

Влияние шума на поведение осцилляторов вблизи границы синхронизации

© А.А. Короновский, М.К. Куровская, А.Е. Храмов, С.А. Шурыгина

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,
410012 Саратов, Россия
e-mail: alkor@nonlin.sgu.ru

(Поступило в Редакцию 18 декабря 2008 г.)

Рассматривается неавтономное поведение осцилляторов при наличии шума. Исследован вопрос о влиянии шумов на динамику локальных нулевых ляпуновских экспонент неавтономных динамических систем, находящихся вблизи границы возникновения синхронного режима. Показано, что шумовое воздействие на неавтономную динамическую систему, находящуюся вблизи границы установления синхронного режима, приводит к появлению во временной реализации участков синхронного движения, прерываемого асинхронными участками. При этом распределения локальных нулевых ляпуновских экспонент, соответствующих ламинарным фазам, сдвигаются в область отрицательных значений. Обнаруженное явление проиллюстрировано на системе с дискретным временем (отображение окружности на себя), являющейся эталонной моделью для описания явления синхронизации, а также на эталонной системе, демонстрирующей хаотическую динамику (система Ресслера).

PACS: 05.45.-a, 05.40.-a, 05.45.Tr

Введение

Настоящая работа посвящена изучению неавтономного поведения осцилляторов, находящихся вблизи границы возникновения синхронного режима при наличии шумов. Актуальность подобного исследования обусловлена несколькими основными причинами. Во-первых, очевидно, что шумы присутствуют как при проведении экспериментальных измерений, так и при численном моделировании. И хотя в ряде случаев влиянием шумов на поведение системы можно пренебречь, роль шумов становится важной при рассмотрении динамики систем вблизи точек бифуркации. Как следствие, поведение системы в окрестности бифуркационных точек в присутствии шумов может существенным образом отличаться от случая, когда шумы в рассмотрение не принимаются. Например, известно, что шум существенно изменяет статистические характеристики перемежающегося поведения [1–3]. Поэтому представляется важным выявить особенности поведения систем, обусловленные шумом, а также выяснить, к каким изменениям количественных характеристик (таких, например, как ляпуновские экспоненты) приводит воздействие шума.

Во-вторых, данное исследование тесно связано с такой актуальной на сегодняшний день темой, как хаотическая фазовая синхронизация [4]. В ряде случаев хаотическая динамика систем может рассматриваться как „зашумленные“ периодические колебания (см., например, [5,6]), и соответственно должна наблюдаться общность в поведении периодических осцилляторов вблизи границы синхронизации в присутствии шума и хаотических систем в окрестности границы режима фазовой синхронизации. Безусловно, влияние шумов на границу установления синхронного режима уже изучалось ранее, в частности,

хорошо известно, что добавление шума сдвигает порог возникновения синхронного режима (как в случае периодических, так и хаотических колебаний) в сторону больших значений параметра связи или амплитуды внешнего воздействия [5]. В этом случае шум оказывает деструктивное воздействие на синхронную динамику связанных осцилляторов (или на синхронное поведение неавтономной системы под внешним воздействием). В то же время известно, что шум может приводить и к конструктивному воздействию на поведение систем, в частности, известны явления стохастического резонанса [7] и индуцированной шумом синхронизации, причем последнее явление наблюдается как в системах с малым числом степеней свободы [8], так и в пространственно-распределенных [9]. Как показали результаты наших исследований [10], воздействие шума на неавтономный осциллятор, находящийся вблизи границы синхронного режима (когда явление синхронизации еще не наблюдается), также может оказывать конструктивное воздействие и приводить к повышению степени синхронизма наблюдающихся колебаний, что, в частности, выражается в поведении одной из нулевых ляпуновских экспонент: воздействие шума приводит к тому, что нулевая условная ляпуновская экспонента становится отрицательной еще до пересечения бифуркационного значения управляющего параметра (амплитуды внешнего сигнала или величины связи), соответствующего установлению синхронного режима в случае без шума.

