

01;07;09

Моды шепчущей галереи конического резонатора

© Я.В. Алексеенко, А.М. Монахов, И.В. Рожанский

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,
194021 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: alekseenko_yan@mail.ru

(Поступило в Редакцию 15 марта 2009 г.)

Рассмотрен конический закрытый резонатор с идеально проводящими стенками. Найдены собственные моды такого резонатора в первом порядке теории возмущения, где малой величиной является угол раствора конуса. Построено квазиклассическое приближение для произвольного угла раствора конуса и показано, что спектр мод типа шепчущей галереи в этом приближении даже при большом угле раствора конуса слабо отличается от собственных мод цилиндрического резонатора.

PACS: 42.25.Gy, 42.60.Da

Введение

В настоящее время полупроводниковые лазеры на модах шепчущей галереи, МШГ (WGM — whispering gallery mode) привлекают все большее внимание [1]. Интерес к этим приборам вызван тем, что МШГ-резонаторы обладают большей добротностью [2] и позволяют, например, преодолеть трудности, связанные с недостаточным коэффициентом усиления активной среды в среднем ИК-диапазоне [3].

Резонатор для МШГ-лазера, как правило, получают методом химического травления, вследствие чего стенка такого резонатора имеет наклон, а следовательно, его форма отличается от цилиндрической и похожа на усеченный конус, поэтому результаты как классической работы [4], так и последующих теоретических работ, в которых исследовались моды цилиндрических резонаторов, строго говоря, неприменимы для конических резонаторов.

Тем не менее формальное сравнение, скажем, межмодового расстояния, полученного по формуле $\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2\pi R}$,

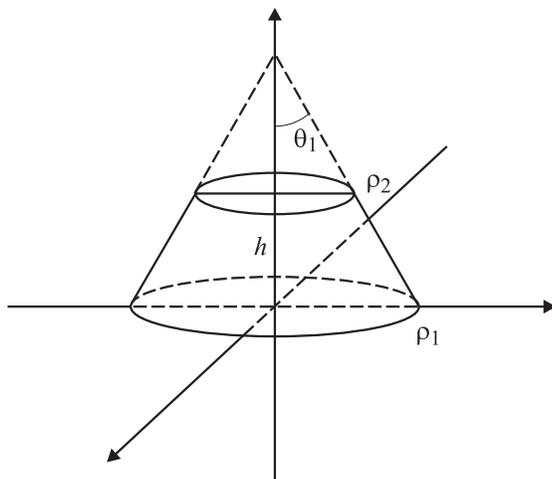


Рис. 1. Усеченный конус высотой h радиусом нижнего основания ρ_1 и радиусом верхнего основания ρ_2 .

верной для цилиндрического резонатора, с результатами экспериментов для конических резонаторов дает очень хорошее согласие с экспериментом. Таким образом, целью настоящей работы является развитие теории МШГ-лазера с коническим резонатором, объяснение совпадения модовой структуры цилиндрического и конического резонаторов, а также уточнение области, в которой структура спектра собственных частот этих резонаторов совпадает.

В настоящей работе рассмотрен конический закрытый резонатор (рис. 1) с идеально проводящими стенками. Найдены собственные моды такого резонатора в первом порядке теории возмущения, где малой величиной является угол раствора конуса, построено квазиклассическое приближение для произвольного угла раствора конуса и показано, что спектр мод шепчущей галереи в этом приближении, даже при большом угле раствора конуса, слабо отличается от собственных мод цилиндрического резонатора.

Малые углы наклона стенок. Теория возмущений

Как известно, задача о собственных модах сводится к векторным уравнениям [5]:

$$\Delta \mathbf{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} = 0, \quad (1)$$

$$\Delta \mathbf{H} + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{H} = 0 \quad (2)$$

с граничными условиями

$$[\mathbf{E} \times \mathbf{n}] = 0, \quad (3)$$

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (4)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор нормали к поверхности.

Геометрия границы усеченного конуса не позволяет разделить переменные ни в какой ортогональной системе координат, но если раствор конуса мал, то можно

построить ряд теории возмущений по углу раствора как малому параметру. Ограничимся первым членом этого ряда.

