

01;03

О нелинейном капиллярно-флуктуационном периодическом волновом движении в тонкой пленке жидкости на твердой подложке

© А.В. Климов, А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 1 октября 2008 г. В окончательной редакции 12 марта 2009 г.)

Решена задача об аналитическом расчете нелинейного периодического волнового движения на свободной поверхности заряженного слоя идеальной несжимаемой электропроводной жидкости на твердой подложке при определяющем влиянии поля сил флуктуационной природы (дисперсионной составляющей расклинивающего давления). Показано, что волновые движения жидкости, появляющиеся в расчетах второго порядка малости по малой по сравнению с толщиной слоя амплитуде волны, в результате нелинейного взаимодействия как нелинейные поправки к волнам, заданным в начальный момент времени, выталкиваются полем флуктуационных сил на периферию области своего влияния. Этот эффект имеет место как при наличии внешнего электрического поля у свободной поверхности жидкости, так и в его отсутствие. Знак и величина нелинейных поправок зависят от наличия электрического поля у свободной поверхности жидкости, приводя к увеличению кривизны вершин нелинейных волн при наличии электрического поля и к снижению их кривизны в отсутствие поля.

PACS: 47.20.Ky, 47.35.Pq, 47.35.Lf, 47.61.Fg

Введение

Феномен расклинивающего давления, действующего в тонких (~ 100 nm) пленках жидкости на поверхности твердого тела был открыт Б.В. Дерягиным в тридцатых годах прошлого века и дал толчок исследованию сил молекулярного (дисперсионного) взаимодействия [1]. В частности, было установлено, что молекулярные или дисперсионные силы обусловлены взаимодействием мгновенных диполей, возникающих при движении элементарных зарядов в атомах твердого тела, независимо от наличия у них постоянного дипольного момента [1–3]. Усилиями Казимира, Лифшица, Дзялошинского, Питаевского была построена макроскопическая теория дисперсионных сил. Выяснилось, что внутри твердого тела всегда существует флуктуационное электромагнитное поле, связанное с временными флуктуациями интенсивности суммарного электромагнитного поля атомов (молекул) физически малых объемов твердого тела. При наличии границы твердого тела это поле не сразу исчезает, но убывает на характерном расстоянии ~ 100 nm по закону $\sim z^{-m}$, где $3 \leq m \leq 4$ в зависимости от значения z .

Флуктуационное электромагнитное поле оказывает силовое воздействие на жидкость, граничащую с твердым телом, и, в частности, оказывает давление на свободную поверхность тонких (толщиной $d \leq 100$ nm) слоев жидкости, определяющее в существенной степени расклинивающее давление [1–3] и играющее важную роль в феномене смачивания твердого тела жидкостью. Периодическое волновое движение, возникающее на поверхности тонких слоев жидкости, лежащих на твердой подложке, под действием капиллярных сил и сил флук-

туационной природы представляется целесообразным назвать капиллярно-флуктуационным.

Теоретические аналитические исследования периодических волн в тонких слоях жидкости с учетом сил флуктуационной природы проводились и ранее [4–12], однако выполнялись они в линейном приближении по малой амплитуде волны на поверхности слоя жидкости и ограничивались выводом и анализом дисперсионного уравнения. В недавней работе [13] проведено первое аналитическое исследование нелинейных осцилляций тонкого слоя воды на поверхности твердого ледяного ядра (тающей градины) при существенном влиянии поля сил флуктуационной природы. Однако результаты, полученные в [13], в сферической системе координат недостаточно общи: из-за наличия в задаче большого количества малых параметров расчеты проведены лишь для одного конкретного соотношения между малыми параметрами. Постановка подобной задачи в плоском варианте позволяет избавиться хотя бы от одного малого параметра — отношения толщины жидкого слоя к радиусу твердого ядра, и имеется надежда получить более общие, по сравнению с [13], выводы.

Важным обстоятельством, позволяющим рассчитывать на результативное исследование нелинейного взаимодействия волн в описанной системе, является то, что зависимость квадрата частоты ω ветви флуктуационных волн от волнового числа k такая же, как и у гравитационных волн, т.е. линейная $\omega^2 \sim k$ [5,7,8,11,12], тогда как у ветви капиллярных волн она имеет кубический вид $\omega^2 \sim k^3$. Иными словами, качественный вид нелинейного взаимодействия капиллярно-флуктуационных волн аналогичен взаимодействию капиллярно-гравитационных волн, достаточно детально исследованному [14,15].

Сказанное означает, что нелинейное взаимодействие капиллярно-флуктуационных волн можно исследовать для физических объектов любых геометрических конфигураций подложек независимо от ориентации и наличия поля сил тяжести. Из общезначимых соображений очевидно, что влияние поля сил тяжести на закономерности волнового движения в тонкой пленке жидкости пренебрежимо мало и может не учитываться во всех реальных ситуациях. Сказанное относится к пленке воды на поверхности тающей градины [4,5,7,10,16]; жидкого металла на поверхности иглы эмиттера в жидкометаллических источниках ионов [16]; электролита на оплавляющемся в результате джоулевого тепловыделения ледяном электроде из замерзшего электролита в масс-спектрометрах для анализа труднотлетучих веществ и веществ органического происхождения [17–19].

1. Описание физической модели

Пусть имеется однородно поверхностно заряженный с плотностью заряда η , неограниченный по площади плоский слой идеальной электропроводной несжимаемой жидкости плотностью ρ малой конечной толщины d , подверженный действию поля флуктуационных сил, заданный в прямолинейной декартовой системе координат геометрическим местом точек $-d < z \leq 0$, лежащий на твердом дне, находящийся в поле силы тяжести $\mathbf{g} \parallel -\mathbf{n}_z$ (\mathbf{n}_z — орт декартовой координаты z). Плоскость $z = 0$ декартовой системы координат совпадает с невозмущенной свободной поверхностью жидкости. Напряженность электростатического поля у невозмущенной свободной поверхности жидкости E_0 связана с поверхностной плотностью заряда η известным соотношением: $E_0 = 4\pi\eta\mathbf{n}_z$.