Целью настоящей работы является, главным образом, изучение особенностей поведения нулевой условной экспоненты, соответствующей поведению системы вблизи установления синхронного режима в присутствии шума. Структура настоящей работы следующая. В разд. 1 описывается поведение условных ляпуновских экспонент

неавтономной динамической системы (прежде всего, нулевой условной ляпуновской экспоненты) в присутствии шума и вводится в рассмотрение модельная система (отображение окружности на себя), используемая в дальнейшем для проведения исследований. В разд. 2 рассматриваются локальные условные нулевые ляпуновские экспоненты, отвечающие синхронным и асинхронным участкам поведения на примере отображения окружности в присутствии шума, а в следующем разделе — на примере системы Ресслера, характеризующейся хаотической динамикой. Заключительные замечания и выводы приведены в разд. 4.

1. Нулевая условная ляпуновская экспонента

Рассмотрим поведение двух однонаправленных связанных осцилляторов

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_d &= \mathbf{H}(\mathbf{x}_d, \mathbf{g}_d), \\ \dot{\mathbf{x}}_r &= \mathbf{G}(\mathbf{x}_r, \mathbf{g}_r) + \varepsilon \mathbf{P}(\mathbf{x}_d, \mathbf{x}_r),\end{aligned}\quad (1)$$

где $\mathbf{x}_{d,r}$ — векторы состояний ведущей и ведомой систем соответственно, \mathbf{H} и \mathbf{G} определяют векторное поле рассматриваемых систем, \mathbf{g}_d и \mathbf{g}_r являются векторами параметров, слагаемое \mathbf{P} отвечает за однонаправленную связь между системами, а параметр ε определяет силу связи между системами.

Если размерности фазовых пространств ведущей и ведомой систем соответственно равны N_d и N_r , то поведение однонаправленно связанных осцилляторов (1) может быть охарактеризовано с помощью спектра ляпуновских показателей $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{N_d+N_r}$. В силу независимости поведения ведущей системы от состояния ведомого осциллятора спектр ляпуновских показателей может быть разделен на две части: ляпуновские показатели ведущей системы $\lambda_1^d \geq \dots \geq \lambda_{N_d}^d$ и условные ляпуновские показатели $\lambda_1^r \geq \dots \geq \lambda_{N_r}^r$, характеризующие поведение ведомой системы. При изменении параметра связи ε ляпуновские показатели ведущей системы остаются неизменными, поскольку динамика ведущей системы никоим образом не зависит от интенсивности связи, тогда как значения условных ляпуновских показателей, отвечающих поведению ведомой системы, изменяются. Очевидно, что данный подход может быть применен и для описания неавтономного поведения осциллятора, находящегося под внешним воздействием: в этом случае целесообразно рассматривать только спектр условных ляпуновских показателей $\lambda_1^r \geq \dots \geq \lambda_{N_r}^r$, отвечающих за поведение рассматриваемой системы, а величину связи ε следует интерпретировать как управляющий параметр, определяющий амплитуду внешнего воздействия. Тем не менее в дальнейшем будем предполагать, что рассматриваются две однонаправленно связанные системы, учитывая, что в случае необходимости можно легко осуществить переход к рассмотрению неавтономного

поведения системы, находящейся под внешним воздействием.

Важно отметить, что рассматриваемые взаимодействующие системы могут обладать как хаотической, так и периодической динамикой. Если рассматриваются хаотические динамические системы, то старшие ляпуновские экспоненты каждой из них (как минимум, λ_1^d и λ_1^r) являются положительными. В любом случае, однако, при отсутствии связи между системами ($\varepsilon = 0$) в каждом из спектров ляпуновских экспонент обязательно существует нулевая ляпуновская экспонента ($\lambda_i^d = 0$ и $\lambda_j^r = 0$ соответственно), отвечающая за эволюцию малого возмущения, описывающего сдвиг изображающей точки вдоль фазовой траектории в фазовом пространстве рассматриваемой системы. В случае периодических систем эти нулевые ляпуновские экспоненты являются старшими (т.е. $i = 1, j = 1$).