Запишем проекции уравнений Максвелла для полей \mathbf{E} и \mathbf{H} в сферической системе координат:

$$-\frac{i\omega}{c} E_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial(rH_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial(rH_\theta)}{\partial \varphi} \right], \quad (5)$$

$$-\frac{i\omega}{c} E_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial H_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r \sin \theta H_\varphi)}{\partial r} \right], \quad (6)$$

$$-\frac{i\omega}{c} E_\varphi = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rH_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right], \quad (7)$$

$$\frac{i\omega}{c} H_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial(rE_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial(rE_\theta)}{\partial \varphi} \right], \quad (8)$$

$$\frac{i\omega}{c} H_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial(E_r)}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r \sin \theta E_\varphi)}{\partial r} \right], \quad (9)$$

$$\frac{i\omega}{c} H_\varphi = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rE_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right]. \quad (10)$$

Из этих уравнений видно, что в сферической системе координат можно ввести аналог TE - и TM -мод в декартовой (цилиндрической) системе координат. Положив $H_r = 0$ (аналог TM -моды), из (6) и (7) получим

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right] (rH_\theta) = \frac{-i\omega}{c \sin \theta} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi}, \quad (11)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right] (rH_\varphi) = \frac{i\omega}{c} \frac{\partial E_r}{\partial \theta}, \quad (12)$$

откуда, зная только E_r , можно получить все остальные компоненты электрического и магнитного полей. Уравнение для E_r имеет вид

$$\frac{\partial^2 E_r}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{2E_r}{r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial E_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 E_r}{\partial \varphi^2} + \frac{\omega^2}{c^2} E_r = 0. \quad (13)$$

Граничные условия в этом случае будут выглядеть следующим образом: $E_r = 0$, $E_r \cos \theta = 0$, при $r = r_1$, $\theta \in [0; \theta_1]$ и $r = r_2$, $\theta \in [0; \theta_1]$ (θ_1 — раствор конуса).

TE -моду можно получить аналогичным образом, положив $E_r = 0$. Остальные компоненты электрических и магнитных полей можно получить, используя уравнения Максвелла.

Отметим, что эти уравнения позволяют получить аналитическое решение для открытого конического волновода, которое для компоненты E_r выглядит следующим образом:

$$E_r = C \frac{J_{m+\frac{1}{2}}\left(\frac{\omega r}{c}\right)}{r^{\frac{3}{2}}} P_\nu^m(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad (14)$$

где m — целое число, ν определяется из условия $P_\nu^m(\cos \theta_1) = 0$ (θ_1 — раствор конического волновода), а C — произвольная константа.

Рассмотрим неортогональную систему координат $\{z; \theta; \varphi\}$, в которой координатные поверхности совпадают с границами усеченного конуса. Отделив переменную φ , получим для $E_r(r, \theta)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_r(r, \theta)}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial E_r(r, \theta)}{\partial r} + \frac{2E_r(r, \theta)}{r^2} \\ + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial E_r(r, \theta)}{\partial \theta} \\ + \frac{m^2}{r^2 \sin^2 \theta} E_r(r, \theta) + \frac{\omega^2}{c^2} E_r(r, \theta) = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

В этом уравнении введем переменную

$$r = \frac{z + z_0}{\cos \theta}. \quad (16)$$

Тогда, с точностью до членов второго порядка по θ_1 , получим следующее уравнение (если раствор конуса мал, можно считать $E_z = E_r + O(\theta_1^2)$):

$$\begin{aligned} (1 + \operatorname{tg}^2 \theta) \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + \frac{2}{z + z_0} \frac{\partial E_z}{\partial z} + \frac{1}{(z + z_0)^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \theta^2} \\ + \frac{1}{\operatorname{tg} \theta (z + z_0)^2} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} - \frac{2 \operatorname{tg} \theta}{z + z_0} \frac{\partial^2 E_z}{\partial z \partial \theta} \\ - \frac{m^2 E_z}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta (z + z_0)^2} + \frac{2E_z}{\cos \theta (z + z_0)^2} \\ + \frac{\omega^2}{c^2 \cos^3 \theta} E_z = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

В пределе $\theta_1 \rightarrow 0$ и $z_0 \rightarrow \infty$ так, чтобы $z_0 \theta_1 = \rho_1 = \text{const}$, конус перейдет в цилиндр. Для больших z и малых $\theta \leq \theta_1 \ll 1$ с точностью до членов первого порядка (17) можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial \rho^2} - \frac{m^2 E_z}{\rho^2} + \frac{\omega^2}{c^2} E_z + \frac{2}{z_0} \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \quad (18)$$

где $z_0 \theta = \rho$ (такая замена справедлива, так как нас интересует поле внутри резонатора). Это уравнение совпадает с уравнением в цилиндрической системе координат с точностью до последнего члена, который при наших предположениях можно считать малой поправкой. Граничные условия также перейдут в граничные условия для цилиндра. Таким образом, получено уравнение для E_z в цилиндрическом закрытом резонаторе с граничными условиями: $E_z(\rho_1) = 0$; $\frac{dE_z}{dz} = 0$ при $z = 0$ и $z = h$, и возмущающим слагаемым $\frac{2}{z_0} \frac{\partial E_z}{\partial z}$.

