

01;03

О возможности зажигания коронного разряда у поверхности нелинейно-осциллирующего жидкого слоя на поверхности заряженной градины

© А.И. Григорьев, В.А. Коромыслов, С.О. Ширяева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 26 декабря 2008 г.)

В квадратичном приближении по амплитуде осцилляций заряженного слоя жидкости на поверхности обводненной градины получено и проанализировано выражение для напряженности электрического поля в ее окрестности. Выяснилось, что с увеличением номера моды, определяющей начальную деформацию равновесной сферической формы жидкого слоя, напряженность электростатического поля в малой окрестности гребней капиллярных волн в жидком слое растет. Даже при малых зарядах (когда параметр Рэлея для градины равен одной сотой от критического в смысле устойчивости по отношению к собственному заряду) напряженность электростатического поля у поверхности градины достаточно велика для зажигания коронного заряда в ее окрестности.

PACS: 41.20.Cv, 47.35.Pq, 52.65.Kj

Введение

Электрический разряд с поверхности крупных капель и тающих градин в грозовом облаке, сопровождающийся эмиссией во внешнюю среду значительного количества заряженных микрокапель и ионов [1–5], играет важную роль как в процессах микроразделения зарядов, так и в феномене реализации разряда молнии. Согласно существующим представлениям, инициирование разряда молнии связано с мощной электронной лавиной (переходящей в стример), зарождающейся при коронном разряде с группы близко расположенных капель или тающих градин, свободно падающих в грозовом облаке [1–3]. Однако натурные измерения в грозовых облаках внутриоблачных электрических полей и зарядов на каплях и градинах показывают (см., например, [6], гл. 10), что напряженность электрического поля и величины зарядов на каплях и градинах недостаточно велики как для реализации электростатической неустойчивости поверхности жидкости по отношению к собственному и индуцированному электрическим зарядом [7], так и для зажигания коронного разряда. Измеряемая напряженность внутриоблачных электрических полей и заряды капель и градин слишком малы, чтобы суммарная напряженность электростатического поля индуцированного и собственного заряда у невозмущенной сферической поверхности капли или обводненной градины в облаке достигла величины $\sim 20 \text{ kV/cm}$, при которой на высоте 4–5 km (где давление воздуха изменяется в диапазоне 460–400 mm Hg), на уровне мокрого роста града и интенсивного разделения электрических зарядов, возможно зажигание коронного разряда ([8], стр. 507). В то же время известно, что деформация заряженной свободной поверхности жидкости во внешних силовых

полях, приводящая к локальному увеличению кривизны поверхности, вызывает и локальное увеличение напряженности электрического поля, пропорциональное амплитуде деформации [7,9,10], которая у вершин стоячих капиллярных волн на свободной заряженной поверхности жидкости может превысить критическое для зажигания коронного разряда значение.

Раскачка интенсивных осцилляций свободной поверхности жидкого слоя заряженных обводненных градин и крупных ($R \approx 100\text{--}1000 \mu\text{m}$) капель, свободно падающих в грозовом облаке, происходит за счет их столкновения с более мелкими капельками ($r \sim 10 \mu\text{m}$), на которые приходится максимум концентрации облачных капель ([6], стр. 301–306). Кроме того, известно [11], что при уменьшении толщины жидкого слоя на поверхности твердого ядра максимум энергии в спектре мод осцилляций жидкого слоя, возбуждающихся за счет их нелинейного взаимодействия, смещается в сторону более высоких мод, что приводит к уменьшению характерного масштаба деформации поверхности жидкого слоя и локальному увеличению напряженности электрического поля.

В связи со сказанным представляет интерес исследование возможности зажигания коронного разряда у поверхности нелинейно-осциллирующего заряженного слоя жидкости, на поверхности твердого сферического ядра, при начальном возбуждении одной из более высоких, чем основная ($n = 2$) мод осцилляций.

1. Постановка задачи

Пусть на поверхности твердого сферического ядра радиуса R_0 находится смачивающий ее сферически симметричный слой идеальной несжимаемой идеально

проводящей жидкости с внешним радиусом R , плотностью ρ , коэффициентом поверхностного натяжения σ и зарядом Q . Примем, что в начальный момент времени $t = 0$ равновесная сферическая форма свободной поверхности слоя жидкости претерпела виртуальную осесимметричную деформацию конечной амплитуды, существенно меньшей радиуса R и меньшей толщины слоя жидкости, пропорциональную одной из мод капиллярных осцилляций жидкого слоя. Будем исследовать нелинейные осцилляции градины при $t \geq 0$.

Все рассмотрение проведем в безразмерных переменных, в которых $R = \sigma = \rho = 1$, в сферической системе координат с началом в центре масс системы. Тогда уравнение границы раздела сред (свободной поверхности жидкости) запишется в виде

$$F(r, \vartheta, t) = r - 1 - \xi(\vartheta, t) = 0, \quad |\xi| \ll 1.$$

Течение жидкости будем полагать потенциальным, т. е. примем, что поле скоростей $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ волнового движения в жидком слое полностью определяется функцией потенциала скорости $\psi(\mathbf{r}, t)$ известным соотношением: $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \equiv \nabla\psi(\mathbf{r}, t)$.

Математическая формулировка задачи расчета нелинейных осцилляций жидкого слоя на поверхности твердого сферического ядра состоит из уравнений Лапласа для потенциала поля скоростей $\psi(\mathbf{r}, t)$ и электростатического потенциала $\Phi(\mathbf{r}, t)$:

$$\Delta\psi(\mathbf{r}, t) = 0; \quad \Delta\Phi(\mathbf{r}, t) = 0;$$

и граничных условий к ним — на свободной поверхности жидкости кинематического

$$r = 1 + \xi: \quad \frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial\psi}{\partial\vartheta} \frac{\partial\xi}{\partial\vartheta},$$

динамического

$$-\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{1}{2} (\nabla\psi)^2 + \Delta p + p_E - p_\sigma = 0;$$

$$p_E \equiv (\nabla\Phi)^2/8\pi; \quad p_\sigma \equiv \operatorname{div} \mathbf{n}$$

постоянства электрического потенциала свободной поверхности жидкого слоя

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi_S(t),$$

а также граничных условий на бесконечности

$$r \rightarrow \infty: \quad \Phi(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0$$

и на поверхности твердого сферического ядра

$$r = R_0: \quad \partial\psi(\mathbf{r}, t)/\partial r = 0.$$

В выписанных соотношениях Δp — перепад постоянных давлений внутри и вне жидкости в состоянии равновесия; p_E — давление электрического поля собственного заряда на свободную поверхность

жидкого слоя градины; p_σ — лапласовское давление; $\mathbf{n} \equiv \nabla F(r, \vartheta, t)/|\nabla F(r, \vartheta, t)|$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности слоя жидкости; $\Phi_S(t)$ — постоянный вдоль свободной поверхности жидкости электрический потенциал.