Примем, что свободная поверхность жидкости возмущена волновым движением, связанным с волнами конечных, но малых по сравнению с толщиной слоя амплитуд, бегущими вдоль оси x , и описывается соотношением: $z = \xi(x, t)$.

Для предстоящего качественного анализа в соответствии со сказанным выше примем, что величина флуктуационных сил, действующих на физически малый объем жидкости, обратно пропорциональна расстоянию в третьей степени между данной жидкой частицей и твердым дном. Таким образом, давление флуктуационных сил на невозмущенную поверхность жидкости, соответствующее дисперсионной компоненте расклинивающего давления, определяется как

$$P_f = \frac{A}{(d + \xi)^3}.$$

Коэффициент пропорциональности A , имеющий размерности энергии, для слоя жидкости, находящегося на поверхности твердого тела, примем равным 10^{-13} эрг [1–3].

Будем исследовать закономерности реализации нелинейного волнового движения в описанной системе в рамках теории возмущений. В качестве малого параметра ϵ

возьмем отношение амплитуды волновой деформации a к толщине слоя жидкости d .

2. Математическая формулировка задачи

Математическая модель, описывающая нелинейное периодическое капиллярно-флуктуационное волновое движение, может быть сформулирована в виде следующей краевой задачи

$$z > \xi: \quad \Delta\Phi = 0; \quad -d < z \leq \xi: \quad \Delta\Phi = 0;$$

$$z = \xi: \quad p = p_0 - \rho g \xi + \frac{A}{(d + \xi)^3} - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\rho}{2} (\nabla \varphi)^2;$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial z};$$

$$p + \frac{(\nabla \Phi)^2}{8\pi} = -\gamma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \left(1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right)^{-3/2}; \quad \Phi = 0;$$

$$z \rightarrow \infty: \quad \nabla \Phi = -E_0 \mathbf{n}_z; \quad z = -d: \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0; \quad (1)$$

$\Phi(\mathbf{r}, t)$ — поле электрического потенциала над свободной поверхностью жидкости; $\varphi(\mathbf{r}, t)$ — потенциал поля скоростей волнового течения жидкости в слое: p — давление в жидкости; γ — коэффициент поверхностного натяжения жидкости; p_0 — постоянная составляющая давления.

Для однозначной разрешимости обсуждаемой задачи необходимо сформулировать начальные условия, которых в соответствии с количеством и порядком производных по времени должно быть два. Однако в задачах подобного рода проблема выбора начальных условий оказывается довольно тонким вопросом, поскольку произвольное заданное начальное условие может привести к неоправданному увеличению громоздкости решения. Поэтому, как это принято в теории нелинейных периодических волн [20–22], условия при $t = 0$ подбираются таким образом, чтобы получаемое в результате решение имело как можно более простой вид. В качестве первого начального условия можно принять, что возмущение свободной поверхности в линейном приближении по амплитуде волны, которая принимается много меньшей толщины слоя жидкости, имеет вид суперпозиции бегущих в положительном направлении координатной оси x синусоидальных волн. Иными словами, в начальный момент времени задается профиль волновой деформации свободной поверхности жидкости с фиксированной малой, но конечной, амплитудой. Второе начальное условие выбирается по ходу решения таким образом, чтобы получить наименее громоздкое в математическом смысле решение.

Ниже рассматривается решение задачи для двух вариантов первого начального условия. В первом варианте

полагается, что при $t = 0$ возмущение свободной поверхности слоя жидкости в линейном приближении представляет собой бегущую в положительном направлении оси Ox плоскую синусоидальную волну:

$$\xi(x) = a \left\{ \exp[i(kx - \omega t)] + \text{с.с.} + O(a^2) \right\} \Big|_{t=0}; \quad (2)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число (λ — длина волны); ω — комплексная частота; с.с. — слагаемое, комплексно-сопряженное к выписанному. Во втором варианте полагается, что при $t = 0$ возмущение свободной поверхности слоя жидкости в первом приближении представляет собой суперпозицию двух плоских синусоидальных волн, бегущих в положительном направлении оси Ox :

$$\xi = 0.5a \left\{ \exp[i(k_1x - \omega_1t)] + \exp[i(k_2x - \omega_2t + \beta)] + \text{с.с.} + O(a^2) \right\} \Big|_{t=0}; \quad (3)$$

где k_1, k_2 — волновые числа соответственно первой и второй синусоидальных волн, ω_1, ω_2 — комплексные частоты, β — разность фаз между волнами.

3. Решение задачи

Задачу (1) будем решать аналитически при помощи метода многих масштабов [23]. Неизвестные функции задачи $\xi(x, t)$, $\Phi(\mathbf{r}, t)$, $\varphi(\mathbf{r}, t)$ и $p(\mathbf{r}, t)$ будем искать в виде разложений по малому параметру ε :

$$\xi(x, t) = \varepsilon \xi_1(x, t) + \varepsilon^2 \xi_2(x, t) + O(\varepsilon^3);$$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = -E_0 z + \varepsilon \Phi_1(\mathbf{r}, t) + \varepsilon^2 \Phi_2(\mathbf{r}, t) + O(\varepsilon^3);$$

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \varepsilon \varphi_1(\mathbf{r}, t) + \varepsilon^2 \varphi_2(\mathbf{r}, t) + O(\varepsilon^3);$$

$$p(\mathbf{r}, t) = p_0 + \varepsilon p_1(\mathbf{r}, t) + \varepsilon^2 p_2(\mathbf{r}, t) + O(\varepsilon^3). \quad (4)$$

Подставим асимптотические разложения (4) в задачу (1) и разложим граничные условия на возмущенной волновым движением свободной поверхности жидкости по малому параметру ε . Затем, собирая коэффициенты разложений различных порядков малости, разобьем исходную нелинейную задачу на несколько неоднородных линейных задач для нахождения поправок различных порядков малости, решение которых не представляет заметных математических трудностей.