Решение в нулевом приближении есть:

$$E_z^{(0)} = J_m(\chi \rho) \cos(kz) e^{im\varphi}, \quad (19)$$

где m — целое, $k = \frac{\pi n}{h}$ (h — высота конуса, n — целое), а χ определяется из уравнения $J_m(\chi \rho) = 0$, тогда $\frac{\omega^2}{c^2} = \chi^2 + k^2$. Вычислив после этого поправку первого

порядка к резонансной частоте, можно убедиться, что она равна нулю. Таким образом,

$$\omega_{\text{conic}} = \omega_{\text{cylindric}} + \delta\theta_1^2. \quad (20)$$

Константу δ можно получить, рассмотрев второй порядок теории возмущений, однако результат будет громоздкий и малоинформативный. Результат (20) для малых углов наклона конуса верен для всех мод „слабо конического“ резонатора (не только для МШГ).

Отметим, что при выводе (20) предполагалось, что собственные функции E_z нулевого приближения уравнения (18) не изменяются при малом, но произвольном угле наклона стенок резонатора. Это означает, что ρ_1 есть средний радиус (радиус среднего сечения) резонатора. Если вместо этого считать фиксированным, например, радиус нижнего основания ρ_{down} , то при изменении угла раствора θ_1 появится линейный по θ_1 сдвиг собственной частоты резонатора, связанный с изменением среднего радиуса цилиндра высотой h : $\rho_1 = (\rho_{\text{up}} + \rho_{\text{down}})/2 = \rho_{\text{down}} - h \operatorname{tg} \theta_1/2$, что приведет к поправке

$$\omega^{(1)} = \frac{hx_{mn}^2 c^2}{2\rho_1^3 \omega_{\text{cylindric}}} \theta_1, \quad (21)$$

где x_{mn} — n -й корень функции Бесселя: $J_m(x_{mn}) = 0$, а $\omega_{\text{cylindric}}^2 = c^2(x_{mn}^2 + k^2)$, где $k = \pi n/h$. В этом случае

$$\omega_{\text{conic}} = \omega_{\text{cylindric}} + \frac{hx_{mn}^2 c^2}{2\rho_1^3 \omega_{\text{cylindric}}} \theta_1 + A\theta_1^2, \quad (22)$$

но при этом второй член есть следствие изменения не формы, а размера цилиндра.

Большие углы наклона стенок. Квазиклассическое рассмотрение мод шепчущей галереи

Как было показано выше, поправка первого порядка по углу наклона стенок для собственных частот конического резонатора отсутствует, если не изменяется средний радиус конуса. Для рассмотрения больших углов наклона ограничимся коротковолновым пределом геометрической оптики и будем рассматривать только моды шепчущей галереи.

Для получения собственных частот в резонаторе необходимо построить замкнутый луч, вдоль которого распространяется свет.

Рассмотрим конус с радиусом основания ρ_1 и раствором $2\theta_k$, отобразим зеркально этот конус, как показано на рис. 2. Рассмотрим точку B на поверхности конуса, которая отстоит на расстояние h от основания и на $\rho(h) = \rho_1 - h \cdot \operatorname{tg}(\theta_k)$ от оси конуса. Через эту точку и нормали к ней можно провести секущую плоскость, так чтобы угол $\angle ODA = \angle ODC$ и точки A и C отстояли от основания конуса на том же расстоянии h , что и точка B . Тогда лучи AB и BC лежат в секущей плоскости

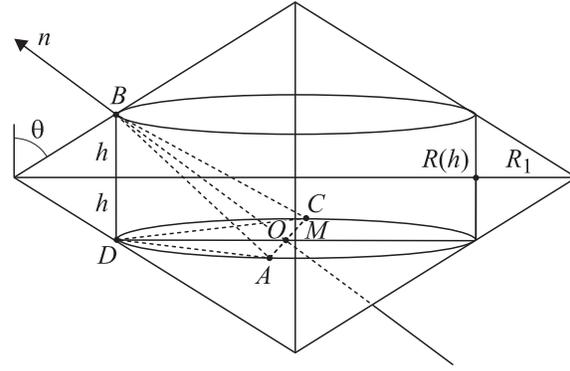


Рис. 2. Построение классической траектории света в коническом резонаторе.