Кроме перечисленных выше граничных условий следует учесть также условия: неизменности собственного электрического заряда системы

$$-\frac{1}{4\pi} \oint_S (\mathbf{n} \cdot \nabla\Phi) dS = Q; \quad S = \begin{cases} r = 1 + \xi(\vartheta, t); \\ 0 \leq \vartheta \leq \pi; \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \end{cases}$$

неизменности объема слоя жидкости

$$\int_{V_1} r^2 dr \sin\vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{4}{3} \pi (1 - R_0^3);$$

$$V_1 = \begin{cases} R_0 \leq r \leq 1 + \xi(\vartheta, t); \\ 0 \leq \vartheta \leq \pi; \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \end{cases}$$

неподвижности центра масс градины

$$\frac{\int_{V_1} \mathbf{r} dV_1 + \rho_* \int_{V_2} \mathbf{r} dV_2}{\int_{V_1} dV_1 + \rho_* \int_{V_2} dV_2} = 0; \quad V_2 = \begin{cases} 0 \leq r \leq R_0; \\ 0 \leq \vartheta \leq \pi; \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

Здесь ρ_* — безразмерная плотность твердого ядра.

Начальные условия к поставленной задаче сформулируем в виде задания начальной осесимметричной деформации равновесной сферической формы свободной поверхности жидкого слоя обводненной градины и равенства нулю начальной скорости движения свободной поверхности

$$t = 0: \quad \xi(\vartheta, t) = \xi_0 P_0(\mu) + \xi_1 P_1(\mu) + \varepsilon P_k(\mu) \quad (k \geq 2);$$

$$\mu \equiv \cos\vartheta; \quad \frac{\partial\xi(\vartheta, t)}{\partial t} = 0.$$

Здесь ε — безразмерная амплитуда начальной деформации, являющаяся малым параметром задачи; $P_k(\mu)$ — полином Лежандра k -го порядка; ξ_0 и ξ_1 — константы, определяемые условиями неизменности объема жидкого слоя и неподвижности центра масс системы.

Следует отметить, что условия неизменности объема жидкого слоя и неподвижности центра масс должны выполняться в любой момент времени, в том числе и в начальный. Несложно показать, что если в начальный момент времени возбуждена только одна мода, то

$$\xi_0 = -\varepsilon^2 \frac{1}{(2k+1)} + O(\varepsilon^3); \quad \xi_1 = 0 + O(\varepsilon^3).$$

2.

Сформулированную задачу в квадратичном по ε приближении целесообразно решать методом временных масштабов [12], как это проделано в [11]. Для этого искомые функции $\xi(\vartheta, t)$, $\psi(\mathbf{r}, t)$, $\Phi(\mathbf{r}, t)$ представляются в виде асимптотических расположений по степеням малого параметра ε и считаются зависящими не просто от времени t , но от разных его масштабов T_m , определенных соотношением $T_m \equiv \varepsilon^m t$:

$$\begin{aligned}\xi(\vartheta, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \xi^{(m)}(\vartheta, T_0, T_1, \dots); \\ \psi(\mathbf{r}, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \psi^{(m)}(r, \vartheta, T_0, T_1, \dots); \\ \Phi(\mathbf{r}, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \Phi^{(m)}(r, \vartheta, T_0, T_1, \dots).\end{aligned}\quad (1)$$

Производные по времени вычисляются, с учетом полного набора различных его масштабов, по правилу [12]:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + O(\varepsilon^3).\quad (2)$$

Подставив разложения (1), (2) в сформулированную краевую задачу и приравнявая в каждом из соотношений слагаемые одного порядка малости, несложно получить набор краевых задач для последовательного определения неизвестных функций $\xi^{(m)}$, $\psi^{(m)}$, $\Phi^{(m)}$. Решение задачи о расчете нелинейных осцилляций жидкого слоя на поверхности сферической градины подробно описано в [11], поэтому в настоящем изложении сразу приведем окончательные выражения, необходимые для нижеследующего анализа.

Аналитическое выражение для деформации формы свободной поверхности жидкого слоя с точностью до слагаемых второго порядка малости по ε определяется выражением

$$\begin{aligned}\xi(\vartheta, t) &\approx \varepsilon \cos(\omega_k t) P_k(\mu) - \varepsilon^2 \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{(2k+1)} [1 + \cos(2\omega_k t)] \right. \\ &+ \sum_{j=1}^k \left[(\lambda_{k,k,2j}^{(-)} + \lambda_{k,k,2j}^{(+)}) \cos(\omega_{2j} t) \right. \\ &\left. \left. - (\lambda_{k,k,2j}^{(-)} + \lambda_{k,k,2j}^{(+)}) \cos(2\omega_k t) \right] P_{2j}(\mu) \right\} + O(\varepsilon^3 t);\end{aligned}\quad (3)$$

$$\lambda_{mln}^{(\pm)} \equiv \frac{\gamma_{mln} \pm \omega_n \omega_l \eta_{mln}}{\omega_n^2 - (\omega_m \pm \omega_l)^2}; \quad \omega_n^2 = \chi_n n(n-1)(n+2-W);$$

$$\begin{aligned}\gamma_{mln} &\equiv K_{mln} \left\{ n \chi_n \left[2[l(l+1) - 1] + \frac{W}{2} [l(m+1) \right. \right. \\ &\left. \left. - m(2m - 2n + 7) + 3] \right] + \omega_m^2 [n \chi_n - \nu_m] \right\} \\ &+ \alpha_{mln} \left\{ \frac{n \chi_n W}{2} + \frac{\omega_m^2}{m \chi_m} \right\};\end{aligned}$$

$$W \equiv \frac{Q^2}{4\pi};$$

$$\eta_{mln} \equiv K_{mln} \left[\frac{n \chi_n}{2} - \nu_m \right] + \frac{\alpha_{mln}}{m \chi_m} \left[1 + \frac{n \chi_n}{2l \chi_l} \right];$$

$$K_{mln} = [C_{m0l0}^{n0}]^2;$$

$$\alpha_{mln} \equiv -\sqrt{m(m+1)l(l+1)} C_{m0l0}^{n0} C_{m(-1)l1}^{n0};$$

$$\nu_m \equiv \frac{m-1 + (m+2)R_0^{2m+1}}{1 - R_0^{2m+1}}; \quad \chi_n \equiv \frac{(n+1)(1 - R_0^{2m+1})}{n+1 + n R_0^{2n+1}}.$$

Здесь C_{m0l0}^{n0} и $C_{m(-1)l1}^{n0}$ — коэффициенты Клебша–Гордана [13]. Параметр Рэлея W , записывающийся в размерном виде как $W \equiv Q^2/4\pi\sigma R^3$, характеризует устойчивость свободной сферической поверхности градины (капли) по отношению к собственному заряду. Заряженный слой жидкости на поверхности градины претерпевает неустойчивость, сопровождающуюся сбросом части заряда путем эмиссии серии высокодисперсных сильно заряженных дочерних капелек при $W \geq W_{cr} \equiv 4$ [7].

