дан однородный круговой конус (рис. 1, *a*), начало системы отсчета в его вершине  $O$ . Ранее в [3,4] уже была найдена гравитационная (электростатическая) энергия



**Рис. 1.** Сечение конуса (*a*) и его поворот на  $90^\circ$  в комплексной плоскости (*b*).  $B$  и  $C$  — особые точки для потенциала конуса, аналитически продолженного внутрь фигуры. Штрихами показан контур интегрирования, натягиваемый на эти точки.

этого тела. Однако внешний потенциал конуса до сих пор не был известен.

Для решения задачи воспользуемся методом § 9.8 из [4]. В цилиндрических координатах замена  $\xi = x_3 + ir$  на комплексной плоскости приводит к повороту сечения фигуры конуса на  $90^\circ$  (рис. 1, b). Основная формула метода имеет вид

$$\mu(\xi) = \frac{\varphi_I(\xi) - \varphi_{II}(\xi)}{2i\pi G} \quad (1)$$

и выражает плотность эквигравитирующего стержня через разность потенциалов на двух ветвях аналитического продолжения внешнего потенциала на внутренние точки фигуры.

Важно подчеркнуть, что потенциал на контуре получается из внешнего потенциала конуса на его оси симметрии ([3], формула (13.67)) путем замены координаты  $x_3$  на указанную  $\xi$ . После замены  $\text{Arsh}(\dots)$  через логарифм этот потенциал принимает форму

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{con}}(\xi) = & \frac{3GM_{\text{con}}}{L} \\ & \times \left\{ \frac{(1 - \xi \cos \alpha) \sqrt{\xi^2 - 2\xi \cos \alpha + 1} + \xi^2 \cos \alpha - 2\xi + \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \right. \\ & \left. + \xi^2 \ln \frac{1 - \xi \cos \alpha + \sqrt{\xi^2 - 2\xi \cos \alpha + 1}}{\xi(1 - \cos \alpha)} \right\}, \quad (2) \end{aligned}$$

где сделана нормировка  $\xi \equiv \frac{x}{L}$ , а масса конуса

$$M_{\text{con}} = \frac{1}{3} \pi L^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha. \quad (3)$$

Особые точки для аналитического продолжения потенциала (2) совпадают с углами  $B$  и  $C$  сечения основания конуса и даются выражениями  $\xi_{1,2} = e^{\mp i\alpha}$ . Действительно, радикал в этих точках в силу очевидного равенства

$$\sqrt{\xi^2 - 2\xi \cos \alpha + 1} = \sqrt{(\xi - e^{-i\alpha})(\xi - e^{i\alpha})} \quad (4)$$

обращается в нуль. Важно заметить и то, что в точке заострения конуса  $O$  второй член в (2) имеет лишь логарифмическую особенность  $\lim_{\xi \rightarrow 0} \xi^2 \ln \xi = 0$ , поэтому сама эта точка выпадает из эквигравитирующего каркаса конуса.

Следуя данному методу, контур, накинутый на фигуру конуса, натягивается лишь на две отмеченные особые точки  $B$  и  $C$  (которые являются точками ветвления второго порядка для радикала (4)). В пределе этот контур превращается в эквигравитирующий стержень, плотность на котором, согласно (1), выражается через элементарные функции

$$\begin{aligned} \mu_{\text{con}}(\xi) = & -i \frac{3M_{\text{con}}}{\pi L} \left\{ \frac{(1 - \xi \cos \alpha) \sqrt{\xi^2 - 2\xi \cos \alpha + 1}}{\sin^2 \alpha} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \xi^2 \ln \frac{1 - \xi \cos \alpha + \sqrt{\xi^2 - 2\xi \cos \alpha + 1}}{1 - \xi \cos \alpha - \sqrt{\xi^2 - 2\xi \cos \alpha + 1}} \right\}. \quad (5) \end{aligned}$$