С увеличением параметра связи ε между системами нулевая ляпуновская экспонента ведущей системы остается по-прежнему нулевой, а условная нулевая ляпуновская экспонента, характеризующая поведение ведомой системы, может изменяться. Именно эта условная нулевая ляпуновская экспонента, которую обозначим как Λ_0 , и есть основной предмет изучения, рассматриваемый в настоящей работе. Известно, что для систем с периодическим поведением в отсутствие шумов Λ_0 становится отрицательной как раз в тот момент, когда рассматриваемая ведомая система синхронизируется действующим на нее периодическим сигналом со стороны ведущей системы, поэтому это явление часто используется в качестве критерия установления синхронного режима и нахождения значения параметра связи, соответствующего границе синхронизации.

Несколько иная ситуация складывается, если на ведомую систему оказывает также влияние шум (не важно, имеющий случайную или детерминированную природу). В этом случае, как было показано в [10], условная нулевая ляпуновская экспонента Λ_0 становится отрицательной еще до момента установления синхронного режима и ее величина зависит от параметра связи следующим образом:

$$\Lambda_0(\varepsilon) \sim \begin{cases} -\frac{1}{|\varepsilon - \varepsilon_c|}, & \varepsilon < \varepsilon_c, \\ \ln |1 - a\sqrt{\varepsilon - \varepsilon_c}|, & \varepsilon > \varepsilon_c, \end{cases}\quad (2)$$

где ε является параметром связи между взаимодействующими осцилляторами, параметр ε_c соответствует бифуркационному значению параметра связи, при котором в отсутствие шума устанавливается синхронный режим, а параметр a определяется свойствами исследуемых систем.

Изменение знака ляпуновской экспоненты свидетельствует в общем случае о качественных изменениях, произошедших в динамике системы. В ряде случаев переход одной из ляпуновских экспонент в область отрицательных значений связывают с возникновением син-

хронного поведения, как например, в случае синхронизации периодических колебаний или при установлении режима обобщенной хаотической синхронизации [11,12]. В то же самое время для связанных хаотических осцилляторов при установлении режима фазовой синхронизации условная ляпуновская экспонента Λ_0 является уже существенно отрицательной [6]. Поэтому, принимая во внимание отрицательность рассматриваемой ляпуновской экспоненты Λ_0 , следует полагать, что в этом случае ниже границы фазовой синхронизации должны проявляться некоторые черты синхронного поведения, хотя сам режим фазовой синхронизации еще не установился.

Известно, что ниже границы установления режима фазовой хаотической синхронизации наблюдается перемежающееся поведение [13–15]: зависимость разности фаз взаимодействующих осцилляторов от времени $\Delta\varphi(t)$ содержит участки синхронного поведения (ламинарные фазы движения), во время которых разность фаз практически не изменяется, прерываемые внезапными участками проскока фазы, во время которых абсолютная величина разности фаз $|\Delta\varphi(t)|$ изменяется на 2π . Эти участки временной реализации называются турбулентными фазами. Соответственно можно ожидать, что отрицательность параметра Λ_0 связана именно с наличием участков синхронного поведения (ламинарными фазами).

Для того чтобы проверить это предположение, введем в рассмотрение модельную систему с дискретным временем — отображение окружности на себя. Будем рассматривать динамику отображения на интервале $x \in [-\pi, \pi)$, аддитивно добавляя к детерминированной системе шум ξ_n :

$$x_{n+1} = x_n + 2\Omega(1 - \cos x_n) - \varepsilon + \xi_n, \quad \text{mod } 2\pi. \quad (3)$$

В соотношении (3) ε — управляющий параметр, аналогичный параметру связи в (1), $\Omega = 0.1$ — параметр, соответствующий частотной расстройке взаимодействующих осцилляторов, ξ_n — дельта-коррелированный белый гауссов шум с интенсивностью D , такой что $\langle \xi_n \rangle = 0$, $\langle \xi_n \xi_m \rangle = D\delta(n - m)$.