В результате решения задачи (1) с начальным условием (2) получается выражение для формы свободной поверхности слоя жидкости с учетом величин второго порядка малости по амплитуде в виде:

$$\xi(x, t) = a \cos(kx - \omega t) + a^2 a_1 \cos[2(kx - \omega t)] + O(\varepsilon^3); \quad (5)$$

где частота ω определяется дисперсионным уравнением [9]:

$$\omega_k^2 = gk \operatorname{th}(kd)(1 + \sigma + \alpha^2 k^2 - \alpha kW); \quad (6)$$

$$\alpha = \sqrt{\gamma/\rho g}; \quad W = E_0^2/4\pi\sqrt{\rho g \gamma}; \quad \sigma = 3A/\rho g d^4.$$

Здесь α — капиллярная постоянная жидкости, W — параметр неустойчивости Тонкса–Френкеля, σ — параметр расклинивающего давления. Амплитудный множитель поправки второго порядка малости по амплитуде a_1 имеет вид:

$$a_1 = \frac{2k}{4\omega_k^2 - \omega_{k_2}^2} \left(\left(\frac{3A}{\rho d^5} - \frac{E_0^2 k^2}{8\pi\rho} + \frac{\omega_k^2}{4} (-3 + \operatorname{cth}^2(kd)) \right) \operatorname{th}(2kd) + \omega_k^2 \operatorname{cth}(kd) \right),$$

$$\omega_{k_2}^2 = 2kg \operatorname{th}(2kd)(1 + \sigma + (2\alpha k)^2 - 2\alpha kW). \quad (7)$$

В результате решения задачи (1) для начального условия (3) получается выражение для формы свободной поверхности слоя жидкости с учетом величин второго порядка малости по амплитуде в виде:

$$\begin{aligned} \xi(x, t) &= a \cos(k_1x - \omega_{k_1}t) + a \cos(k_2x - \omega_{k_2}t + \beta) \\ &+ a^2 a_1 \cos[2(k_1x - \omega_{k_1}t)] + a^2 a_2 \cos[2(k_2x - \omega_{k_2}t + \beta)] \\ &+ a^2 a_3 \cos[(k_1 + k_2)x - (\omega_{k_1} + \omega_{k_2})t + \beta] \\ &+ a^2 a_4 \cos[(k_1 - k_2)x - (\omega_{k_1} - \omega_{k_2})t - \beta] + O(\varepsilon^3); \quad (8) \end{aligned}$$

где значения частоты ω_{k_1} и ω_{k_2} определяются дисперсионным уравнением:

$$\omega_{k_i}^2 = gk_i \operatorname{th}(k_i d)(1 + \sigma + \alpha^2 k_i^2 - \alpha k_i W) \quad (i = 1, 2); \quad (9)$$

$$a_1 = \frac{2k_1}{4\omega_{k_1}^2 - \omega_{2k_1}^2} \left(\left(\frac{3A}{\rho d^5} - \frac{E_0^2 k_1^2}{8\pi\rho} + \frac{\omega_{k_1}^2}{4} (-3 + \operatorname{cth}^2(k_1 d)) \right) \operatorname{th}(2k_1 d) + \omega_{k_1}^2 \operatorname{cth}(k_1 d) \right);$$

$$a_2 = \frac{2k_2}{4\omega_{k_2}^2 - \omega_{2k_2}^2} \left(\left(\frac{3A}{\rho d^5} - \frac{E_0^2 k_2^2}{8\pi\rho} + \frac{\omega_{k_2}^2}{4} (\operatorname{cth}^2(k_2 d) - 3) \right) \operatorname{th}(2k_2 d) + \omega_{k_2}^2 \operatorname{cth}(k_2 d) \right);$$

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{1}{2} \frac{k_1 + k_2}{(\omega_{k_1} + \omega_{k_2})^2 - \omega_{k_1+k_2}^2} \left(\frac{12A}{\rho d^5} - \frac{E_0^2 k_1 k_2}{2\pi\rho} - (\omega_{k_1} + \omega_{k_2})^2 + \omega_{k_1} \omega_{k_2} (1 + \operatorname{cth}(k_1 d) \operatorname{cth}(k_2 d)) \right. \\ &\times \operatorname{th}[(k_1 + k_2)d] + (\omega_{k_1} + \omega_{k_2}) \\ &\left. \times (\omega_{k_1} \operatorname{cth}(k_1 d) + \omega_{k_2} \operatorname{cth}(k_2 d)) \right); \end{aligned}$$

$$a_4 = \frac{1}{2} \frac{k_1 - k_2}{(\omega_{k_1} - \omega_{k_2})^2 - \omega_{k_1 - k_2}^2} \times \left(\left(\frac{12A}{\rho d^5} - \frac{E_0^2}{4\pi\rho} |k_1 - k_2| (k_1 + k_2 - |k_1 - k_2|) - (\omega_{k_1} - \omega_{k_2})^2 - \omega_{k_1} \omega_{k_2} (1 - \text{cth}(k_1 d) \text{cth}(k_2 d)) \right) \times \text{th}[(k_1 - k_2)d] + (\omega_{k_1} - \omega_{k_2}) \times (\omega_{k_1} \text{cth}(k_1 d) + \omega_{k_2} \text{cth}(k_2 d)) \right);$$

$$\omega_{2k_i}^2 = 2k_i g \text{th}(2k_i d) (1 + \sigma + (2\alpha k_i)^2 - 2\alpha k_i W) \quad (i = 1, 2); \quad (10)$$

$$\omega_{k_1 + k_2}^2 = g(k_1 + k_2) \text{th}[(k_1 + k_2)d] \times (1 + \sigma + \alpha^2(k_1 + k_2)^2 - \alpha(k_1 + k_2)W); \quad (11)$$

$$\omega_{k_1 - k_2}^2 = g(k_1 - k_2) \text{th}[(k_1 - k_2)d] \times (1 + \sigma + \alpha^2(k_1 - k_2)^2 - \alpha(k_1 - k_2)W). \quad (12)$$