## 2. Проверка стержня (5) по массе

Массы эквигравитирующего стержня  $M_r$  и исходного конуса  $M_{\text{con}}$  должны быть одинаковы. Для удобства расчетов полную плотность (5) стержня разделим на две части:

$$\mu_1(\xi) = -i \frac{3M_{\text{con}}}{\pi L} \frac{(1 - \xi \cos \alpha) \sqrt{\xi^2 - 2\xi \cos \alpha + 1}}{\sin^2 \alpha}, \quad (6)$$

$$\mu_2(\xi) = -i \frac{3M_{\text{con}}}{2\pi L} \xi^2 \ln \frac{1 - \xi \cos \alpha + \sqrt{\xi^2 - 2\xi \cos \alpha + 1}}{1 - \xi \cos \alpha - \sqrt{\xi^2 - 2\xi \cos \alpha + 1}}. \quad (7)$$

По определению, масса стержня выражается интегралом

$$M_r = L \int_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} [\mu_1(\xi) + \mu_2(\xi)] d\xi. \quad (8)$$

Вначале находим в (8) вспомогательные интегралы:

$$\begin{aligned} I_1 = & \int_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} (1 - \xi \cos \alpha) \sqrt{\xi^2 - 2\xi \cos \alpha + 1} d\xi \\ = & \frac{i\pi}{2} \sin^4 \alpha; \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 = & \frac{1}{2} \int_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \xi^2 \ln \frac{1 - \xi \cos \alpha + \sqrt{\xi^2 - 2\xi \cos \alpha + 1}}{1 - \xi \cos \alpha - \sqrt{\xi^2 - 2\xi \cos \alpha + 1}} d\xi \\ = & \frac{i\pi}{6} (3 \cos^2 \alpha - 1). \quad (10) \end{aligned}$$

Сложив (9) и (10), получим

$$M_r = \frac{1}{3} \pi \rho L^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha = M_{\text{con}}, \quad (11)$$

что и требовалось доказать.

## 3. Проверка эквигравитирующего стержня по потенциалу

Основное свойство стержня с плотностью (5) — быть эквигравитирующим исходному конусу, т.е. оба тела должны создавать одинаковые внешние гравитационные поля. Поскольку внешний потенциал — функция гармоническая, достаточно доказать эквивалентность потенциалов конуса и найденного стержня только на оси симметрии.

Потенциал во внешней точке  $x_3$  на линии эквигравитирующего стержня выражается интегралом

$$\varphi_r(x_3) = G \int_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \frac{\mu(\xi)}{x_3 - \xi} d\xi. \quad (12)$$

Подставив сюда (6) и (7), последовательно находим:

$$I_3 = G \int_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \frac{\mu_1(\xi)}{x_3 - \xi} d\xi = \frac{GM_{\text{con}}}{L} \frac{3}{\sin^2 \alpha} \times \left\{ (1 - x_3 \cos \alpha) \sqrt{x_3^2 - 2x_3 \cos \alpha + 1} + \left( \frac{9}{8} + x_3^2 \right) \cos \alpha - \frac{x_3}{2} (3 + \cos 2\alpha) - \frac{\cos 3\alpha}{8} \right\}, \quad (13)$$

$$I_4 = G \int_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \frac{\mu_2(\xi)}{x_3 - \xi} d\xi = \frac{3GM_{\text{con}}}{L} \left\{ -x_3 - \frac{1}{2} \cos \alpha + x_3^2 \ln \frac{1 - x_3 \cos \alpha + \sqrt{x_3^2 - 2x_3 \cos \alpha + 1}}{x_3(1 - \cos \alpha)} \right\}. \quad (14)$$

Объединив теперь (13) и (14), для полного потенциала на оси  $\varphi_r(x_3)$  из (12) в итоге получим выражение

$$\varphi_r(x_3) = \frac{3GM_{\text{con}}}{L} \times \left\{ \frac{(1 - x_3 \cos \alpha) \sqrt{x_3^2 - 2x_3 \cos \alpha + 1} + x_3^2 \cos \alpha - 2x_3 + \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} + x_3^2 \ln \frac{1 - x_3 \cos \alpha + \sqrt{x_3^2 - 2x_3 \cos \alpha + 1}}{x_3(1 - \cos \alpha)} \right\}, \quad (15)$$

которое действительно совпадает с потенциалом самого конуса (2) на оси симметрии при замене в нем  $\xi \rightarrow x_3$ . Доказательство закончено.

