

01;10

## Оптимизация согласующей секции ускорителя с пространственно однородной квадрупольной фокусировкой

© А.Д. Овсянников,<sup>1</sup> Д.А. Овсянников,<sup>1</sup> А.П. Дуркин,<sup>1</sup> Шенг-Луен Чанг<sup>2</sup><sup>1</sup> Санкт-Петербургский государственный университет

198504 Санкт-Петербург, Россия

e-mail: ovs74@mail.ru

<sup>2</sup> Electrical Engineering Department, National Taiwan University of Science and Technology,

Taipei, Taiwan

(Поступило в Редакцию 4 декабря 2008 г.)

Предложен новый подход для определения профиля согласующей секции в ускорителе с пространственно однородной квадрупольной фокусировкой. Данный подход основан на математически формализованной оптимизационной задаче и существенно расширяет класс возможных профилей, так как не опирается изначально на конкретные законы изменения жесткости в согласующей секции, а позволяет найти в качестве решения непосредственно значения апертуры на границах и внутри ячеек.

PACS: 29.27.Bd, 02.60.Pn, 02.30.Yy

### Введение

Выбор основных параметров структуры с пространственно однородной квадрупольной фокусировкой (ПОКФ), которая в настоящее время практически всегда является начальной частью любого ускорителя, представляет собой сложную многопараметрическую задачу. Поэтому для ее решения весьма перспективным представляется использование методов математической оптимизации [1–3]. В настоящей работе демонстрируется применение таких методов для решения частной задачи — выбора профиля входной согласующей секции, которая позволяет согласовать постоянный и независимый от времени фазовый объем входного пучка с переменным по времени акцептансом ускоряющей секции с ПОКФ. Успешное решение данной проблемы является чрезвычайно важным, поскольку качество начального согласования напрямую связано с возможными потерями частиц в канале. Подобного рода задача рассматривалась в работах [4–6], где исследовался профиль согласующей секции, описываемый заданной функцией с небольшим числом варьируемых параметров. Как правило, в качестве искомой функции рассматривался полином с неопределенными коэффициентами.

В настоящей работе предлагается новый подход для решения данной проблемы, основанный на решении математически формализованной оптимизационной задачи. Показано, что, используя линейность уравнений поперечного движения частиц и выбранную форму функционала качества, можно получить вариацию функционала в аналитическом виде. Это дает возможность существенно ускорить расчеты, что в свою очередь, позволяет на практике значительно увеличить количество управляющих параметров. В примере, иллюстрирующем возможности предложенной методики, рассматривается вариант, когда управляющими параметрами являются значения апертуры на границах и внутри ячеек согла-

сующей секции, а в промежуточных точках профиль согласователя описывается сплайнами. В этом случае класс возможных решений оказывается существенно шире.

### Постановка задачи

Рассмотрим динамику заряженных частиц в согласующей секции в плоскости, перпендикулярной оси пучка. Будем полагать, что на вход ускорителя поступает равномерно заряженный непрерывный поток частиц, имеющий эллиптическое сечение в поперечной плоскости. Поскольку отрезок канала, занимаемый согласующей секцией, является достаточно коротким ( $2-4\beta\lambda$ ), можно считать, что при движении внутри секции поток сохраняет эти свойства. В этом случае, так же как и при микроканоническом распределении заряда, поперечное движение частиц описывается следующими уравнениями [7]:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{d\tau^2} &= \frac{eU}{W_0a^2} \cos(\theta\tau + \varphi_0)x - \frac{4I}{I_0\beta_z r_x(r_x + r_y)} x \\ &= Q_x(\tau, z, \varphi_0, r_x, r_y)x, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{d\tau^2} &= -\frac{eU}{W_0a^2} \cos(\theta\tau + \varphi_0)y - \frac{4I}{I_0\beta_z r_x(r_x + r_y)} y \\ &= Q_x(\tau, z, \varphi_0, r_x, r_y)y, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\tau = ct$ ,  $\theta = 2\pi\omega/c$ ,  $U$  — напряжение между электродами,  $W_0$  — энергия покоя заряженной частицы,  $\omega$  — частота ускоряющего поля,  $\varphi_0$  — начальная фаза,  $c$  — скорость света,  $a(z)$  — радиус апертуры,  $\beta_z$  — приведенная продольная скорость частиц,  $r_x$  и  $r_y$  — огибающие пучка,  $I$  — ток пучка,  $I_0$  — ток Альфена. Используя

линейные соотношения для описания внешнего фокусирующего поля, полагаем, что форма поперечного сечения электродов близка к идеальной гиперболической и пренебрегаем малым продольным полем, возникающим за счет плавного изменения апертуры канала.