Известно, что отображение окружности является эталонной системой для описания явления синхронизации, поэтому именно это отображение целесообразно использовать в данном случае. Режимам синхронизации в связанных осцилляторах (1) соответствуют циклы различных периодов, основному режиму синхронизации 1:1 соответствует устойчивая неподвижная точка. Можно считать, что отображение (3) получено из системы связанных периодических осцилляторов (1) с помощью процедуры сечения Пуанкаре, причем переменная x_n в отображении (3) соответствует фазам колебаний ведомой системы, взятым в моменты времени, следующие друг за другом через период колебаний ведущей системы. Поскольку модельная система (3) является одномерной, то ее поведение будет характеризоваться всего одной ляпуновской экспонентой, которая играет роль условной нулевой ляпуновской экспоненты Λ_0 в системе связанных осцилляторов (1).

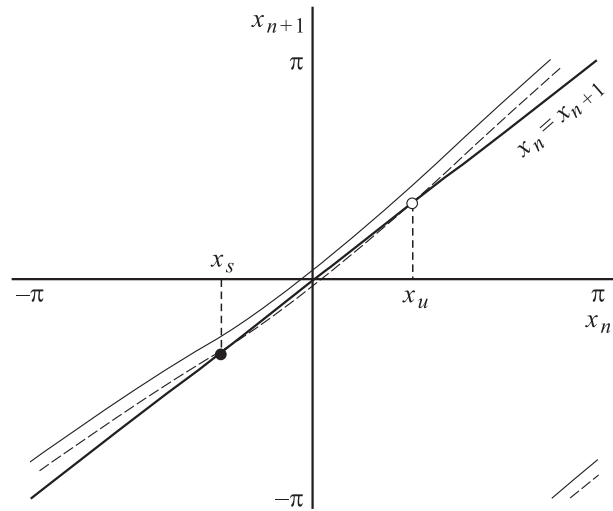


Рис. 1. Отображение окружности (3) для значений параметра $\varepsilon > \varepsilon_c$ (пунктир) и $\varepsilon < \varepsilon_c$ (сплошная линия 2).

Если интенсивность шума D равна нулю, то при $\varepsilon = \varepsilon_c = 0$ в системе (3) происходит седло-узловая (касательная) бифуркация, при которой в $x = 0$ сливаются и исчезают устойчивая x_s и неустойчивая x_u неподвижные точки. Выше критического значения ε_c (при $\varepsilon > \varepsilon_c$) поведению системы (3) отвечает неподвижная устойчивая точка x_s (рис. 1), соответствующая синхронному режиму в связанных осцилляторах (1), в то время как для значений ε , лежащих ниже критической точки, поведение системы определяется существованием узкого коридора между графиком отображения и биссектрисой $x_{n+1} = x_n$, так что изображающая точка, соответствующая поведению системы, медленно движется вдоль этого коридора и в конце концов покидает его. В силу того что поведение отображения рассматривается по модулю 2π на интервале $x \in [-\pi, \pi)$ и отрезок, соответствующий состоянию системы, замкнут в окружность, изображающая точка после относительно небольшого количества итераций снова входит в коридор, после чего процесс повторяется сначала. Данный тип поведения хорошо известен как перемежаемость типа I [16,17].