Найденные в используемом в расчетах втором порядке малости аналитические выражения для проекций поля скоростей на координатные оси и электростатического поля приведены в Приложении.

Определим критические условия реализации электростатической неустойчивости свободной поверхности тонкого слоя электропроводной жидкости (неустойчивости по отношению к поверхностному заряду). Критические условия реализации неустойчивости $k = k_*$ и $W = W_*$ определяются условиями [23]:

$$\omega^2 = 0; \quad \frac{\partial(\omega^2)}{\partial k} = 0. \quad (13)$$

Из условий (13) определяются критические значения параметров неустойчивости в виде:

$$k_* \alpha = \sqrt{1 + \sigma}; \quad W_* = k_* \alpha + \frac{1 + \sigma}{k_* \alpha} \equiv 2\sqrt{1 + \sigma}. \quad (14)$$

Из этих соотношений видно, что при больших значениях параметра σ длина наиболее неустойчивой волны уменьшается: $\lambda_* \sim 1/\sqrt{1 + \sigma}$, а критическая для начала реализации неустойчивости напряженность электрического поля растет: $E_0 \sim \sqrt[4]{1 + \sigma}$.

4. Анализ решения

Анализ будет проводиться на примере воды при температуре 20°C. При этом параметры жидкости будут следующими: $\rho = 0.998 \text{ 23 g/cm}^3$, $\gamma = 72.8 \text{ dyne/cm}$. Отношение амплитуды волны a к толщине слоя d принимается равным 0.1. Толщина слоя будет изменяться в диапазоне от 10^{-5} до $5 \cdot 10^{-4}$ см. Ускорение свободного падения — $g = 981 \text{ cm/s}^2$.

Наибольший интерес представляет анализ волнового движения для волн с волновыми числами, равными или близкими к критическим для реализации неустойчивости Тонкса–Френкеля. В этой связи анализ будет проводиться для волн с волновыми числами $k = k_*$, $k = 0.9k_*$ и $k = 1.1k_*$. Для простоты примем $\beta = 0$.

В нижеследующем анализе роль флуктуационных сил в реализации нелинейного волнового движения в тонких слоях жидкости оценивается по их влиянию на амплитуду нелинейной поправки к профилю волны.

На рис. 1, *a* приведена зависимость от толщины слоя d безразмерной амплитуды нелинейной поправки к профилю волны a^* , согласно соотношению (5) (обезразмеривание проводится на амплитуду начальной деформации: $a^* \equiv a^2 a_1 / a = a a_1$, когда начальная деформация определена соотношением (2), для волн с различными волновыми числами. На рис. 1, *b* приведена аналогичная зависимость, когда начальная деформация определяется суперпозицией двух волн (см. (3)), а a^* определено по (8) как среднеквадратичное отношение коэффициентов при нелинейных поправках: $a^2 a_1$, $a^2 a_2$, $a^2 a_3$, $a^2 a_4$, обезразмеренное на амплитуду a :

$$a^* \equiv \frac{a}{\sqrt{2}} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}.$$

Несложно видеть, что амплитуды нелинейных поправок к профилю волны заметно зависят от длин волн, определяющих начальную деформацию. Зависимости, приведенные на рис. 1, посчитаны для малых значений толщины поверхностно заряженного слоя жидкости в окрестности $d \approx 10^{-5}$ см, когда в использованной модели влияние флуктуационных сил велико, и величина безразмерного параметра $\sigma = 3A/\rho g d^4$, определяющего их вклад в устойчивость заряженной поверхности жидкости, значительна: $\sigma \approx 3 \cdot 10^4$.

В отсутствие внешнего электрического поля ($W = 0$) знак нелинейной поправки к профилю волны меняется, а ее значение уменьшается. На рис. 1, *c* приведены зависимости, аналогичные представленным на рис. 1, *a*, рассчитанные при $W = 0$ при существенно больших значениях толщины слоя жидкости и малых значениях параметра σ . При $d = 2 \cdot 10^{-4}$ см параметр $\sigma \ll 1$ и флуктуационные силы не оказывают заметного влияния на характеристики нелинейных волн на свободной поверхности жидкости. Несложно видеть, что при $d \geq 3 \cdot 10^{-4}$ см величина безразмерной амплитуды нелинейной поправки a^* близка к значению, которое она имела бы при исключении из математической модели расклинивающего давления, т. е. к получаемому в данной модели предельным переходам $A \rightarrow 0$. Величина a^* при выполнении указанного предельного перехода (в отсутствие электрического поля) определяется выражением:

$$a^* = -\frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{k^2 a^2} \right) \varepsilon.$$