Уравнения (1), (2) могут быть переписаны в виде системы уравнений

$$\frac{d\xi}{d\tau} = A_x \xi, \quad \frac{d\eta}{d\tau} = A_y \eta, \quad (3)$$

где  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ ,  $\xi_1 = x$ ,  $\xi_2 = \frac{dx}{d\tau}$ ,  $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ ,  $\eta_1 = y$ ,  $\eta_2 = \frac{dy}{d\tau}$ , а матрицы  $A_x$  и  $A_y$  имеют вид

$$A_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ Q_x & 0 \end{pmatrix}, \quad A_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ Q_y & 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Пусть множество состояний системы (3) заполняет в плоскостях  $(x, \frac{dx}{d\tau})$  и  $(y, \frac{dy}{d\tau})$  в некоторый момент  $\tau$  эллипсы

$$\xi^* G_x \xi \leq 1, \quad \eta^* G_y \eta \leq 1 \quad (5)$$

соответственно. Тогда матрицы  $G_x$  и  $G_y$  будут удовлетворять следующей системе матричных уравнений:

$$\frac{d}{d\tau} G_x = -A_x^* G_x - G_x A_x, \quad \frac{d}{d\tau} G_y = -A_y^* G_y - G_y A_y. \quad (6)$$

Будем решать систему уравнений (6) в обратном направлении: от входа в регулярную часть ускорителя до входа в согласователь, т.е. от  $\tau = T$  до нуля. При этом начальными условиями для системы (6) являются матрицы эллипсов, определяющих аксептансы регулярной части ускорителя и зависящих от начальной фазы  $\varphi_0$ :

$$G_x(T, \varphi_0) = G_{x,T}(\varphi_0), \quad G_y(T, \varphi_0) = G_{y,T}(\varphi_0). \quad (7)$$

Под задачей построения оптимального согласователя будем понимать нахождение закона измерения минимального радиуса канала  $a$  вдоль согласующей секции, обеспечивающего при заданных начальных значениях (7) максимальное перекрытие семейства эллипсов, зависящих от начальной фазы ( $0 < \varphi_0 < 2\pi$ ), на входе в согласующую секцию.

## Метод решения

Представим элементы матриц  $G_x(\tau, \varphi_0)$  и  $G_y(\tau, \varphi_0)$  следующим образом:

$$G_x = \begin{pmatrix} \frac{\Delta_x + \alpha_x^2}{v_x} & \alpha_x \\ \alpha_x & v_x \end{pmatrix}, \quad G_y = \begin{pmatrix} \frac{\Delta_y + \alpha_y^2}{v_y} & \alpha_y \\ \alpha_y & v_y \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где  $v_x/\Delta_x = r_x^2$ ,  $v_y/\Delta_y = r_y^2$ ,  $\Delta_x = \det G_x$ ,  $\Delta_y = \det G_y$ . Отметим, что величины  $\frac{\alpha_x}{\sqrt{\Delta_x}}$ ,  $\frac{v_x}{\sqrt{\Delta_x}}$  и  $\frac{\alpha_y}{\sqrt{\Delta_y}}$ ,  $\frac{v_y}{\sqrt{\Delta_y}}$  являются так называемыми параметрами Куранта–Снайдера или Твисса [8].

Теперь уравнения (6) могут быть переписаны в следующем виде

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{d\tau} &= -2\alpha_x, & \frac{d\alpha_x}{d\tau} &= -Q_x v_x - \frac{\Delta_x + \alpha_x^2}{v_x}, \\ \frac{dv_y}{d\tau} &= -2\alpha_y, & \frac{d\alpha_y}{d\tau} &= -Q_y v_y - \frac{\Delta_y + \alpha_y^2}{v_y}. \end{aligned} \quad (9)$$

Введем функционал, оценивающий степень взаимного перекрытия эллипсов на входе в согласующую секцию и отвечающих различным начальным фазам. В связи с этим рассмотрим пучок квадратичных форм, порожденный парой эллипсов с матрицами  $G$  и  $B$  и найдем его характеристические числа  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  [9]:

$$\chi(\lambda) = \det(G - \lambda B) = 0, \quad \chi(\lambda_1) = \chi(\lambda_2) = 0. \quad (10)$$

Величина, обратная минимальному характеристическому числу  $\lambda = \min(\lambda_1, \lambda_2)$ , характеризует степень рас- согласованности пары эллипсов. В случае полностью согласованных (одинаковых) эллипсов это значение равно единице. Таким образом, всегда имеем  $\lambda^{-1} \geq 1$ . Будем рассматривать рассогласование эллипсов с матрицами  $G_x(0, \varphi_0)$  и  $G_y(0, \varphi_0)$  с некоторыми заданными эллипсами с матрицами  $B_x$  и  $B_y$ :

$$\begin{aligned} \lambda_x^{-1}(\varphi_0) &= \lambda^{-1}(G_x(0, \varphi_0)B_x), \\ \lambda_y^{-1}(\varphi_0) &= \lambda^{-1}(G_y(0, \varphi_0)B_y). \end{aligned} \quad (11)$$

Матрицы  $B_x$  и  $B_y$  описывают желаемый фазовый портрет пучка на входе в согласующую секцию.