Движение изображающей точки вдоль коридора в терминах теории перемежаемости рассматривается как ламинарная фаза, а движение вне коридора — как турбулентная. Важно отметить, что в случае перемежающегося поведения ($\varepsilon < \varepsilon_c$) при отсутствии шума ляпуновская экспонента Λ_0 равна нулю, а при значениях управляющего параметра ε , превышающих критическое ε_c , величина ляпуновской экспоненты будет $\Lambda_0 = \ln |1 - 2\sqrt{\Omega\varepsilon}|$. Нетрудно видеть, что в этом случае ляпуновская экспонента является отрицательной, что соответствует установлению синхронного режима в потоковой системе связанных осцилляторов (1).

Как было показано в [10], при добавлении шума с интенсивностью D величина ляпуновской экспоненты Δ_0 становится отрицательной и для отображения окружно-

сти (4) определяется соотношением

$$\Lambda_0(\varepsilon) \simeq \begin{cases} -\frac{D\Omega}{4|\varepsilon|}, & \varepsilon < 0, \\ \ln|1 - 2\sqrt{\Omega\varepsilon}|, & \varepsilon > 0, \end{cases} \quad (4)$$

которое, правда, является неприменимым для экстремально малых значений параметра ε , т.е. для $\varepsilon \rightarrow \pm 0$.

Как показано в [10], соотношение (4) становится справедливым при выполнении условий

$$D^{2/3} \ll |\varepsilon| \ll 1, \quad \varepsilon < 0 \quad (5)$$

и

$$\varepsilon \gg D^{2/3}, \quad \varepsilon > 0. \quad (6)$$

На рис. 2 приведена зависимость ляпуновской экспоненты Λ_0 от управляющего параметра ε , полученная численно ($D = 4 \cdot 10^{-6}$) для отображения окружности (3), а также аналитические аппроксимации (4). Для сравнения на этом рисунке показана также аналогичная зависимость в случае без шума (\diamond). Из рисунка видно очень хорошее соответствие результатов численного моделирования и аналитической аппроксимации (4) во всем диапазоне значений параметра ε , за исключением очень малой области $\varepsilon \rightarrow \pm 0$, где аналитические соотношения расходятся с результатами численного моделирования. Видно, что в случае воздействия шума на систему ляпуновская экспонента Λ_0 становится отрицательной существенно ниже точки седло-узловой бифуркации.

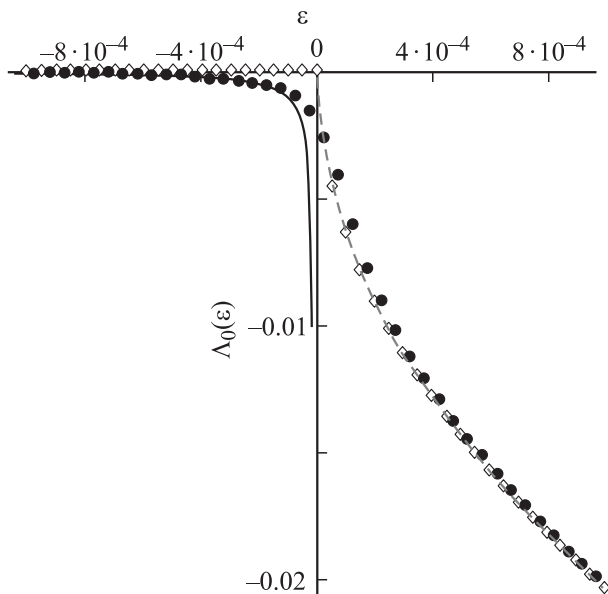


Рис. 2. Зависимость ляпуновской экспоненты Λ_0 от управляющего параметра ε в окрестности точки седло-узловой бифуркации отображения окружности (3). Численно полученные значения представлены точками \diamond для случая без шума ($D = 0$) и \bullet — для шума с интенсивностью $D = 4 \cdot 10^{-6}$. Аналитические зависимости (4) показаны сплошной линией для параметра надкритичности $\varepsilon < \varepsilon_c$ и пунктиром — для $\varepsilon > \varepsilon_c$.