Аналитическое выражение для электростатического потенциала в окрестности нелинейно-осциллирующего заряженного жидкого слоя на поверхности твердого сферического ядра имеет вид

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r}, t) &= \frac{Q}{r} + \varepsilon \frac{Q}{r^{n+1}} \cos(\omega_k t) P_k(\mu) \\ &+ \varepsilon^2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{Q}{r^{2j+1}} \left\{ M_{2j}^{(2)} + k K_{k,k,2j} [\cos(\omega_k t)]^2 \right\} P_{2j}(\mu),\end{aligned}\quad (4)$$

где

$$M_0^{(2)}(t) = \frac{1}{2(2k+1)} [1 + \cos(\omega_k t)];$$

$$M_n^{(2)}(t) = -N_n(0) \cos(\omega_n t) + N_n(t) \quad (n \geq 2),$$

$$N_n(t) = \frac{1}{2} (\lambda_{k,k,n}^{(-)} + \lambda_{k,k,n}^{(+)} \cos(2\omega_k t)); \quad Q = 2\sqrt{\pi W}.$$

3. Расчет напряженности электрического поля у поверхности заряженной градины

Выражение для напряженности электростатического поля $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \equiv -\nabla\Phi(\mathbf{r}, t)$ в окрестности свободной поверхности нелинейно-осциллирующего заряженного

жидкого слоя имеет вид

$$r \geq 1 + \xi(\vartheta, t) : \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{Q}{r^2} \mathbf{e}_r + \varepsilon Q \left\{ \mathbf{e}_r \frac{(k+1)}{r^{k+2}} P_k(\mu) + \mathbf{e}_\vartheta \frac{1}{r^{k+2}} \frac{\partial P_k(\mu)}{\partial \vartheta} \right\} \cos(\omega_k t) + \varepsilon^2 \left\{ \mathbf{e}_r \sum_{j=0}^k \frac{Q(2j+1)}{r^{2j+2}} \times \left\{ M_{2j}^{(2)}(t) + k K_{k,k,2j} [\cos(\omega_k t)]^2 \right\} P_{2j}(\mu) + \mathbf{e}_\vartheta \sum_{j=0}^k \frac{Q}{r^{2j+2}} \left\{ M_{2j}^{(2)}(t) + k K_{k,k,2j} [\cos(\omega_k t)]^2 \right\} \frac{\partial P_{2j}(\mu)}{\partial \vartheta} \right\}, \quad (5)$$

где \mathbf{e}_r и \mathbf{e}_ϑ — орты сферической системы координат. Из полученного выражения найдем напряженность электрического поля на невозмущенной сферической поверхности свободной поверхности жидкого слоя. Для этого разложим (5) в окрестности равновесной сферической формы по амплитуде деформации. На ней же определим производные по координатам:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(r, \vartheta, t) \Big|_{r=1+\xi} &\approx \left[\mathbf{E}(r, \vartheta, t) + \xi \frac{\partial \mathbf{E}(r, \vartheta, t)}{\partial r} \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \xi^2 \frac{\partial^2 \mathbf{E}(r, \vartheta, t)}{\partial r^2} \right] \Big|_{r=1} = \mathbf{e}_r \left\{ Q + Q\varepsilon(k-1) \cos(\omega_k t) P_k(\mu) \right. \\ &+ Q\varepsilon^2 \left\{ \sum_{j=0}^k (2j-1) M_{2j}^{(2)} P_{2j}(\mu) \right. \\ &+ \left. \left(\sum_{j=0}^k [3 - (k+1)(k+2) \right. \right. \\ &+ \left. \left. (1 - \delta_{j0})(2j+1)k] K_{k,k,2j} [\cos(\omega_k t)]^2 \right\} P_{2j}(\mu) \right\} \\ &+ \mathbf{e}_\vartheta \left\{ \varepsilon Q M_k^{(1)} \frac{\partial P_k(\mu)}{\partial \vartheta} \right. \\ &+ \varepsilon^2 Q \sum_{j=0}^k \left(K_{k,k,2j} [\cos(\omega_k t)]^2 \left[k \frac{\partial P_{2j}(\mu)}{\partial \vartheta} \right. \right. \\ &\left. \left. - (k+2) P_{2j}(\mu) \right] + M_{2j}^{(2)}(t) \frac{\partial P_{2j}(\mu)}{\partial \vartheta} \right) \right\}, \quad (6) \end{aligned}$$

δ_{im} — символ Кронекера.

Чтобы найти нормальную компоненту электрического поля в окрестности свободной поверхности нелинейно-осциллирующего жидкого слоя $E_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}$, выпишем в явном виде аналитическое выражение для вектора нормали к свободной поверхности жидкого слоя:

$$\mathbf{n} \equiv \nabla F(r, \vartheta, t) / |\nabla F(r, \vartheta, t)| = n_r \cdot \mathbf{e}_r + n_\vartheta \cdot \mathbf{e}_\vartheta.$$

С точностью до слагаемых второго порядка малости по ε вблизи свободной поверхности проекция n_r и n_ϑ на орты

сферической системы координат \mathbf{e}_r и \mathbf{e}_ϑ вектора нормали определяются выражениями:

$$\begin{aligned} n_r &= 1 - \varepsilon^2 \frac{1}{2} \left(\partial_\vartheta \xi^{(1)} \right)^2 = 1 - \varepsilon^2 \frac{1}{2} \left(\cos(\omega_k t) \frac{\partial P_k(\mu)}{\partial \vartheta} \right)^2; \\ n_\vartheta &= -\varepsilon \partial_\vartheta \xi^{(1)} + \varepsilon^2 \left(\xi^{(1)} \partial_\vartheta \xi^{(1)} + \partial_\vartheta \xi^{(2)} \right) \\ &= -\varepsilon \cos(\omega_k t) \frac{\partial P_k(\mu)}{\partial \vartheta} + \varepsilon^2 \left([\cos(\omega_k t)]^2 P_k(\mu) \frac{\partial P_k(\mu)}{\partial \vartheta} \right. \\ &\left. + \sum_{j=0}^k M_{2j}^{(2)}(t) \frac{\partial P_{2j}(\mu)}{\partial \vartheta} \right). \quad (7) \end{aligned}$$

Скалярное произведение уравнений (6) и (7) даст выражение для нормальной компоненты электрического поля на поверхности градины

$$\begin{aligned} E_n &= Q + Q\varepsilon(k-1) \cos(\omega_k t) P_k(\mu) \\ &+ Q\varepsilon^2 \sum_{j=0}^k \left\{ (2j-1) M_{2j}^{(2)}(t) \left([3 - (k+1)(k+2) \right. \right. \\ &+ \left. \left. (1 - \delta_{j0})(2j+1)k] K_{k,k,2j} \right. \right. \\ &\left. \left. + \alpha_{k,k,2j}/2 \right) [\cos(\omega_k t)]^2 \right\} P_{2j}(\mu). \quad (8) \end{aligned}$$

4. Анализ полученных результатов

На рис. 1–6 приведены результаты расчетов по (6), (8) в виде зависимостей безразмерной напряженности электрического поля собственного заряда градины от полярного угла, безразмерного времени, расстояния и величины параметра W , когда начальная деформация равновесной сферической формы слоя жидкости на поверхности градины определена одной из мод осцилляций с номером $k \gg 2$. Напомним, что $k = 2$ соответствует сфероидальной деформации [7]. Мода с $k = 0$ соответствует радиальным пульсациям, и в расчетах второго порядка малости появляется всегда при любом виде начальной деформации свободной поверхности жидкого слоя на поверхности градины из-за требования неизменности объема жидкости [4,5,11]. Мода $k = 1$ соответствует поступательному движению центра масс системы и возбуждается всегда, когда имеется поступательное движение и когда в спектре мод, определяющих начальную деформацию, содержатся две моды с номерами, различающимися на единицу [14,15].