Качество согласующей секции будем оценивать следующей величиной:

$$J(a) = \max_{\varphi_0} \lambda_x^{-1}(\varphi_0) + \max_{\varphi_0} \lambda_y^{-1}(\varphi_0). \quad (12)$$

Задача минимизации функционала (12) является задачей минимаксной оптимизации. Минимизацию функционала можно осуществлять методами направленного спуска.

Запишем систему уравнений (9) в виде системы уравнений общего вида

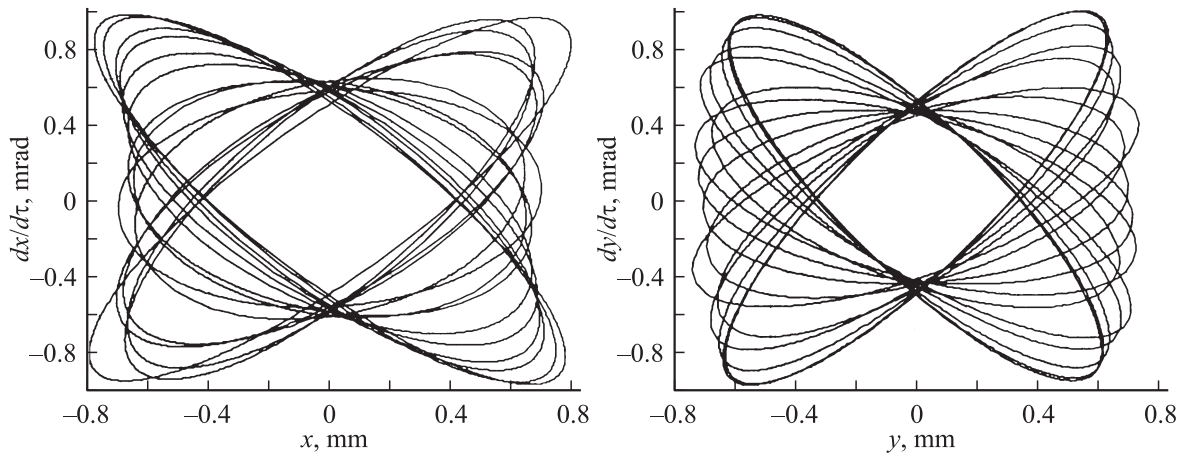
$$\frac{d\sigma}{d\tau} = f(\tau, \sigma, \varphi_0, u) \quad (13)$$

с соответствующими условиями на правом конце

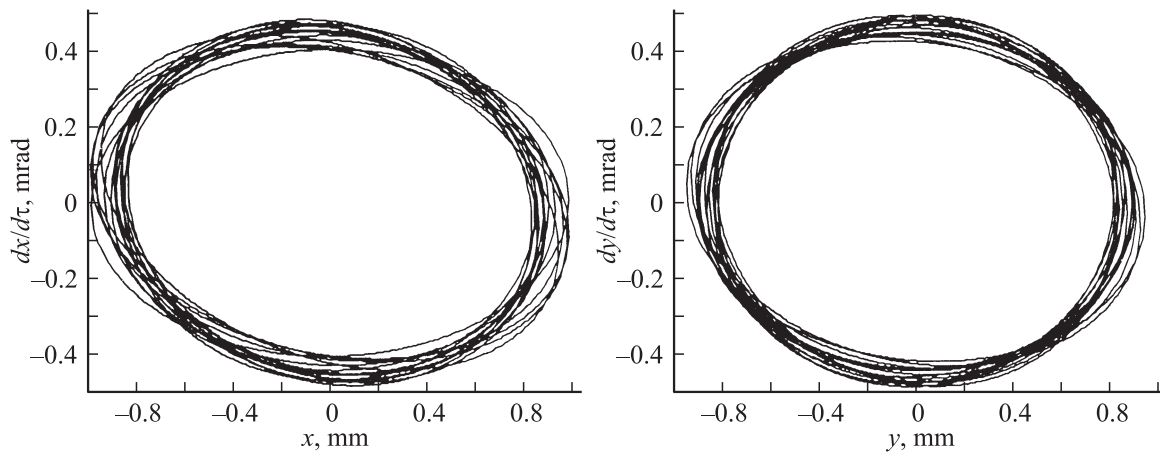
$$\sigma(T) = \sigma(T, \varphi_0), \quad \varphi_0 \in [\varphi_1, \varphi_2]. \quad (14)$$