Как уже отмечалось выше, отрицательность ляпуновской экспоненты Λ_0 может быть связана с наличием ламинарных фаз (участков синхронного поведения для системы связанных осцилляторов (1)). Для проверки этого предположения в следующем разделе будут введены в рассмотрение локальные ляпуновские показатели, отдельно для ламинарных и турбулентных фаз.

2. Локальные условные нулевые ляпуновские экспоненты: отображение окружности

Для изучения особенностей динамики системы введем в рассмотрение локальные ляпуновские экспоненты [18,19], определенные отдельно для ламинарных и турбулентных фаз. Как правило, локальные ляпуновские экспоненты определяются на фиксированном интервале времени $\tau = \text{const}$. В этом случае одной из важнейших характеристик поведения системы является распределение локальных ляпуновских экспонент $N(\lambda_l)$, которое связано с ляпуновской экспонентой λ как

$$\lambda = \frac{1}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_l N(\lambda_l) d\lambda_l, \quad (7)$$

где

$$N_0 = \int_{-\infty}^{\infty} N(\lambda_l) d\lambda_l.$$

Поскольку в проводимом рассмотрении локальные ляпуновские экспоненты используются для того, чтобы характеризовать динамику системы отдельно для ламинарных и для турбулентных фаз, каждая локальная ляпуновская экспонента определяется на отдельном временном интервале τ , соответствующем своей фазе, ламинарной или турбулентной. Так как длительность τ каждой фазы различна, то в этом случае необходимо рассматривать распределение $N(\lambda_l, \tau)$ вместо распределения $N(\lambda_l)$. Соответственно соотношение (7) должно быть заменено на

$$\lambda = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_l \int_0^{\infty} \lambda_l \tau N(\lambda_l, \tau) d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_l \int_0^{\infty} \tau N(\lambda_l, \tau) d\tau}. \quad (8)$$

Поскольку исследование локальных ляпуновских экспонент проводится раздельно для ламинарных и турбулентных фаз, необходимо рассматривать два распределения $N_s(\lambda_l, \tau)$ и $N_a(\lambda_l, \tau)$, соответствующих синхронным и асинхронным участкам поведения системы. Очевидно, что в этом случае величина рассматриваемой ляпуновской экспоненты Λ_0 связана с этими распределениями следующим образом:

$$\Lambda_0 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_l \int_0^{\infty} \lambda_l \tau (N_s(\lambda_l, \tau) + N_a(\lambda_l, \tau)) d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_l \int_0^{\infty} \tau (N_s(\lambda_l, \tau) + N_a(\lambda_l, \tau)) d\tau}. \quad (9)$$