Для нижеследующих оценок примем, что градина радиуса R падает в облаке под действием сил тяжести и аэродинамического сопротивления с постоянной скоростью V , сталкиваясь при этом с существенно более мелкими капельками радиусом $r_0 \ll R$, несущими заряды q , содержащимися в облаке с объемной концентрацией n . Полагая для оценки по порядку величины, что сечение столкновения градины с мелкими капельками равно πR^2 ,

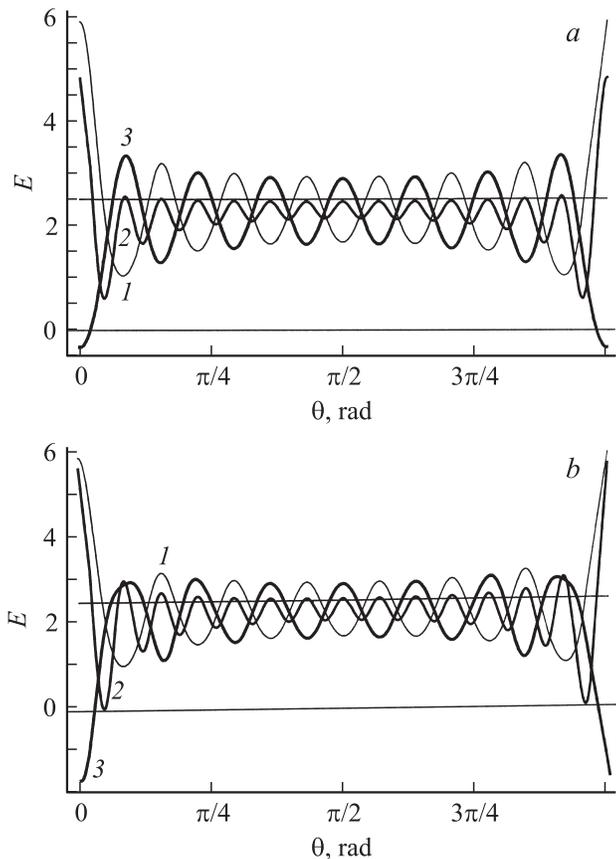


Рис. 1. Зависимость от полярного угла величины безразмерной напряженности электрического поля на поверхности обводненной градины: в начальный момент времени (1), $t = T/4$ (2), $t = T/2$ (3) при $W = 0.4$ и $R_0 = 0.9$ (a); $R_0 = 0.96$ (b), когда начальная деформация определяется четырнадцатой модой с периодом T при $\varepsilon = 0.1$. Здесь и на остальных рисунках прямая линия $E = 2.52$, параллельная оси абсцисс, соответствует безразмерной напряженности электростатического поля 20 kV/cm , кристаллической для зажигания коронного разряда.

несложно подсчитать, что за единицу времени градина столкнется с $N = \pi R^2 V n$ мелкими капельками и приобретет заряд $Q = Nq$. Примем для оценки, согласно справочным данным [6,16]: $R = 0.1 \text{ cm}$; $V = 649 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ ([16], стр. 260); $r_0 = 10^{-3} \text{ cm}$; $n = 10^2 - 10^3 \text{ cm}^{-3}$ ([16], стр. 131); $q \sim 10^{-5} \text{ CGSE}$ ([6], стр. 457). Тогда легко сосчитать, что за одну секунду градина столкнется с $N \approx 2 \cdot (10^3 - 10^4)$ мелкими капельками, и значит, циклическая частота возбуждения слоя жидкости на поверхности обводненной градины будет $\sim 10^4 - 10^5 \text{ s}^{-1}$. Из выражения для размерной частоты осцилляций слоя жидкости на поверхности твердого сферического ядра

$$\omega_n^2 = \frac{\sigma}{\rho R^3} \frac{(n+1)(1-R_0^{2n+1})}{n+1+nR_0^{2n+1}} n(n-1)(n+2-W)$$

несложно найти, что указанный диапазон частот соответствует частотам осцилляций мод из диапазона

$n \in 14-20$ на поверхности градин с радиусом ядра из диапазона размеров $R_0 \in 0.9-0.96$. Нелинейные осцилляции именно этих мод и определяют распределение электрического поля собственного заряда в окрестности свободной поверхности жидкого слоя на поверхности обводненной заряженной градины. Указанное обстоятельство и обусловило выбор значений R_0 и k в расчетах, проиллюстрированных рис. 1–6.

Следует отметить, что при столкновении градины с мелкими капельками объем жидкого слоя на ее поверхности увеличивается. Так, если в начальный момент времени толщина жидкого слоя была $0.04R$ (что соответствует $R_0 = 0.96$), то после столкновения с 10 000 мелких капелек (на пути, проходимом градиной за одну секунду) толщина слоя примерно удвоится.

В использованных безразмерных переменных для градины с радиусом $R = 1 \text{ mm}$ принятая для модельных оценок критическая для зажигания коронного разряда в окрестности градины в облаке на высоте $4-5 \text{ km}$, где давление атмосферы изменяется в диапазоне $p \in 460-400 \text{ mm Hg}$, величина напряженности электрического поля E_+ , лежащая в диапазоне

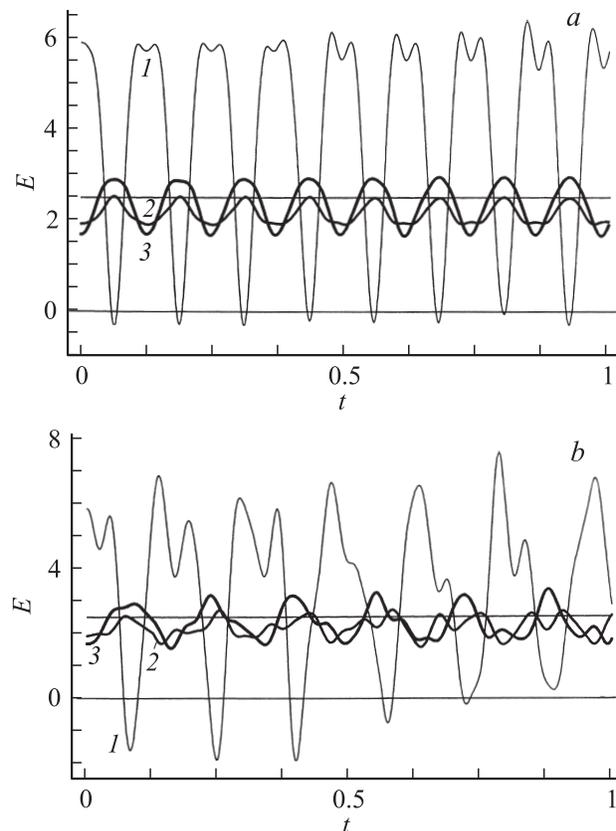


Рис. 2. Зависимость от безразмерного времени величины безразмерной напряженности электрического поля в окрестности свободной поверхности заряженного слоя жидкости на поверхности обводненной градины при различных значениях углов $\vartheta = 0$ (1), $\vartheta = \pi/4$ (2), $\vartheta = \pi/2$ (3) при $W = 0.4$, $R_0 = 0.9$ (a); $R_0 = 0.96$ (b), когда начальная деформация определяется четырнадцатой модой и $\varepsilon = 0.1$.