Здесь  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ ,  $\sigma_1 = \alpha_x$ ,  $\sigma_2 = v_x$ ,  $\sigma_3 = \alpha_y$ ,  $\sigma_4 = v_y$ ;  $u = u(\tau)$  — управление (закон изменения радиуса канала вдоль согласующей секции); начальная фаза  $\varphi_0$  принимает значения из некоторого интервала. Функционал (12) запишем в следующем виде:

$$J(u) = \max_{\varphi_0} g_1(\sigma(0, \varphi_0), \varphi_0) + \max_{\varphi_0} g_2(\sigma(0, \varphi_0), \varphi_0). \quad (15)$$



**Рис. 1.** Аксептансы в плоскостях  $(x, dx/d\tau)$  и  $(y, dy/d\tau)$  на входе в регулярную часть ускорителя (согласующая секция отсутствует).



**Рис. 2.** Аксептансы в плоскостях  $(x, dx/d\tau)$  и  $(y, dy/d\tau)$  на входе в согласующую секцию ускорителя.

Нетрудно показать, что в этом случае справедливо следующее представление вариации функционала (15) [1,10]:

$$\delta J = - \int_0^T p^*(\tau) \Delta u(\tau) d\tau, \quad (16)$$

где вектор-функция  $p(\tau)$  определяется по формуле

$$p(\tau) = \frac{\partial f(\tau, \sigma(\tau, \varphi_x), \varphi_x, u(\tau))^*}{\partial u} \psi_1(\tau, \varphi_x) + \frac{\partial f(\tau, \sigma(\tau, \varphi_y), \varphi_y, u(\tau))^*}{\partial u} \psi_2(\tau, \varphi_y). \quad (17)$$

Здесь  $\varphi_x$  и  $\varphi_y$  — „наихудшие“ фазы в соответствующих плоскостях, т.е.  $\max_{\varphi} g_1(\sigma(0, \varphi), \varphi) = g_1(\sigma(0, \varphi_x), \varphi_x)$  и  $\max_{\varphi} g_2(\sigma(0, \varphi), \varphi) = g_2(\sigma(0, \varphi_y), \varphi_y)$ ; вектор-функции  $\psi_1$  и  $\psi_2$  являются решениями следующих вспомогательных (сопряженных) систем дифференциальных

уравнений со специальными начальными условиями:

$$\frac{d\psi_i}{d\tau} = - \left( \frac{\partial f(\tau, \sigma(\tau, \varphi), u(\tau))}{\partial \sigma} \right)^* \psi_i, \quad \psi_i(0, \varphi) = \frac{\partial g_i(\sigma(0, \varphi), \varphi)}{\partial \sigma}, \quad i = 1, 2. \quad (18)$$

Вектор-функция  $p(\tau)$ , полученная из представления (17), определяет направление спуска при минимизации функционала (15) в пространстве допустимых управлений (например, непрерывных функций, принимающих значения в заданном диапазоне):

$$u_\varepsilon(\tau) = u(\tau) + p(\tau)\varepsilon, \quad (19)$$

где  $\varepsilon > 0$ , и  $u_\varepsilon(\tau)$  есть новое (измеренное) управление.

## Результаты численной оптимизации

В качестве примера использования предложенной методики, основанной на аналитическом представлении (17) вариации функционала (12), рассматривалась

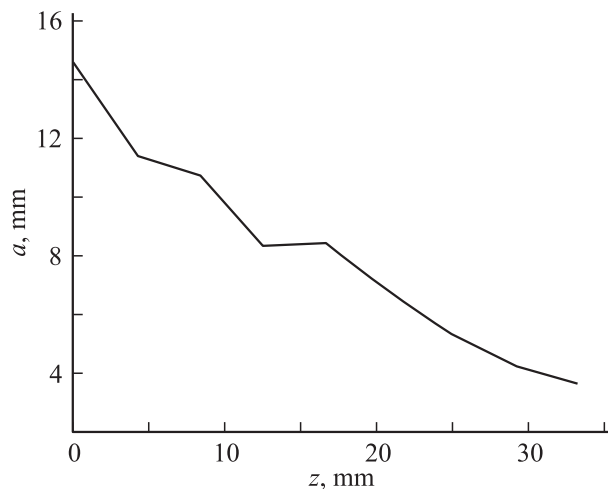


Рис. 3. Радиус канала в согласующей секции.