#### 4. Асимптотический предел диска

Важной независимой проверкой формулы (4) является асимптотический переход  $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$ , когда конус с фиксированными  $L$  и  $M_{\text{con}}$  превращается в неоднородный круглый диск с поверхностной плотностью [4, стр. 403]

$$\sigma(r) = \frac{3M_{\text{con}}}{\pi L^2} \left( 1 - \frac{r}{L} \right). \quad (16)$$

Легко убедиться, что массы стержня с плотностью (5) и диска с плотностью (16) действительно будут одинаковыми:  $M_r = M_{\text{con}}$ . Далее диск с плотностью (16) имеет, согласно [4, стр. 285], эквигравитирующий стержень

$$\mu_r(\xi) = -i \frac{3M_{\text{con}}}{\pi L^2} \left( \sqrt{L^2 + \xi^2} + \frac{\xi^2}{2L} \ln \frac{L + \sqrt{L^2 + \xi^2}}{L - \sqrt{L^2 + \xi^2}} \right), \quad -L \leq \frac{\xi}{i} \leq L \quad (17)$$

и, как следствие, потенциал на оси симметрии этого диска

$$\varphi_d(x_3) = \frac{3GM_{\text{con}}}{L^2} \times \left\{ \sqrt{L^2 + \xi^2} - 2|x_3| + \frac{x_3^2}{L} \ln \frac{L + \sqrt{L^2 + \xi^2}}{|x_3|} \right\}. \quad (18)$$

С другой стороны, прямой переход  $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$  в самой формуле (5) дает (далее опять используется нормировка  $\xi \equiv \frac{\xi}{L}$ ) как раз то выражение плотности стержня

$$\mu_r(\xi) = -\frac{3iM_{\text{con}}}{\pi L} \left\{ \sqrt{1 + \xi^2} + \frac{\xi^2}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{1 + \xi^2}}{1 - \sqrt{1 + \xi^2}} \right\}, \quad (19)$$

которое совпадает с (17). Поскольку выражение (17) было получено в [4] методом, совершенно не зависимым от применяемого здесь, то совпадение результатов (17) и (19) в дисковом пределе является важной проверкой правильности проводимых расчетов.

#### 5. Пространственный потенциал конуса через эквигравитирующий стержень

В пространственной точке  $(r, x_3)$  вместо (12) имеем теперь более сложный интеграл

$$\varphi_r(r, x_3) = G \int_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \frac{\mu(\xi)}{\sqrt{r^2 + (x_3 - \xi)^2}} d\xi = -iG\rho L^2 \cos \alpha \left\{ I_1 - I_2 \cos \alpha + \frac{I_3 \sin^2 \alpha}{2} \right\}. \quad (20)$$

Задача сводится к нахождению трех сложных интегралов в комплексной плоскости

$$I_1 = \int_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \sqrt{\frac{\xi^2 - 2\xi \cos \alpha + 1}{r^2 + (x_3 - \xi)^2}} d\xi; \quad I_2 = \int_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \xi \sqrt{\frac{\xi^2 - 2\xi \cos \alpha + 1}{r^2 + (x_3 - \xi)^2}} d\xi; \quad I_3 = \int_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \frac{\xi^2}{\sqrt{r^2 + (x_3 - \xi)^2}} \times \ln \frac{1 - \xi \cos \alpha + \sqrt{\xi^2 - 2\xi \cos \alpha + 1}}{1 - \xi \cos \alpha - \sqrt{\xi^2 - 2\xi \cos \alpha + 1}} d\xi. \quad (21)$$

Анализ показал, что первые два интеграла в (21) все же можно выразить в конечном виде.