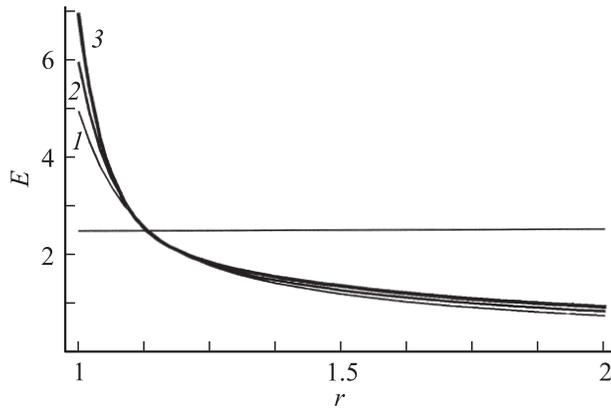


Рис. 3. Зависимость величины безразмерной напряженности поля в окрестности градины от безразмерного расстояния до ее центра в начальный момент времени, на оси симметрии $\vartheta = 0$, для различных мод, определяющих начальную деформацию: $k = 10$ (1), $k = 14$ (2), $k = 18$ (3) при $W = 0.4$, $R_0 = 0.9$, $\varepsilon = 0.1$.

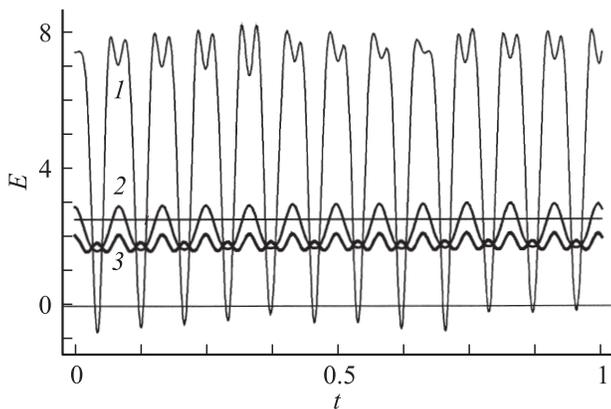


Рис. 4. Зависимости величины безразмерной напряженности электрического поля от безразмерного времени на оси симметрии капли $\vartheta = 0$, рассчитанные при $W = 0.4$ для различных расстояний до центра градины: $r = 1$, т.е. на поверхности градины (1); $r = 1.1$ (2); $r = 1.2$ (3), когда начальная деформация определяется восемнадцатой модой с амплитудой $\varepsilon = 0.1$.

$E_+ \in 22-23.4$ kV/cm [8], в безразмерной форме может быть определена соотношением $E_+ \geq 2.5$. При записи этого условия принималось во внимание, что напряженность электростатического поля обезразмеривается на $\sqrt{\sigma/R}$, а величина коэффициента поверхностного натяжения σ растет с уменьшением температуры, и на высоте 4–5 км, где температура атмосферы $T \in 260-250$ К, имеет значение $\sigma \approx 77-79$ дуп/см ([16], стр. 258).

Для оценок в нижеследующем изложении принимается: $\sigma = 78$ дуп/см. На рис. 1–6 значение напряженности электрического поля: $E_+ = 2.5$ (отмечено прямой линией, параллельной оси абсцисс). Из рис. 1–6 видно, что значительную часть периода нелинейных осцилляций жидкого слоя на поверхности заряженной обводненной градины напряженность поля в малой окрестности

гребней стоячих капиллярных волн в жидком слое достаточно велика для зажигания коронного разряда.

Из рис. 1 и 2 видно, что максимальные значения напряженности электрического поля собственного заряда растут с уменьшением толщины жидкого слоя, достигаются на оси симметрии градины, на ее вершинах, уменьшаясь ниже $E = 2.5$ в зависимости от толщины жидкого слоя на периферии угла $\vartheta_c \in [0.025-0.051] \cdot \pi$. С уменьшением толщины слоя жидкости на поверхности градины области в окрестности вершин, в которых напряженность поля достаточно велика для зажигания коронного разряда, увеличиваются. Радиус площадки S_c на вершине градины, где $E \geq 2.5$, можно оценить из соотношения: $R_c \approx R \sin \vartheta_c \approx R \vartheta_c \in [0.08-0.16] \cdot R$.

Из рис. 3 и 4 видно, что при принятой в расчетах величине параметра W градины, равном одной деся-

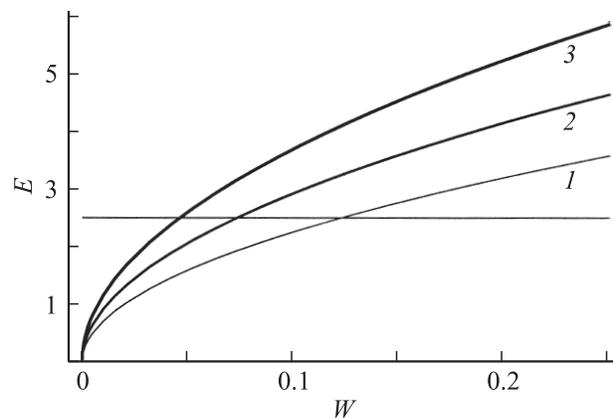


Рис. 5. Зависимость величины безразмерной напряженности поля на свободной поверхности жидкого слоя от параметра Рэлея W в начальный момент времени, на оси симметрии капли $\vartheta = 0$ для различных мод, определяющих начальную деформацию: $k = 10$ (1), $k = 14$ (2), $k = 18$ (3) при $R_0 = 0.96$, когда $\varepsilon = 0.1$.

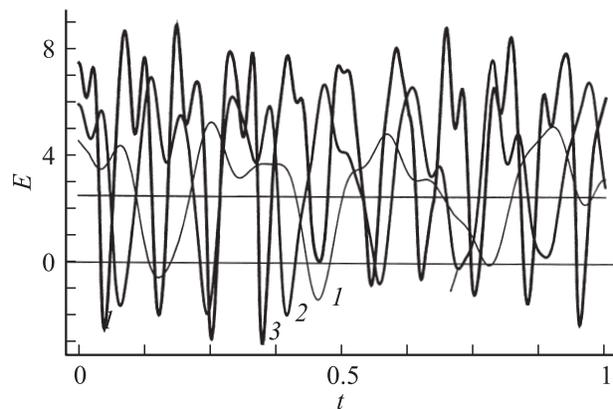


Рис. 6. Зависимость от времени величины безразмерной напряженности электрического поля на поверхности обводненной градины на оси симметрии системы $\vartheta = 0$ для различных мод, определяющих начальную деформацию: $k = 10$ (1), $k = 14$ (2), $k = 18$ (3) при $W = 0.4$, $R_0 = 0.96$, когда $\varepsilon = 0.1$.