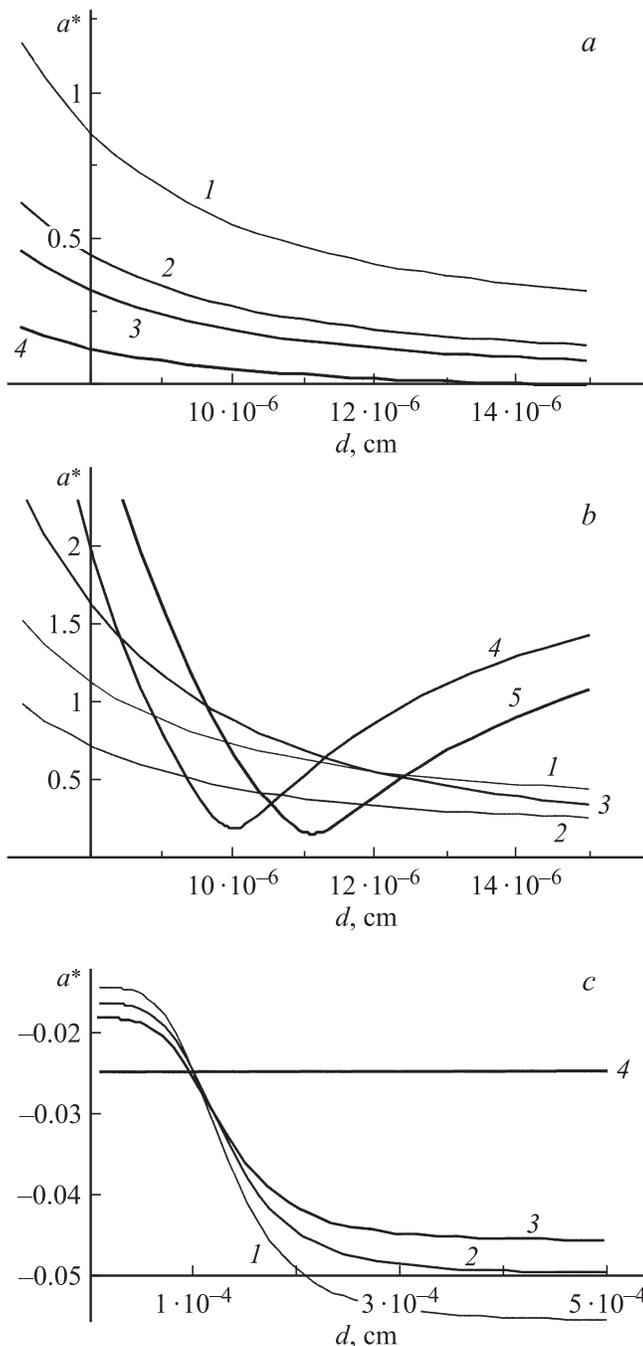


Рис. 1. *a* — зависимости величин безразмерной амплитуды нелинейной поправки к профилю волны от толщины слоя жидкости, рассчитанные для одноволновой начальной деформации при $W = 0.95W_*$ и при различных значениях волнового числа: 1 — $k = 0.8k_*$, 2 — k_* , 3 — $1.2k_*$, 4 — $8k_*$; *b* — зависимости величины безразмерной среднеквадратичной амплитуды нелинейной поправки к профилю волны от толщины слоя жидкости, рассчитанные для двухволновой начальной деформации при $k_1 = k_*$, $W = 0.95W_*$ и различных значениях волнового числа k_2 : 1 — $k_2 = 0.8k_*$, 2 — $1.2k_*$, 3 — $2k_*$, 4 — $6k_*$, 5 — $8k_*$; *c* — зависимости безразмерной амплитуды нелинейной поправки к профилю волны от толщины слоя жидкости, рассчитанные для одноволновой начальной деформации при $W = 0$ и различных значениях волнового числа: 1 — $k = 0.9k_*$, 2 — k_* , 3 — $1.1k_*$, 4 — $20k_*$.

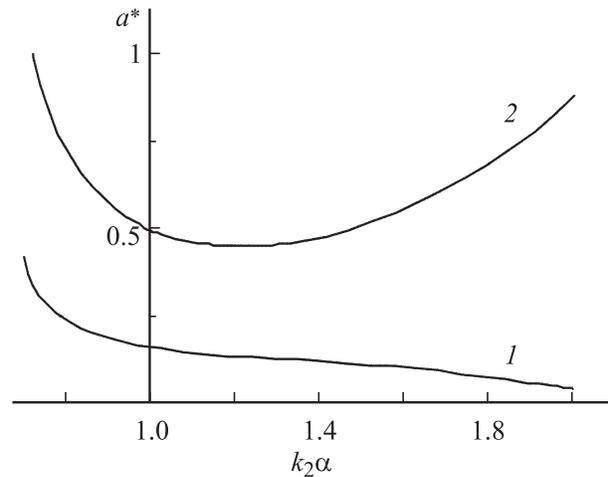


Рис. 2. Зависимости величины безразмерной среднеквадратичной амплитуды нелинейной поправки к профилю волны от безразмерного на капиллярную постоянную жидкости волнового числа $k_2\alpha$, рассчитанные для двухволновой начальной деформации при $k_1 = k_*$, $W = 0.95W_*$: 1 — $d = 10^{-4}$, 2 — 10^{-5} см.

Легко видеть, что значения a^* , рассчитанные по данной формуле, близки к приведенным на рис. 1, *c* для $d \approx 3 \cdot 10^{-4}$ см.

На рис. 1, *c* кривые 1–4 пересекаются между собой в окрестности точки:

$$d = \sqrt[4]{A/\rho g},$$

т. е. при $\sigma = 3$. При этом $a^* = -\varepsilon/4$.

Из рис. 1, *c* также видно, что для более длинных волн (волн с меньшим волновым числом) влияние расклинивающего давления на степень нелинейности волн на поверхности жидкости больше. Для коротких волн (например, для $k = 20k_*$, см. кривую 4 на рис. 1, *c*) флуктуационные силы практически не влияют на величину нелинейности волн на свободной поверхности слоя жидкости.