Вычисление интеграла  $I_1$ 

Запишем его в виде

$$I_1 = \int_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \sqrt{\frac{(\xi - e^{-i\alpha})(\xi - e^{i\alpha})}{(x_3 + ir - \xi)(x_3 - ir - \xi)}} d\xi \quad (22)$$

и сделаем нетривиальную дробно-линейную замену

$$\xi = \kappa \frac{z + ia_1}{z + ia_2}, \quad (23)$$

где параметры  $a_1$  и  $a_2$  находим из условий

$$e^{-i\alpha} = \kappa \frac{-1 + ia_1}{-1 + ia_2}; \quad e^{i\alpha} = \kappa \frac{1 + ia_1}{1 + ia_2}, \quad (24)$$

так что новая переменная  $-1 \leq z \leq 1$ . Кроме того, для преобразования знаменателя в (21) запишем комплексные координаты в виде

$$x_3 - ir = \kappa \frac{-\frac{1}{k} + ia_1}{-\frac{1}{k} + ia_2}; \quad x_3 + ir = \kappa \frac{\frac{1}{k} + ia_1}{\frac{1}{k} + ia_2}. \quad (25)$$

Решив систему двух линейных уравнений (24), найдем параметры преобразования

$$a_1 = \frac{1 - \kappa \cos \alpha}{\kappa \sin \alpha}; \quad a_2 = \frac{\cos \alpha - \kappa}{\sin \alpha}. \quad (26)$$

С учетом вида  $a_1$  и  $a_2$  система двух нелинейных уравнений (25) в итоге дает

$$\kappa = \frac{-1 + r^2 + x_3^2 \sin \alpha \sqrt{-4r^2 + \left[-2x_3 \operatorname{ctg} \alpha + \frac{(1+r^2+x_3^2)}{\sin \alpha}\right]^2}}{3(x_3 - \cos \alpha)},$$

$$k = \frac{1+r^2+x_3^2-2x_3 \cos \alpha - \sin \alpha \sqrt{-4r^2 + \left[-2x_3 \operatorname{ctg} \alpha + \frac{(1+r^2+x_3^2)}{\sin \alpha}\right]^2}}{2r \sin \alpha}. \quad (27)$$

Заметим, что из (27) является модулем используемых ниже полных эллиптических интегралов.

Указанной заменой (23) интеграл  $I_1$  из (21) приводится к виду

$$I_1 = i\kappa(a_2 - a_1) \sqrt{\frac{1 + k^2 a_2^2}{1 + a_2^2}} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1 - z^2}{1 - k^2 z^2}} \frac{dz}{(z + ia_2)^2} \quad (28)$$

или, после избавления от мнимости,

$$I_1 = 2i\kappa(a_2 - a_1) \sqrt{\frac{1 + k^2 a_2^2}{1 + a_2^2}} \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - z^2}{1 - k^2 z^2}} \frac{z^2 - a_2^2}{(z^2 + a_2^2)^2} dz. \quad (29)$$

В эквивалентной форме

$$I_1 = 2i\kappa(a_2 - a_1) \sqrt{\frac{1 + k^2 a_2^2}{1 + a_2^2}} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} \times \left\{ -1 + \frac{1 + 3a_2^2}{z^2 + a_2^2} - \frac{2(1 + a_2^2)}{a_2^2 \left(1 + \frac{z^2}{a_2^2}\right)^2} \right\}. \quad (30)$$

В итоге  $I_1$  удастся выразить через стандартные полные эллиптические интегралы второго и третьего рода:

$$I_1 = 2i\kappa(a_2 - a_1) \frac{(1 - k^2) \Pi \left[ -\frac{1}{a_2^2}, k \right] - E(k)}{\sqrt{(1 + a_2^2)(1 + k^2 a_2^2)}}. \quad (31)$$

Вычисление интеграла  $I_2$ 

Та же замена (23) приводит интеграл  $I_2$  из (21) к форме

$$I_2 = i\kappa^2(a_2 - a_1) \sqrt{\frac{1 + k^2 a_2^2}{1 + a_2^2}} \times \int_{-1}^1 \frac{(1 - z^2)(z + ia_1) dz}{(z + ia_2)^3 \sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}, \quad (32)$$

причем здесь часть подынтегрального выражения можно представить в виде

$$\frac{(1 - z^2)(z + ia_1)}{(z + ia_2)^3} = -1 - i(a_2 - a_1) \frac{1 + a_2^2}{(z + ia_2)^3} + \frac{1 - 2a_1 a_2 + 3a_2^2}{(z + ia_2)^2} + i \frac{3a_2 - a_1}{z + ia_2}. \quad (33)$$