той от предельного в смысле реализации электростатической неустойчивости, область существования поля, достаточно сильного для размножения электронов в электронных лавинах $E \geq 2.5$ простирается на $\approx 0.1 R$ от поверхности градины. Согласно рис. 5, минимальное значение параметра W , при котором напряженность поля на вершинах градины превышает необходимое для развития электронной лавины значение $E = 2.5$ убывает с ростом номера моды, определяющей начальную деформацию свободной поверхности жидкого слоя. Так, для восемнадцатой моды значение параметра Рэлея, минимальное для зажигания коронного разряда, определится соотношением $W \approx 0.012 W_{cr}$, что соответствует заряду, на порядок меньшему критического. Из рис. 6 можно видеть, что с ростом номера моды напряженность электрического поля собственного заряда на вершинах градины увеличивается.

Из сказанного следует, что на вершинах градины будут существовать (периодически со временем появляться и исчезать) примерно полусферические области с характерным линейным размером $\approx 0.1 R$, в которых $E \geq 2.5$, и могут распространяться электронные лавины. На боковой поверхности градины также будут появляться и исчезать примерно тороидальные (в принятой осесимметричной постановке) области, с теми же свойствами с существенно меньшей (см. рис. 1) протяженностью вдоль радиальной переменной. Однако существования в окрестности поверхности градины областей с достаточно большой для распространения электронных лавин и поддержания коронного разряда напряженностью электрического поля недостаточно для зажигания коронного разряда. Необходимо, чтобы в области поля с $E \geq 2.5$ появился свободный электрон, который, разгоняясь в сильном электрическом поле и ионизируя нейтральные атомы и молекулы, мог бы породить электронную лавину и зажечь коронный разряд [8,17–20].

5. О спусковом механизме зажигания коронного разряда

Грозовое облако не является идеально организованной структурой, в которой положительно заряженные капельки расположены строго в верхней части, а отрицательно заряженные — строго в нижней части облака. В реальном облаке положительно и отрицательно заряженные области сменяют друг друга нерегулярным образом и градина, падающая в облаке, проходит через его положительно и отрицательно заряженные объемы. В этой связи представляется полезным рассмотреть по отдельности закономерности зажигания коронного разряда в окрестности положительно и отрицательно заряженных градин.

5а. Положительный заряд градины

Пусть градина падает сквозь объем, в котором преимущественно содержатся положительно заряженные капельки воды. В этом случае градина при столкновении с ними будет заряжаться положительно. Приобретая достаточно большой для зажигания в окрестности коронного разряда положительный заряд, градина будет нуждаться в заправочном электроде, который положит начало электронной лавине, направленной к градине, и зажжет коронный разряд. Появление заправочного электрона в такой ситуации связано с разрушением отрицательного иона в области достаточно сильного поля у поверхности градины, с напряженностью, определенной соотношением $E_*/p \geq 90 \text{ V/cm} \cdot \text{mm Hg}$ [20] (в приведенной формуле p — давление газа, измеренное в mm Hg). При давлении воздуха 400 mm Hg несложно найти $E_* = 36 \text{ kV/cm}$. Причем отрицательные ионы будут втягиваться в область сильного поля электростатическими силами с расстояния порядка дебаевского радиуса r_d [8,20,21]:

$$r_d = \sqrt{\kappa T / 4\pi N q^2},$$

где T — температура среды; κ — постоянная Больцмана; N — концентрация ионов; q — заряд иона. Известно [6,8], что однозарядные ионы, появляющиеся за счет естественной радиоактивности и жесткого космического излучения содержатся в атмосфере с концентрацией $N \approx 10^3 \text{ cm}^{-3}$. Тогда при $T = 250 \text{ K}$ несложно получить $r_d \approx 3.5 \text{ cm}$. Сфера радиусом 3.5 cm имеет объем $\approx 170 \text{ cm}^3$ и содержит $\sim 10^5$ отрицательных ионов. Согласно ([21], стр. 107), среднее значение направленной скорости иона в электрическом поле U_E равно усредненному приращению скорости за время между его столкновениями с нейтральными атомами и другими ионами, так как столкновения приводят к существенному изменению направления скорости иона, и определяется соотношением

$$U_E = V_T \sqrt{\beta},$$

где V_T — скорость теплового движения ионов; β — коэффициент передачи энергии при упругих столкновениях, мало отличающийся для ион-атомных и ион-ионных столкновений от единицы. В итоге получаем, что скорость движения иона под действием поля (в рассматриваемой ситуации скорость движения отрицательного иона к градине) примерно равна тепловой скорости движения и измеряется сотнями метров в секунду. Следовательно, характерное время появления отрицательного иона в области сильного поля в окрестности градины, где ион распадется и освободит электрон, определится отношением среднего расстояния между ионами в среде $\approx 1/\sqrt{N}$, деленного на тепловую скорость движения иона, и составит $\sim 10^{-6} \text{ s}$.

5b. Отрицательный заряд градины

Отрицательно заряженная градина, падающая сквозь часть облака, содержащего отрицательно заряженные капельки, будет расталкивать отрицательные ионы со своего пути. Поскольку собственная скорость падения градины на порядок меньше скорости направленного движения отрицательных ионов, отталкиваемых собственным зарядом градины, то ионы будут успевать уйти с пути градины. В этой связи появление свободного электрона в области достаточно сильного поля $E \geq 2.5$ может быть связано с распадом нейтрального атома или молекулы под влиянием жесткого космического излучения непосредственно в области, где существует сильное поле. Такие акты ионизации идут со скоростью $\sim 10 \text{ cm}^{-3} \text{ s}^{-1}$ [6,8,20]. Объем пространства в окрестности градины, в котором существует сильное ($E \geq 2.5$) поле, согласно сказанному выше оценим в $\sim 10^{-5} - 10^{-4} \text{ cm}^3$. Следовательно, характерное время ожидания появления в такой области свободного электрона будет $\sim 10^3 - 10^4 \text{ s}$.

В рассматриваемой ситуации более реальна возможность появления возле отрицательно заряженной поверхности градины свободного электрона, появившегося вследствие автоэлектронной эмиссии в окрестности гребня стоячей капиллярной волны, где напряженность поля может быть весьма большой. Так, при разряде градины Q и радиусе R электростатический потенциал ее невозмущенной сферической поверхности Φ_S определится соотношением $\Phi_S = Q/R$. Появление (вследствие капиллярного волнового движения) виртуального возмущения свободной поверхности жидкого слоя с радиусом кривизны вершины r_* приведет к локальному увеличению напряженности поля на вершине выступа до величины $\sim Q/Rr_*$. В реальных условиях капиллярных осцилляций конечной амплитуды жидкого слоя на поверхности градины ограничение на кривизну поверхности вершины капиллярной волны наложит вязкость жидкости. Согласно [10], влияние вязкости жидкости становится существенным при характерных линейных размерах $\approx 0.1 \mu\text{m} \equiv 10^{-5} \text{ cm}$. Поэтому в качестве оценки для r_* можно принять $r_* \approx 0.5 \mu\text{m} = 10^{-4} \text{ cm}$.