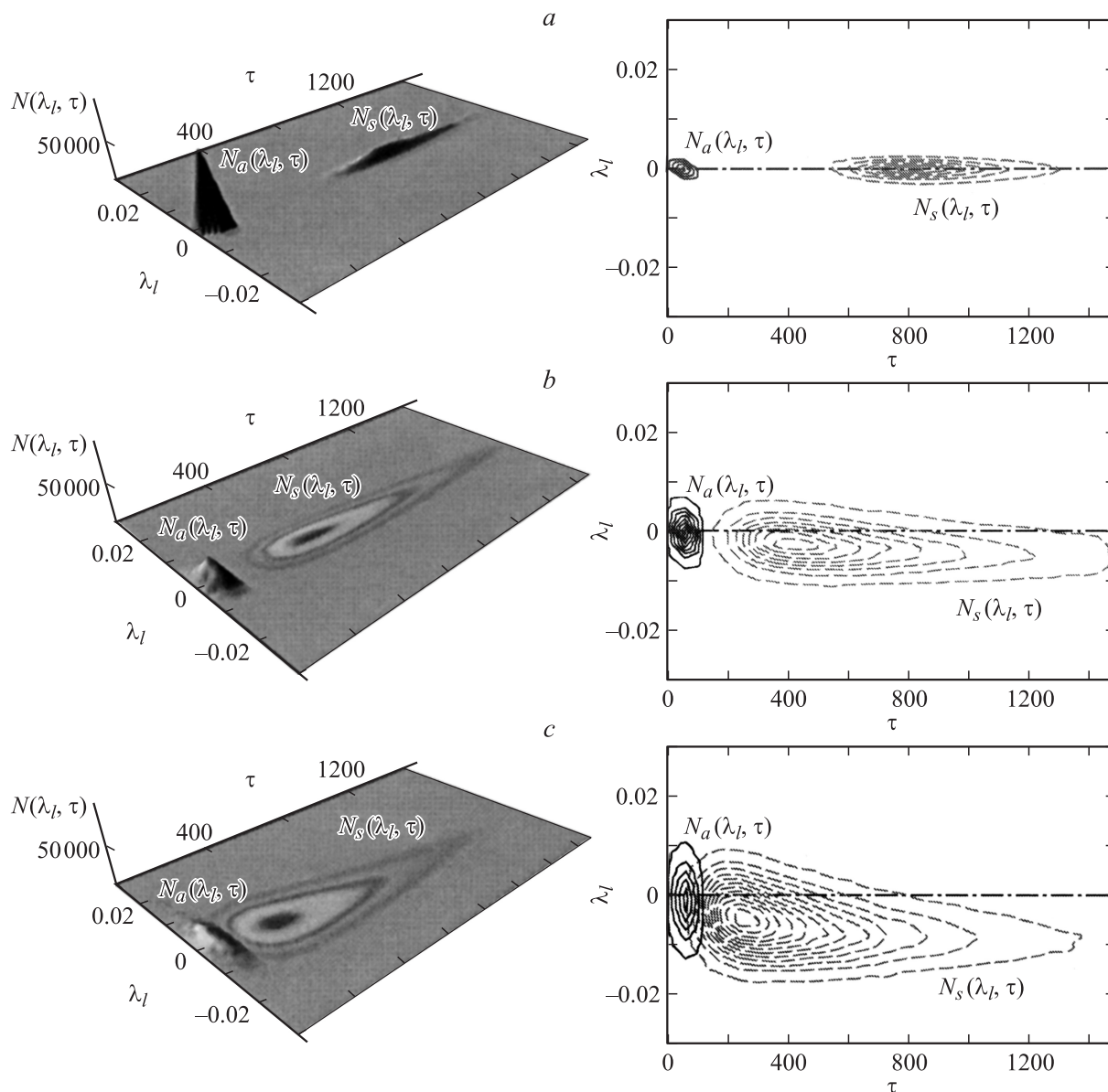


Рис. 3. Распределения локальных ляпуновских экспонент λ_l для ламинарных и турбулентных фаз отображения окружности (3), а также соответствующие им линии уровня для трех различных значений интенсивности шума D : $a - D = 10^{-6}$, линии уровня показаны для турбулентных фаз с шагом $h_{N_s} = 2 \cdot 10^4$ (внешняя (минимальная) линия уровня соответствует $N_a = 2 \cdot 10^4$), для ламинарных — с шагом $h_{N_a} = 2 \cdot 10^3$ (внешняя (минимальная) линия уровня соответствует $N_a = 10^3$); $b - D = 2.5 \cdot 10^{-5}$, линии уровня показаны для турбулентных фаз с шагом $h_{N_s} = 5 \cdot 10^3$ (внешняя (минимальная) линия уровня соответствует величине $N_a = 10^3$), для ламинарных — с шагом $h_{N_a} = 4 \cdot 10^2$ (внешняя (минимальная) линия уровня соответствует $N_a = 10^2$); $c - D = 10^{-4}$, линии уровня показаны для турбулентных фаз с шагом $h_{N_s} = 4 \cdot 10^3$ (внешняя (минимальная) линия уровня соответствует $N_a = 10^3$), для ламинарных — с шагом $h_{N_a} = 2 \cdot 10^2$ (внешняя (минимальная) линия уровня соответствует $N_a = 10^2$).