На рис. 2 в ситуации, когда начальная деформация заряженной свободной поверхности жидкости определена суперпозицией двух волн различной длины, приведены зависимости величины среднеквадратичного коэффициента a^* , характеризующего нелинейные поправки, от соотношения длин волн, рассчитанные при различных толщинах слоя жидкости.

На рис. 3 показаны образующие периодических нелинейных волн на свободной поверхности со стороны твердого дна (кривые с номером 1) для ситуации, когда в начальный момент времени на свободной поверхности жидкости заданы две бегущие в одном направлении синусоидальные волны с различными волновыми числами. Кривыми 2 приведены величины нелинейной поправки к профилям волн на свободной поверхности. Все кривые рассчитаны для начального момента времени $t = 0$ по формуле (8) (напомним, что в модели идеальной жид-

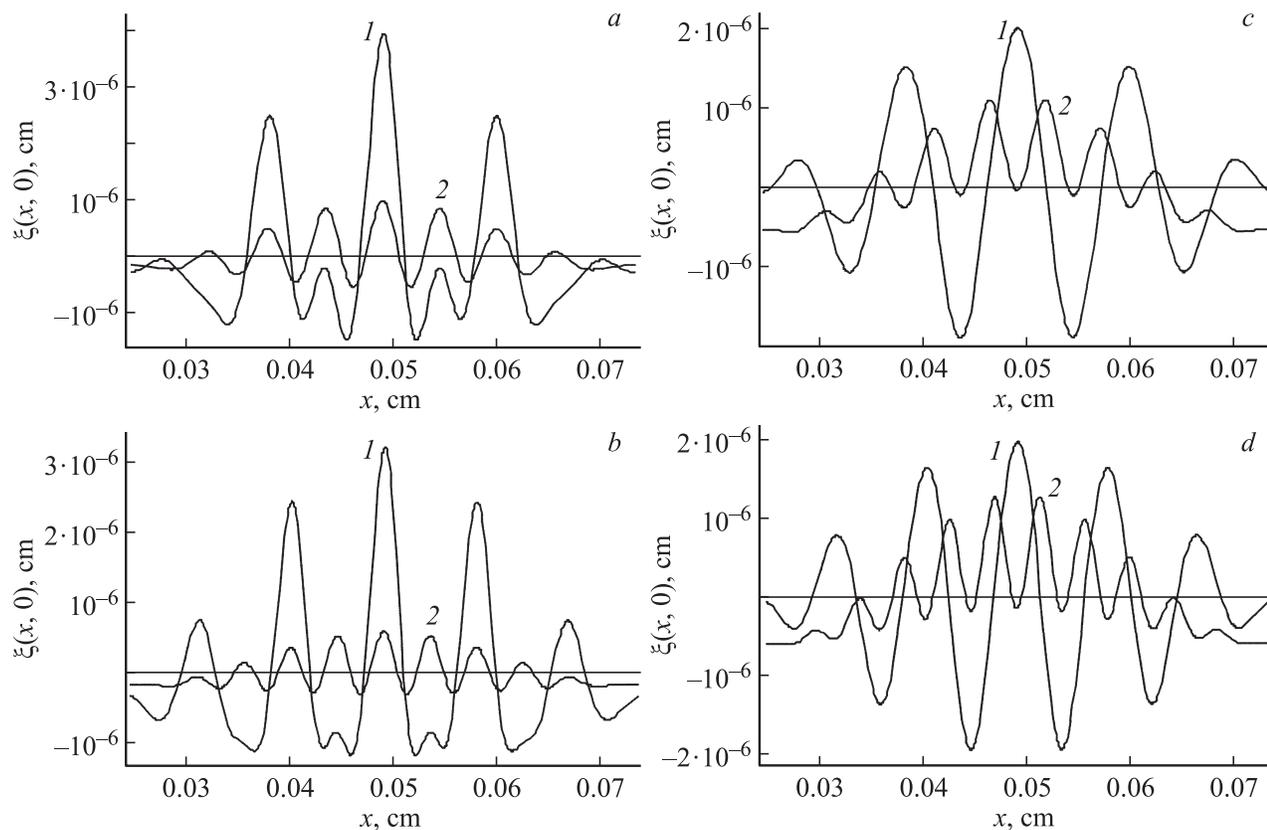


Рис. 3. *a, b* — форма нелинейной волны (кривые 1) и величина нелинейной поправки (кривые 2) в начальный момент времени, рассчитанные для суперпозиций двух волн при $d = 10^{-5}$ см, $W = 0.95W_*$, *a* — $k_1 = k_*$ и $k_2 = 0.8k_*$, *b* — $k_1 = k_*$ и $k_2 = 1.2k_*$. Амплитуда нелинейной поправки для наглядности показана в два раза меньшей реальной значения. *c, d* — те же зависимости, что на *a, b*, рассчитанные при $W = 0$. Амплитуда нелинейной поправки для наглядности показана в десять раз большей реальной значения.

кости нелинейные поправки генерируются вне времени при $t = 0$).

На рис. 3 бросается в глаза то обстоятельство, что при наличии внешнего электрического поля, близкого к критическому для реализации неустойчивости Тонкса–Френкеля ($W = 0.95W_*$), сдвиг фаз между основной (несущей) волной и нелинейной поправкой к ней равен нулю, а в отсутствие внешнего электрического поля ($W = 0$) сдвиг фаз равен π (это обусловлено изменением знака нелинейной поправки). Для внешнего наблюдателя это означает, что при $W = 0.95W_*$ вершины гребней волн на свободной поверхности слоя жидкости заострены, а впадины, наоборот, притуплены (см. кривые 1 на рис. 3, *a–b*), а при $W = 0$ вершины гребней волн притуплены, а впадины — заострены (см. кривые 1 на рис. 3, *c–d*). Из сказанного очевидно заметное увеличение напряженности электрического поля в окрестностях гребней волн на поверхности тонкого слоя жидкости при существенном влиянии флуктуационных сил и уменьшение пространственного масштаба реализации неустойчивости заряженной свободной поверхности, сопровождающееся эмиссией заряженных капель. Это согласуется с данными экспериментов с

жидкометаллическими источниками ионов, когда поверхность жидкого металла в сильном электрическом поле эмитирует в окружающее пространство сильно заряженные капельки субмикронных размеров и заряженные кластеры [24–26].