Чтобы оценить напряженности электрического поля E_* в поверхности выступа с радиусом кривизны r_* , примем, что градина радиусом $R = 0.1 \text{ cm}$ несет электрический заряд, соответствующий величине параметра $W = 0.1 W_{\text{cr}}$, т.е. $Q = 0.6 \text{ CGSE}$. Следовательно, $E_* \sim Q/(Rr_*) \approx 1.2 \cdot 10^5 \text{ CGSE} \approx 3.6 \cdot 10^7 \text{ V} \cdot \text{cm}^{-1}$. Для оценки плотности автоэлектронного тока j при такой напряженности воспользуемся известной формулой Фаулера–Нордгейма [8,22]:

$$j \approx 1.4 \cdot 10^{-6} \cdot E^2 \varphi^{-1} \times \exp(10.1 \varphi^{-1/2} - 6.48 \cdot 10^7 \cdot \varphi^{3/2} E^{-1}),$$

где φ — потенциал работы выхода электрона из воды: $\varphi \in 6.09 - 6.13 \text{ eV}$ [23], E измеряется в V/cm и j — в

A/cm^2 . Из этого выражения несложно найти, что плотность автоэлектронного тока будет $7 \cdot 10^{-3} \text{ A/cm}^2$. Для полусферического выступа с $r_* = 0.5 \mu\text{m} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$, имеющего площадь $\sim 10^{-8} \text{ cm}^2$, такая плотность тока означает, что через него проходит ток $\sim 10^{-10} \text{ A}$ или эмиссия электронов идет с частотой $\sim 10^8 - 10^9 \text{ s}^{-1}$, т.е. характерное время ожидания появления свободного электрона $\sim 10^{-9} - 10^{-8} \text{ s}$. Появившийся электрон инициирует электронную лавину, которая в указанных выше условиях в области сильного поля в окрестности градины пройдет расстояние $\approx 0.1R$. По прошествии указанного промежутка времени будет эмитирован следующий электрон и все повторится сначала. В создание повторных лавин внесут вклад и процессы фотоионизации, обусловленные существованием значительного количества возбужденных атомов, остающихся в следе каждой лавины (их концентрация примерно на порядок превышает концентрацию электронов в лавине [20]). Механизм появления фотоэлектронов подробно описан в [20], и частота образования фотоэлектронов в окрестности точки старта лавины характеризуется временем длительности — $\sim 10^{-7} \text{ s}$.

6. Увеличение заряда градины

При зажигании коронного разряда в окрестности градины ее собственный электрический заряд исчезнет за счет потока зарядов противоположного знака на градину за характерное время $\sim 10^{-5} - 10^{-6} \text{ s}$ [17–19]. Появление на градине нового заряда в количестве, достаточном для зажигания коронного разряда, может быть связано со столкновениями быстро падающей в грозовом облаке крупной градины с витающими мелкими отрицательно заряженными каплями радиусом $r_0 \sim 0.001 \text{ cm}$ (на которые приходится максимум функции распределения облачных капель по размерам) и сбором с них электрических зарядов [6,16]. Проведем модельную оценку реальности такого механизма, не вдаваясь в детали электростатического взаимодействия отрицательно заряженной градины с одноименно заряженными капельками. Отметим лишь, что поляризация градины во внутриоблачном электрическом поле обеспечивает появление на передней (по отношению к направлению движения) части отрицательно заряженной градины положительного индуцированного заряда, к которому и притягиваются отрицательно заряженные капельки. Для положительно заряженной градины сбор положительно заряженных мелких капелек идет на заднюю, несущую отрицательный поляризационный заряд, часть. Примем, что сам обсуждаемый феномен имеет место на высоте 4–5 km, на уровне „мокрого роста“ градин — интенсивного протекания процессов разделения электрических зарядов и зарождения разряда молнии [24].

Пусть градина радиусом R падает в облаке под действием силы тяжести с постоянной скоростью V , сталкиваясь при этом с существенно более мелки-

ми капельками радиусом r_0 , несущими заряды q , содержащимися в облаке с объемной концентрацией n . Несложно подсчитать, что за единицу времени градина столкнется с $N = \pi R^2 V n$ мелкими капельками и приобретет заряд $Q = Nq$. Примем для оценки, согласно справочным данным [6,16]: $R = 0.1$ см; $V = 649$ см \cdot с $^{-1}$ ([16], стр. 260); $r_0 = 10^{-3}$ см; $n = 10^2 - 10^3$ см $^{-3}$ ([16], стр. 131); $q \sim 10^{-5}$ CGSE ([6], стр. 457). Тогда за одну секунду градина получит заряд $Q \approx 0.02 - 0.2$ CGSE. За пять секунд градина приобретет заряд $Q \approx 0.1 - 1$ CGSE, а напряженность электрического поля у невозмущенной осцилляциями свободной поверхности обводненной градины достигнет величины $E = Q/R^2 \approx 10 - 100$ CGSE = $3 \cdot (10^3 - 10^4)$ В \cdot см $^{-1}$. При таких величинах напряженности и давлении окружающего воздуха ≈ 400 мм Hg (т.е. на высоте $h \approx 5$ км над уровнем моря) в окрестности градины может зажечься коронный разряд. Заряд градины будет нейтрализован в коронном разряде, и градина начнет собирать новую порцию заряда. Таким образом, коронный разряд в окрестности свободно падающей в грозовом облаке градины будет гореть не непрерывно, но станет зажигаться периодически с интервалом порядка секунд.

Возникает естественный вопрос: не будет ли градина, несущая значительный электрический заряд, отталкивать со своего пути одноименно заряженные маленькие капельки. Для ответа на него оценим скорость, которую маленькая капелька, имеющая заряд q , приобретает в результате кулоновского взаимодействия с градиной, несущей заряд Q . Для проводимой модельной оценки примем, что маленькая капелька массой $m = 4\pi r^3 \rho / 3$ находится прямо перед градиной, движущейся с постоянной скоростью V_0 , на ее оси симметрии, и что капелька начинает „чувствовать“ присутствие градины, когда расстояние между ними становится меньше дебаевского радиуса r_d . В произвольный момент времени t расстояние между центрами капельки и градины запишем как $r_d - V_0 t$. Тогда сила F кулоновского взаимодействия между градиной и капелькой будет равна

$$F = Qq / (r_d - V_0 t)^2,$$

а ускорение a движения капельки под действием этой силы определится вторым законом Ньютона

$$a = Qq / m (r_d - V_0 t)^2.$$

Скорость V_q , которую приобретет капелька под действием кулоновского взаимодействия с градиной через время t после начала взаимодействия будет иметь вид:

$$V_q(t) = \frac{Qq}{m} \int_0^t \frac{dt}{(r_d - V_0 t)^2} \equiv \frac{Qq}{m r_d V_0} \frac{\tau}{(1 - \tau)};$$

$$\tau \equiv V_0 t / r_d.$$

Отсюда несложно найти путь $S_q(t)$, пройденный капелькой в результате кулоновского взаимодействия с градиной за время $r_* = (r_d - R) / V_0$, необходимое градине для

преодоления расстояния r_d , разделявшего центры градины и капельки в начальный момент взаимодействия:

$$S_q(t) = \frac{Qq}{m} \int_0^{t_*} V_q(t) dt \equiv \frac{Qq}{m V_0^2} [-\tau_* - \ln(1 - \tau_*)]$$

$$= \frac{Qq}{m V_0^2} \left[-\left(1 - \frac{R}{r_d}\right) - \ln\left(\frac{R}{r_d}\right) \right].$$

Подставив в это соотношение значения физических параметров, приведенных ранее: $Q = 0.6$ CGSE, $q = 10^{-5}$ CGSE, $r = 10^{-3}$ см, $V_0 = 649$ см \cdot с $^{-1}$, $r_d = 3.5$ см, несложно получить $S_q \approx 10^{-2}$ см. Итак, маленькая капелька успевает уйти с места своего первоначального положения на расстояние порядка десяти собственных радиусов, но в расчетный момент времени она оказывается на расстоянии $\approx 0.1 R$ от поверхности градины, и, согласно [25], маленькая капелька будет притягиваться к одноименно заряженной большой за счет поляризационного взаимодействия с собственным электростатическим отражением в градине.