по построению так, что $AB = BC$ и $\angle ABO = \angle OBC$, следовательно построена система лучей, которые удовлетворяют условиям распространения света в приближении геометрической оптики. Для нахождения спектра осталось из всех возможных траекторий выбрать те из них, которые замыкаются, а это значит, что угол $\angle ADM = \alpha(h) = \frac{2\pi}{n}$, где n — целое. Оптическая длина пути такой траектории есть $n \cdot AB$, а следовательно $\lambda = \frac{n \cdot AB}{k}$, где k — целое число, характеризующее количество длин волн, укладывающееся на всем пути.

Используя вышесказанное, получим:

$$\lambda_{n,k} = \frac{2n\rho_1}{k} \cdot \left(\frac{1 - \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{2 + \operatorname{tg}^2(\theta_k)(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right))} \right)^{1/2}. \quad (23)$$

При $n \rightarrow \infty$ из (23) получим

$$\lambda_{n \rightarrow \infty, k} = \frac{2\pi\rho_1}{k} - \frac{\pi^2\rho_1(1 + 3\operatorname{tg}^2(\theta_k))}{3kn^2}. \quad (24)$$

Из (24) видно, что в коротковолновом пределе в коническом резонаторе $\lambda \simeq \frac{2\pi\rho_1}{k}$, откуда следует, что межмодовое расстояние может быть вычислено по формуле $\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2\pi\rho_1}$, где ρ_1 — большее основание усеченного конуса. Таким образом, модовая структура мод шепчущей галереи в коническом и цилиндрическом резонаторах совпадают в коротковолновом пределе, если за радиус цилиндра принять радиус большего основания усеченного конуса.

Отметим, что в рассматриваемом коротковолновом пределе собственная частота не зависит от радиуса верхнего основания и высоты усеченного конического резонатора при условии, что высота резонатора достаточно велика.

Численный расчет

Поскольку авторам известна только одна экспериментальная работа [8], посвященная целенаправленному изучению зависимости частоты моды конического резонатора от угла наклона его стенок, для проверки

приведенных выше результатов был проделан численный расчет, в котором решалась система уравнений (1)–(4) для фиксированного номера моды, высоты цилиндра и радиуса нижнего основания ρ_1 или среднего радиуса ρ_{eff} в конусе (цилиндре). Использовалась система единиц, в которой скорость света в резонаторе равнялась единице. Были получены зависимости частоты фиксированной моды от угла раствора конуса для разных случаев.

При фиксированном большом радиусе основания усеченного конуса $\rho_1 = 70$, высоте $h = 10$ и $m = 250$ получена линейная зависимость при малых углах раствора конуса (рис. 3) которая совпадает с (22) при условии $A \ll \frac{hx_{\text{mm}}^2 c^2}{2\rho_1^3 \omega_{\text{cylindric}}}$. Частотная зависимость от больших углов

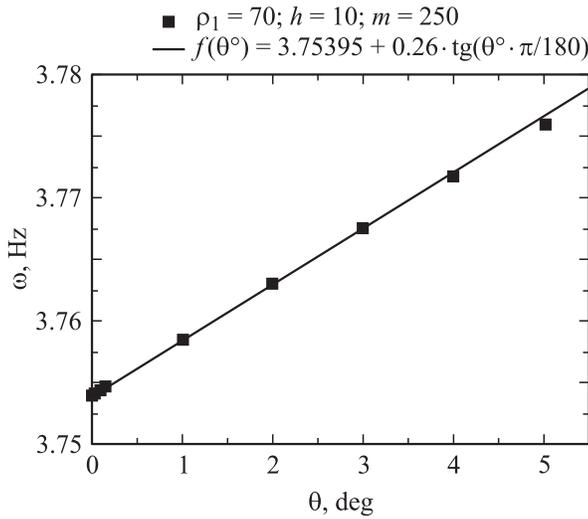


Рис. 3. Зависимость собственной частоты конического резонатора от угла раствора конуса при фиксированном большом радиусе конуса и малых углах раствора.