Согласно (8)–(9), коэффициенты a_j при нелинейных поправках имеют резонансный вид и указывают на наличие внутреннего нелинейного резонансного взаимодействия волн: как вырожденного в a_1 и a_2 , так вторичного комбинационного в a_3 и a_4 , которое реализуется только при многоволновой начальной деформации.

Наиболее интересным с физической точки зрения результатом проведенных расчетов, проиллюстрированным рис. 3, является факт вытеснения флуктуационными силами волны, представляющей собой нелинейную поправку, на периферию области их влияния. На рис. 3 это проявляется в смещении вверх вдоль вертикальной оси кривых 2. Этот феномен сохраняется и при увеличении толщины слоя жидкости на порядок (до тех пор, пока выполняется условие $\sigma \geq 1$). Поскольку флуктуационные силы действуют на объем жидкости перпендикулярно твердому дну и их интенсивность быстро убывает по мере удаления от дна, то физическая

природа обнаруженного феномена очевидна и связана с энергетическим выигрышем системы при вытеснении генерируемого волной течения жидкости за пределы действия флуктуационных сил.

Заключение

В проведенном анализе выяснилось, что в тонких субмикронных слоях жидкости на твердом дне флуктуационные силы существенно влияют на волновое движение конечной амплитуды. В сильно поверхностно заряженных слоях электропроводной жидкости они увеличивают степень нелинейности волн (увеличивают амплитуду нелинейной поправки к форме волны), приводя к увеличению кривизны вершин волн и к снижению кривизны впадин. В отсутствие электрического поля флуктуационные силы снижают степень нелинейности, приводя к уменьшению кривизны гребней волн и увеличению кривизны впадин.

Приложение

Полное поле скоростей волнового течения жидкости в слое жидкости при наличии флуктуационного поля представим в виде:

$$\mathbf{U}(x, z, t) = u(x, z, t) \cdot \mathbf{n}_x + v(x, z, t) \cdot \mathbf{n}_z.$$

Для одноволновой начальной деформации выражения для проекций поля скоростей на оси декартовых координат имеют вид:

$$\begin{pmatrix} u(x, z, t) \\ 0 \\ v(x, z, t) \end{pmatrix} = a\omega \frac{1}{\text{sh}(kd)} \begin{pmatrix} \text{ch}[k(d+z)] \cos(kx - \omega t) \\ 0 \\ \text{sh}[k(d+z)] \sin(kx - \omega t) \end{pmatrix} \\ + a^2(2\omega a_1 - k\omega \text{cth}(kd)) \frac{1}{\text{sh}(2kd)} \\ \times \begin{pmatrix} \text{ch}[2k(d+z)] \cos(2kx - 2\omega t) \\ 0 \\ \text{sh}[2k(d+z)] \sin(2kx - 2\omega t) \end{pmatrix}.$$

Выражение для поля электрического потенциала над свободной поверхностью жидкости имеет вид:

$$\begin{aligned} \Phi(x, z, t) &= E_0(-z + a \exp(-k_1 z) \cos(k_1 x - \omega_1 t)) \\ &+ a^2 f_1 \exp(-2k_1 z) \cos(2k_1 x - 2\omega_1 t); \\ f_1 &= a_1 - 0.5k_1. \end{aligned}$$

Для начального условия, в (3), когда начальная деформация свободной поверхности жидкости создается суперпозицией двух бегущих в одном направлении

синусоидальных волн, выражение для проекций поля скоростей на оси декартовых координат имеет вид:

$$\begin{pmatrix} u(x, z, t) \\ 0 \\ v(x, z, t) \end{pmatrix} = a\omega_1 \frac{1}{\text{sh}(k_1 d)} \\ \times \begin{pmatrix} \text{ch}[k_1(d+z)] \cos(k_1 x - \omega_1 t) \\ 0 \\ \text{sh}[k_1(d+z)] \sin(k_1 x - \omega_1 t) \end{pmatrix} \\ + a\omega_2 \frac{1}{\text{sh}(k_2 d)} \begin{pmatrix} \text{ch}[k_2(d+z)] \cos(k_2 x - \omega_2 t + \beta) \\ 0 \\ \text{sh}[k_2(d+z)] \sin(k_2 x - \omega_2 t + \beta) \end{pmatrix} \\ + a^2 c_1 \frac{1}{\text{sh}(2k_1 d)} \begin{pmatrix} \text{ch}[2k_1(d+z)] \cos(2k_1 x - 2\omega_1 t) \\ 0 \\ \text{sh}[2k_1(d+z)] \sin(2k_1 x - 2\omega_1 t) \end{pmatrix} \\ + a^2 c_2 \frac{1}{\text{sh}(2k_2 d)} \\ \times \begin{pmatrix} \text{ch}[2k_2(d+z)] \cos(2k_2 x - 2\omega_2 t + 2\beta) \\ 0 \\ \text{sh}[2k_2(d+z)] \sin(2k_2 x - 2\omega_2 t + 2\beta) \end{pmatrix} \\ + a^2 c_3 \frac{1}{\text{sh}[(k_1 + k_2)d]} \\ \times \begin{pmatrix} \text{ch}[(k_1 + k_2)(d+z)] \cos[(k_1 + k_2)x - (\omega_1 + \omega_2)t + \beta] \\ 0 \\ \text{sh}[(k_1 + k_2)(d+z)] \sin[(k_1 + k_2)x - (\omega_1 + \omega_2)t + \beta] \end{pmatrix} \\ + a^2 c_4 \frac{1}{\text{sh}[(k_1 - k_2)d]} \\ \times \begin{pmatrix} \text{ch}[(k_1 - k_2)(d+z)] \cos[(k_1 - k_2)x - (\omega_1 - \omega_2)t - \beta] \\ 0 \\ \text{sh}[(k_1 - k_2)(d+z)] \sin[(k_1 - k_2)x - (\omega_1 - \omega_2)t - \beta] \end{pmatrix};$$