Таким образом, крупная градина, падая в облаке, будет собирать на себя заряды с маленьких капелек независимо от их знаков.

7. Сравнение возможных механизмов удаления заряда с градины

Представляется интересным сравнить возможности реализации двух физических механизмов удаления электрического заряда с градины: его нейтрализация в коронном разряде и сброс заряда при реализации неустойчивости свободной поверхности жидкого слоя по отношению к собственному заряду. Согласно сказанному выше, коронный разряд может зажечься, когда напряженность поля собственного заряда градины у гребней стоячих капиллярных волн в жидком слое по мере увеличения ее заряда за счет сбора зарядов с мелких капелек, с которыми градина сталкивается, достигнет $E_+ = 22$ кВ/см. Электростатическая неустойчивость (неустойчивость по отношению к собственному заряду) свободной поверхности жидкого слоя имеет место, когда ее заряд достигает величины $Q_{cr} = \sqrt{16\pi\sigma R^3}$ [7], а напряженность поля — $E_{cr} = \sqrt{16\pi\sigma/R}$. Приравняв E_+ и E_{cr} , легко найти то значение радиуса градины R_* , при котором оба механизма удаления заряда могут иметь место одновременно: $R_* = 16\pi\sigma/E_+^2$. При $R < R_*$ коронный разряд у поверхности градины будет зажигаться раньше, чем она наберет заряд, необходимый для реализации электростатической неустойчивости. При $R > R_*$ механизм сброса избыточного заряда при реализации электростатической неустойчивости включится раньше, чем напряженность поля у поверхности градины достигнет E_+ . Полагая $\sigma = 78$ дин/см и $E_+ = 22$ кВ/см, несложно найти $R_* = 0.73$ см. Таким образом, для гра-

дин радиусом $R < 0.73$ см коронный разряд будет основным механизмом нейтрализации собственного заряда.

Анализ выражений (6) и (8) для напряженности электрического поля в окрестности заряженной поверхности градины показывает, что с ростом номера моды, определяющей начальную деформацию равновесной сферической формы свободной поверхности жидкого слоя, равномерность асимптотического разложения для E достигается при все меньших значениях малого параметра ε . Это обстоятельство связано с тем, что энергия, вносимая в колебательную систему начальной деформацией k -й моды амплитуды ε при прочих равных условиях, пропорциональна k^2 . Перераспределение этой энергии между модами, возбуждающимися во втором порядке малости за счет нелинейного взаимодействия, при достаточно большом ε приводит к значительному росту амплитуд некоторых мод с малыми номерами и к нарушению равномерности разложений. Существенное увеличение напряженности электростатического поля с ростом номера моды, определяющей начальную деформацию, проиллюстрировано приведенными рисунками, также объясняется увеличением энергии, вносимой в колебательную систему.

Заключение

При нелинейных осцилляциях жидкой заряженной поверхности обводненной градины напряженность электростатического поля у ее вершин может превышать значение, критическое для зажигания коронного разряда в ее окрестности даже при зарядах, на порядок меньших критических для реализации электростатической неустойчивости. С увеличением номера моды, определяющей начальную деформацию равновесной сферической формы, а также с уменьшением толщины жидкого слоя на поверхности ядра напряженность электростатического поля у вершин локальных выступов на жидкой заряженной поверхности градины растет. Потерявшая в коронном разряде свой заряд градина набирает его снова за счет неупругих столкновений с мелкими заряженными капельками за характерное время порядка нескольких секунд, так что коронный разряд у поверхности градины, свободно падающей в грозовом облаке, будет гореть не непрерывно, но будет зажигаться и гаснуть с интервалом в несколько секунд.

Работа выполнена в рамках тематического плана НИР вуза 2008 г. и при поддержке гранта РФФИ № 06-01-00066-а.

Список литературы

- [1] Дьячук В.А., Мучник В.А. // ДАН СССР. 1979. Т. 248. № 1. С. 60–63.
- [2] Бейтуганов М.Н. // Метеорология и гидрология. 1989. № 9. С. 49.
- [3] Grigor'ev A.I., Shiryayeva S.O. // Physica Scripta. 1996. Vol. 54. P. 660–666.
- [4] Григорьев А.И., Ширяева С.О., Волкова М.В. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 11. С. 31–36.
- [5] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Волкова М.В. // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 7. С. 40–47.
- [6] Мазин И.П., Хргиан А.Х., Имянитов И.М. Облака и облачная атмосфера. Справочник. Л.: Гидрометеоздат, 1989. 647 с.
- [7] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
- [8] Райзер Ю.П. Физика газового разряда. М.: Наука, 1987. 592 с.
- [9] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Белоножко Д.Ф. // ЖТФ. 1999. Т. 69. Вып. 7. С. 15–22.
- [10] Григорьев А.И. // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 10. С. 1–7.
- [11] Коромыслов В.А., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2008. Т. 78. Вып. 2. С. 42–50.
- [12] Найфе А. Методы возмущений. М.: Мир, 1983. 455 с.
- [13] Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. 436 с.
- [14] Ширяева С.О. // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 4. С. 15–22.
- [15] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Жаров А.Н. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 9. С. 60–63.
- [16] Мазин И.П., Шметер С.М. Облака. Строение и физика образования. Л.: Гидрометеоздат, 1983. 280 с.
- [17] Григорьев А.И., Синкевич О.А. // ЖТФ. 1984. Т. 54. Вып. 7. С. 1276–1283.
- [18] Grigor'ev A.I., Grigor'eva I.D., Shiryayeva S.O. // J. Sci. Explor. 1991. Vol. 5. N 2. P. 163–190.
- [19] Григорьев А.И. Шаровая молния. Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 2006. 220 с.
- [20] Лозанский Э.Д., Фирсов О.Б. Теория искры. М.: Атомиздат, 1975. 272 с.
- [21] Голант В.Е., Жилинский А.П., Сахаров С.А. Основы физики плазмы. М.: Атомиздат, 1977. 384 с.
- [22] Сливков И.Н. Процессы при высоком напряжении в вакууме. М.: Энергоиздат, 1986. 256 с.
- [23] Фоменко В.С. Эмиссионные свойства материалов. Справочник. Киев: Наукова думка, 1981. 340 с.
- [24] Фью А. // УФН. 1976. Т. 119. Вып. 4. С. 735–748.
- [25] Щерба Е.А., Григорьев А.И., Коромыслов В.А. // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 1. С. 15–19.