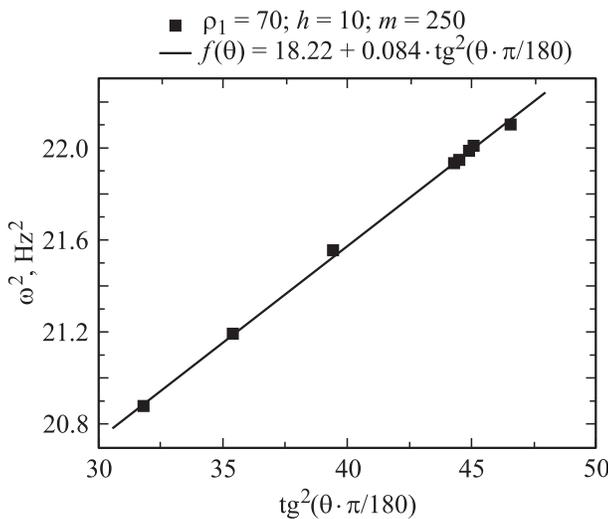


Рис. 4. Зависимость собственной частоты конического резонатора для больших углов, при фиксированном большом радиусе конуса.

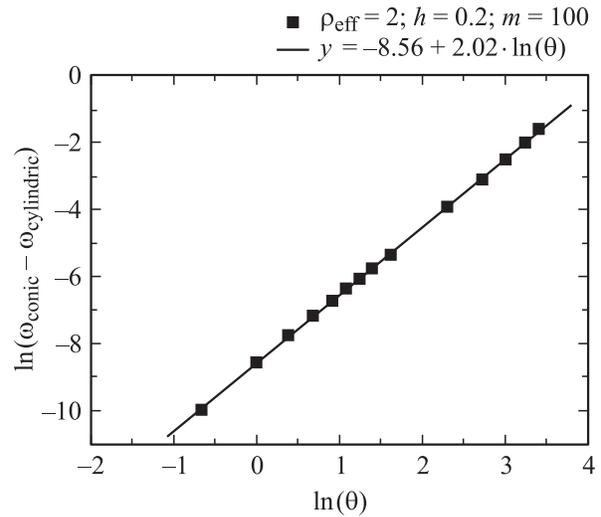


Рис. 5. Зависимость собственной частоты конического резонатора от угла раствора конуса при фиксированном среднем радиусе и малых углах.

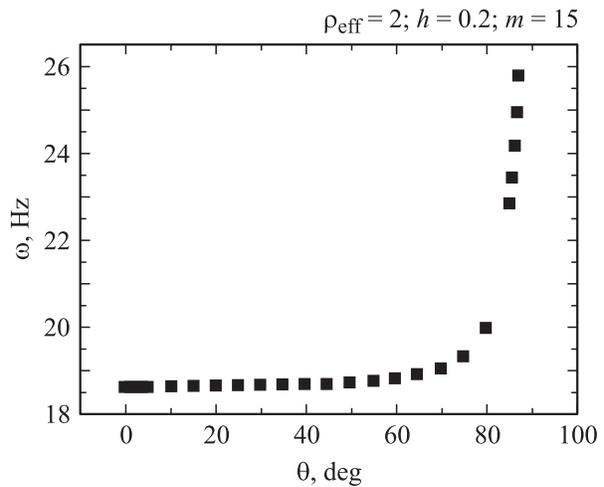


Рис. 6. Зависимость собственной частоты конического резонатора от угла раствора конуса при фиксированном среднем радиусе $m = 15$.

(рис. 4) совпадает с (23), согласно которой ω^2 есть линейная функция $\text{tg}^2 \theta$.

При фиксированном среднем („эффективном“) радиусе конуса $\rho_{\text{eff}} = 2$, высоте $h = 0.2$ и номере моды $m = 15; 100$ были получены зависимости частот от угла (рис. 6 и 7). При малых углах, как видно из рис. 5, частота зависит квадратично от угла раствора конуса, что совпадает с (20).