С учетом (33) интеграл (32) после трудоемких преобразований удастся взять и привести к виду

$$I_2 = i\kappa^2(a_2 - a_1) \sqrt{\frac{1 + k^2 a_2^2}{1 + a_2^2}} \times \left\{ -\frac{2 - a_2 [a_1 - 3a_2 + (a_2 - a_1(3 + 2a_2^2)) k^2]}{(1 + a_2^2)(1 + k^2 a_2^2)^2} \times E(k) + \frac{a_2(a_2 - a_1)(1 - k^2)}{(1 + a_2^2)(1 + k^2 a_2^2)} K(k) - \frac{(1 - k^2) [a_1 - 3a_2 - 2a_2^3 - a_2^2 (-a_2^3 + a_1(2 + 3a_2^2))] k^2}{a_2(1 + a_2^2)(1 + k^2 a_2^2)^2} \times \Pi \left[ -\frac{1}{a_2^2}, k \right] \right\}. \quad (34)$$

Здесь появились стандартные полные эллиптические интегралы Лежандра всех трех родов.

### Вычисление интеграла $I_3$

Третий интеграл  $I_3$  из (21) в конечном виде выразить не удастся. Но его все же можно представить в виде ряда по гармоническим функциям. Для доказательства множитель перед логарифмом в  $I_3$  представим рядом:

$$\frac{\xi^2}{\sqrt{r^2 + (x_3 - \xi)^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^2}{\sqrt{r^2 + x_3^2}} P_n \times \left( \frac{x_3}{\sqrt{r^2 + x_3^2}} \right) \frac{\xi^n}{(r^2 + x_3^2)^{n/2}}, \quad (35)$$

тогда сам интеграл примет вид

$$I_3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n \left( \frac{x_3}{\sqrt{r^2 + x_3^2}} \right)}{(r^2 + x_3^2)^{\frac{n+1}{2}}} \times \int_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \xi^{n+2} \ln \frac{1 - \xi \cos \alpha + \sqrt{(\xi - e^{-i\alpha})(\xi - e^{-i\alpha})}}{1 - \xi \cos \alpha - \sqrt{(\xi - e^{-i\alpha})(\xi - e^{i\alpha})}} d\xi. \quad (36)$$

Появившийся в правой части (36) интеграл берем по частям, чтобы избавиться от логарифма. Проинтегрированный член исчезает и остается

$$I_3 = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n \left( \frac{x_3}{\sqrt{r^2 + x_3^2}} \right)}{(n+3)(r^2 + x_3^2)^{\frac{n+1}{2}}} \int_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \frac{\xi^{n+2} d\xi}{\sqrt{(\xi - e^{-i\alpha})(\xi - e^{i\alpha})}}, \quad (37)$$

но известна формула [5]

$$P_n(\cos \theta) = \frac{1}{\pi i} \int_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \frac{t^n dt}{\sqrt{1 - 2t \cos \theta + t^2}}, \quad (38)$$

поэтому (37) приводится в итоге к замечательному виду

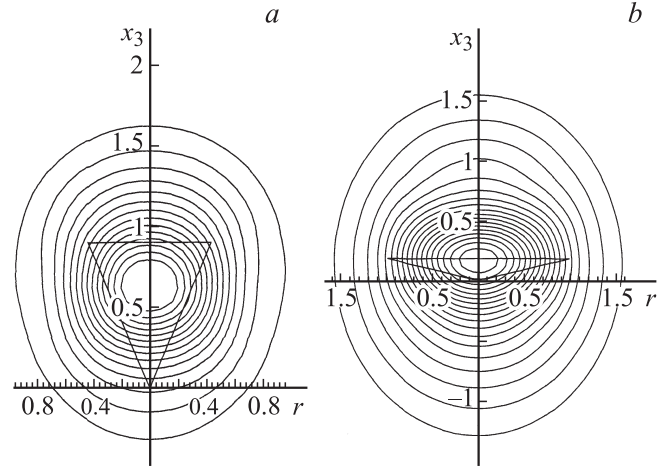
$$I_3 = 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(r^2 + x_3^2)^{\frac{n+1}{2}}} \frac{1}{n+3} P_n \times \left( \frac{x_3}{\sqrt{r^2 + x_3^2}} \right) P_{n+2}(\cos \alpha). \quad (39)$$