$$c_1 = 2\omega_1 a_1 - k_1 \omega_1 \text{cth}(k_1 d); \quad c_2 = 2\omega_2 a_2 - k_2 \omega_2 \text{cth}(k_2 d);$$

$$c_3 = (\omega_1 + \omega_2) a_3 - 0.5(k_1 + k_2) [\omega_1 \text{cth}(k_1 d) + \omega_2 \text{cth}(k_2 d)];$$

$$c_4 = (\omega_1 - \omega_2) a_4 - 0.5(k_1 - k_2) [\omega_1 \text{cth}(k_1 d) + \omega_2 \text{cth}(k_2 d)].$$

Выражение для поля электрического потенциала над свободной поверхностью жидкости в анализируемой си-

туации имеет вид:

$$\begin{aligned} \Phi(x, z, t) = & E_0 \left(-z + a \exp(-k_1 z) \cos(k_1 x - \omega_1 t) \right. \\ & + a \exp(-k_2 z) \cos(k_2 x - \omega_2 t + \beta) \\ & + a^2 f_1 \exp(-2k_1 z) \cos(2k_1 x - 2\omega_1 t) \\ & + a^2 f_2 \exp(-2k_2 z) \cos(2k_2 x - 2\omega_2 t + \beta) \\ & + a^2 f_3 \exp[-(k_1 + k_2)z] \cos[(k_1 + k_2)x \\ & - (\omega_1 + \omega_2)t + \beta] \\ & + a^2 f_4 \exp[-|k_1 - k_2|z] \cos[(k_1 - k_2)x \\ & - (\omega_1 - \omega_2)t - \beta] \left. + f_5 \right); \\ f_1 = & a_1 - 0.5k_1; \quad f_2 = a_2 - 0.5k_2; \\ f_3 = & a_3 - 0.5(k_1 + k_2); \\ f_4 = & a_4 - 0.5(k_1 + k_2); \quad f_5 = 0.5(k_1 + k_2). \end{aligned}$$

Работа выполнена в рамках тематического плана НИР вуза, при поддержке грантов губернатора Ярославской области, РФФИ № 06-01-00066-а и Рособразования № 2.1.1/377.

Список литературы

- [1] Дерягин Б.В. Теория устойчивости коллоидов и тонких пленок. М.: Наука, 1986. 405 с.
- [2] Френкель Я.И. Кинетическая теория жидкости. М.: Наука, 1975. 592 с.
- [3] Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Теоретическая физика. Т. 9. Статистическая физика. Часть 2. М.: Наука, 1978. 448 с.
- [4] Григорьев А.И., Муничев М.И. // ЭОМ. 1992. № 4. С. 26–30.
- [5] Grigor'ev A.I., Munichev M.I., Shiryayeva S.O. // J. Coll. Int. Sci. 1994. Vol. 166. N 2. P. 267–274.
- [6] Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И., Муничев М.И., Ширяева С.О. // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22. Вып. 10. С. 84–89.
- [7] Коромыслов В.А., Муничев М.И., Ширяева С.О. // Письма в ЖТФ. 1997. Т. 23. Вып. 19. С. 1–7.
- [8] Григорьев А.И., Белоножко Д.Ф., Муничев М.И. // Письма в ЖТФ. 1997. Т. 23. Вып. 19. С. 66–70.
- [9] Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1998. Т. 68. Вып. 10. С. 27–31.
- [10] Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 1. С. 102–106.
- [11] Саночкин Ю.В. // Изв. РАН МЖГ. 2000. № 4. С. 156–164.
- [12] Саночкин Ю.В. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 5. С. 24–29.
- [13] Григорьев А.И., Ширяева С.О., Крючков О.С. // ЖТФ. 2007. Т. 77. Вып. 12. С. 1–9.
- [14] Филлипс О.М. // Нелинейные волны. М.: Мир, 1977. С. 197–220.
- [15] Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане. Т. 2. М.: Мир, 1981. 365 с.

- [16] Grigor'ev A.I., Shiryayeva S.O., Grigor'eva I.D. // J. Sci. Explor. 1992. Vol. 6. N 3.
- [17] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1992. Т. 62. Вып. 12. С. 9–20.
- [18] Ширяева С.О., Григорьев А.И. // ЖТФ. 1993. Т. 63. Вып. 8. С. 162–170.
- [19] Григорьев А.И., Морозов В.В., Ширяева С.О. // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 10. С. 33–37.
- [20] Nayfeh A.H. // J. Fluid Mech. 1971. Vol. 48. Pt. 2. P. 385–395.
- [21] Климов А.В., Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 1. С. 32–39.
- [22] Курочкина С.А., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 11. С. 44–51.
- [23] Френкель Я.И. // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. № 4. С. 348–350.
- [24] Wagner A., Hall T.M. // J. Vacuum Sci. Tech. 1979. Vol. 16. N 6. P. 1871–1874.
- [25] Габович М.Д. // УФН. 1983. Т. 140. № 1. С. 137–151.
- [26] Mair G.L.R. // J. Phys. D: Appl. Phys. 1990. Vol. 23. P. 1239–1243.