Рассмотренные нами случаи отвечают малым и большим углам, при которых теоретические результаты совпадают с численным экспериментом, однако существует область в которой рассмотренные нами приближения не работают (рис. 7). При некоторых достаточно больших углах появляется перелом, который связан с тем, что поле начинает все сильнее прижиматься к большему

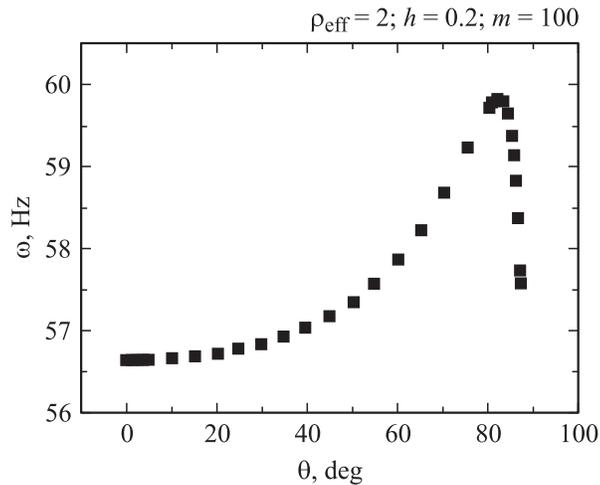


Рис. 7. Зависимость собственной частоты конического резонатора от угла раствора конуса при фиксированном среднем радиусе $m = 100$.

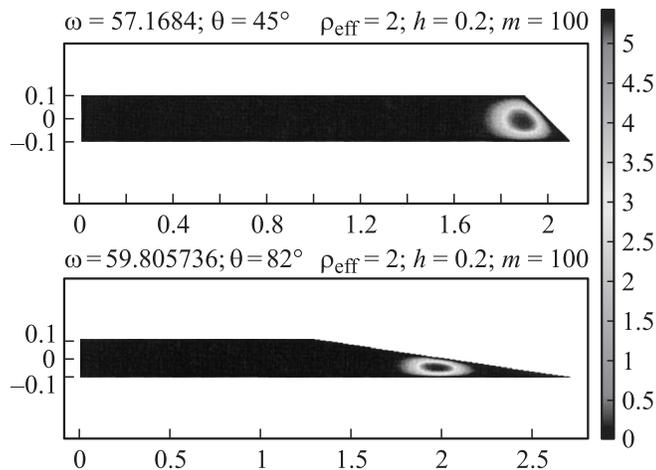


Рис. 8. Распределение поля в резонаторе.

основанию (рис. 8). Вследствие этого ρ_{eff} уже нельзя считать как средний радиус конуса, он начинает увеличиваться, что приводит к падению частоты. Положение этого пика зависит от номера моды, так как поле в цилиндре с ростом m прижимается к его границе, а следовательно, собственные частоты становятся более чувствительными к изменению граничных условий. При малых m , например $m = 15$, как показано рис. 5, пик не успевает образоваться.

Заключение

Результатом работы стало теоретическое описание моды шепчущей галереи в металлическом закрытом резонаторе в форме усеченного конуса с произвольным углом раствора. Показано, что в высокочастотном пределе собственные частоты конического резонатора мало отличаются от собственных мод цилиндрического

резонатора с радиусом, равным большему основанию конуса.

В работе описано поведение мод шепчущей галереи в конических резонаторах, а также получена зависимость резонансной частоты конического резонатора от угла раствора конуса. Численный расчет наглядно демонстрирует хорошее согласие с теорией.

Выражаем большую благодарность Н.С. Аверкиеву за помощь и консультации в процессе подготовки данной работы.

Работа была подготовлена при частичной поддержке правительства Санкт-Петербурга, грантов РФФИ № 07-02-92170-НЦНИа, 08-02-90039-Бела, Программой научных школ 1972.2008.2 и Программой президенту-ра РАН.

Список литературы

- [1] Ораевский А.Н. // Квант. электрон. 2002. Т. 32. Вып. 2. С. 377.
- [2] von Klitzing W., Zong R., Ilchnko V.S., Hare J., and Lefevre-Segulin V. // New. J. of Physics. 2001. Vol. 3. P. 14.1–14.14.
- [3] Sherstnev V.V., Krier A., Monakhov A.M., and Hill G. // Electron. Lett. 2003. Vol. 39. P. 916.
- [4] Rayleigh J.W. // Phil. Mag. 1910. Vol. 20. P. 1001.
- [5] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. Теоретическая физика. Т. 8. М.: Наука, 1982. 620 с.
- [6] Бабич В.М., Булдырев В.С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972. 45 с.
- [7] Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1973. 719 с.
- [8] Баранник А.А., Буняев С.А., Черпак Н.Т. // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31. Вып. 19. С. 1.