оптимизация профиля согласующей секции ускорителя с ПОКФ на частоте 352 МГц. Данный канал предназначен для ускорителя пучка протонов с начальной энергией 45 кэВ и током 75 мА. Нормализованный эмиттанс входного пучка составлял  $4 \cdot 10^{-7} \text{ m} \cdot \text{rad}$ , напряжение между электродами — 100 кВ. На рис. 1–3 представлены результаты выбора одного из возможных вариантов функции, описывающей изменение радиуса канала в согласующей секции. Аceptarсы регулярной части канала (без согласующей секции) для различных значений фазы влета в регулярную часть показаны на рис. 1. Данное семейство эллипсов представляет собой исходные данные для расчета и оптимизации согласователя (см. соотношения (7)). На рис. 2 показаны аceptarсы на входе в согласующую секцию, полученные в результате оптимизации. На рис. 3 приведен соответствующий оптимизированный профиль согласующей секции.

Полученные результаты нуждаются в комментарии. Обычно профиль согласующей секции представляет собой выпуклую функцию, однако на рис. 3 виден невыпуклый оптимизированный профиль согласователя. Причина такого результата оптимизации заключается в выборе желаемых эллипсов  $B_x$  и  $B_y$ . Обычно аceptarсы на входе в согласующую секцию представляют собой семейство сходящихся эллипсов, максимальная сходимость которых при данном значении эмиттанса составляет 20–40 mrad. В нашем случае в качестве желаемого на входе выбран эллипс с малой схожимостью. Уменьшение входной сходимости облегчает задачу формирования требуемого фазового портрета на входе в согласователь. Однако, как показывает данная оптимизация, достижение этого результата связано с несколько „экзотическим“ профилем согласователя. Поиск традиционного выпуклого профиля, обеспечивающего малую расходимость входного пучка, представляет собой отдельную задачу, которая также может решаться в рамках предложенной здесь методики.

## Заключение

В данной работе задача оптимизации профиля согласующей секции ускорителя с ПОКФ формализуется в виде задачи математической оптимизации. Показано, что поставленную оптимизационную задачу можно решить в широком классе функций, описывающих профиль согласователя. Приведенный пример использования разработанной методики показывает возможность нахождения профиля согласователя, обеспечивающего малосходящийся согласованный пучок на входе в согласующую секцию. Предложенная методика, основанная на найденном аналитическом представлении вариации функционала качества, может быть использована при построении других численно-аналитических методов оптимизации. Таким образом, еще раз подтверждена плодотворность применения методов математической оптимизации для решения различных задач динамики пучков заряженных частиц в различных ускорителях.

Работа выполнена при поддержке совместного исследовательского проекта № RP07-05 Национального университета Тайваня и Санкт-Петербургского государственного университета.

## Список литературы

- [1] Овсянников Д.А. Моделирование и оптимизация динамики пучков заряженных частиц. Л.: Изд-во ЛГУ, 1990. 312 с.
- [2] Ovsyannikov A.D., Bondarev B.I., Durkin A.P. // Proc. 18<sup>th</sup> Particle Accelerator Conf. NY, 1999. P. 2808–2810.
- [3] Ovsyannikov D.A., Ovsyannikov A.D., Svistunov Yu., Durkin A.P., Vorogushin M.F. // Nucl. Instrum. Meth. A. 2006. Vol. 558. P. 11–19.
- [4] Grandall K.R., Stokes R.H., Wangler T.P. // Proc. 1979 Linear Accelerator Conference. Montauk, 1979. P. 205.
- [5] Tokuda N., Yamada S. // Proc. 1981 Linear Accelerator Conference. Santa Fe, 1981. P. 313.
- [6] Балабин А.И., Кабанов В.С., Капчинский И.М., Кушин В.В., Липкин И.М. // ЖТФ. 1985. Т. 55. Вып. 3. С. 586–590.
- [7] Капчинский И.М. Теория линейных резонансных ускорителей. М.: Энергоиздат, 1982. 310 с.
- [8] Reiser M. Theory and Design of Charged Particle Beams. NY: John Wiley & Sons, Inc., 1994. 607 p.
- [9] Гантмахер Ф.П. Теория матриц. М.: Наука, 1967. 576 с.
- [10] Демьянов В.Ф., Виноградова Т.К., Никулина В.Н. и др. Негладкие задачи теории оптимизации и управления. Л.: Изд-во ЛГУ, 1982. 324 с.