Это и есть представление интеграла  $I_3$  в виде ряда по гармоническим функциям  $F_n$

$$I_3 = 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} F_n,$$

где

$$F_n = \frac{P_{n+2}(\cos \alpha)}{n+3} \frac{P_n \left( \frac{x_3}{\sqrt{r^2 + x_3^2}} \right)}{(r^2 + x_3^2)^{\frac{n+1}{2}}}. \quad (40)$$



**Рис. 2.** Кривые равного потенциала однородного кругового конуса (выделен треугольником) с углом полураствора  $\alpha = \frac{\pi}{7}$  (a) и  $\alpha = \frac{15}{34}\pi$  (b). Эквипотенциали расположены по мере убывания от центра к периферии значений нормированного потенциала.

Подставив теперь интегралы  $I_1$  из (31),  $I_2$  из (34) и  $I_3$  из (39) в формулу (20), получим внешний пространственный потенциал однородного конуса в точке  $(r, x_3)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_{\text{кон}}(r, x_3)}{G\rho L^2 \cos \alpha} &= \frac{\kappa(a_1 - a_2)}{(1 + a_2^2)^{3/2}(1 + a_2^2 k^2)^{3/2}} \\ &\times \left\{ -(\kappa \cos \alpha) a_2 (a_1 - a_2) (1 - k^2) (1 + a_2^2 k^2) K(k) \right. \\ &+ \left[ 2(1 + a_2^2)(1 + a_2^2 k^2) - (\kappa \cos \alpha) a_2 \left( \frac{2}{a_2} - a_1 \right. \right. \\ &+ \left. \left. 3a_2 - k^2(a_2 - 3a_1 - 2a_1 a_2^2) \right) \right] E(k) \\ &- (1 - k^2) \left[ 2(1 + a_2^2)(1 + k^2 a_2^2) + (\kappa \cos \alpha) \right. \\ &\times \left. \left. \left( \frac{a_1}{a_2} - 3 - 2a_2^2 - a_2(-a_2^3 + 2a_1 + 3a_1 a_2^2) k^2 \right) \right] \right\} \\ &\times \Pi \left( -\frac{1}{a_2^2}, k \right) \left. \right\} + (\pi \sin^2 \alpha) \sum_{n=0}^{\infty} F_n, \quad (41) \end{aligned}$$

где все параметры даны выше, а гармонические функции  $F_n$  определены в (40).

Расчет эквиотенциалей по формуле (41) показан на рис. 2.

### Заключение

Установлено, что однородный круговой конус имеет заменяющий стержень с мнимой плотностью, которая выражается через элементарные функции. Проведена всесторонняя проверка этого эквиравитирующего

стержня по массе и по потенциалу, в том числе и независимым способом, через асимптотический переход от конуса к неоднородному круглому диску. Стержень позволяет выразить пространственный потенциал конуса в виде однократного интеграла. В итоге оказывается, что большую часть выражения для пространственного потенциала конуса можно представить в конечном виде через стандартные полные эллиптические интегралы. Остаточный член в потенциале удается представить в виде ряда по гармоническим функциям, что удобно при проведении численных расчетов.

Авторы признательны А.С. Дубровскому за помощь в проведении численных расчетов.

## Список литературы

- [1] *Дубошин Г.Н.* Теория притяжения. М.: Наука, 1961. 288 с.
- [2] *Чандрасекхар С.* Эллипсоидальные фигуры равновесия. М.: Мир, 1973. 288 с.
- [3] *Кондратьев Б.П.* Теория потенциала и фигуры равновесия. М.; Ижевск: РХД, 2003. 624 с.
- [4] *Кондратьев Б.П.* Теория потенциала. Новые методы и задачи с решениями. М.: Мир, 2007. 512 с.
- [5] *Лебедев Н.Н.* Специальные функции и их приложения. М.: ГИТТЛ, 1953. 379 с.