Для расчета локальных ляпуновских экспонент использовалось соотношение

$$\lambda_l = \frac{1}{T_k} \sum_{n=t_k}^{t_k+T_k} \ln |1 + 2\Omega \sin x_n|, \quad (10)$$

где t_k — момент дискретного времени, соответствующего началу k -й ламинарной (или турбулентной) фазы, T_k — длительность соответствующей фазы.

На рис. 3 показаны распределения локальных ляпуновских экспонент λ_l для ламинарных и турбулентных фаз отображения окружности (3), а также соответствующие им линии уровня для трех различных значений интенсивности шума D . Линии уровня для распределения $N_a(\lambda_l)$ локальных ляпуновских экспонент, отвечающих турбулентным фазам, показаны сплошными линиями, а аналогичные линии уровня для распределений

$N_s(\lambda_l)$ локальных ляпуновских экспонент ламинарных фаз — пунктиром. Все распределения построены по $n = 10^5$ фаз. Значение управляющего параметра надкритичности во всех случаях было выбрано одинаковым и равным $\varepsilon = -10^{-4}$.

Как уже отмечалось, в отсутствие шума при выбранных значениях управляющих параметров в отображении окружности (3) будет наблюдаться перемежающееся поведение типа I, а ляпуновская экспонента Λ_0 будет равна нулю. В связанных потоковых осцилляторах (1), демонстрирующих периодическую динамику, этот режим соответствует поведению, наблюдающемуся по параметру связи чуть ниже границы установления синхронного режима. Очевидно, что в этом случае (при $D = 0$) распределения локальных ляпуновских экспонент как для ламинарных, так и турбулентных фаз представляют собой δ -функции: $N_s(\lambda_l, \tau) = \delta(\lambda_l, \tau - T_s)$ для распределения ляпуновских экспонент, соответствующих ламинарным фазам, и $N_a(\lambda_l, \tau) = \delta(\lambda_l, \tau - T_a)$ — турбулентным, где T_s и T_a — длительность соответствующих фаз.

Рис. 3, а соответствует самой малой (из всех рассмотренных) интенсивности шума, $D = 10^{-6}$. В этом случае динамика системы не очень сильно отличается от случая без шума, ляпуновская экспонента $\Lambda_0 = -2 \cdot 10^{-4}$ по-прежнему очень близка к нулю. В то же время видно, что воздействие шума приводит к тому, что распределения $N_s(\lambda_l, \tau)$ и $N_a(\lambda_l, \tau)$ несколько „размазываются“, причем у распределения $N_s(\lambda_l, \tau)$, полученного для ламинарных фаз, это более заметно; „размазывание“ в большей степени происходит вдоль направления τ , соответствующего длительностям фаз. Важно отметить, что оба распределения остаются практически симметричными относительно оси τ , что и обуславливает (в соответствии с соотношением (9)) близость к нулю величины Λ_0 .

С увеличением интенсивности шума (см. рис. 3, б, $D = 2.5 \cdot 10^{-5}$) распределения локальных ляпуновских экспонент продолжают „размазываться“, причем для распределения $N_s(\lambda_l, \tau)$ соответствующего ламинарным фазам, это явление более ярко выражено. Из рисунка отчетливо видно, что высота полученных распределений уменьшается, в то время как сами распределения становятся заметно шире. Кроме того, если распределение ляпуновских экспонент $N_a(\lambda_l, \tau)$, полученное для турбулентных фаз, по-прежнему остается симметричным относительно оси τ , что означает, что ляпуновская экспонента, подсчитанная по турбулентным фазам

$$\Lambda_{0a} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_l \int_0^{\infty} \lambda_l \tau N_a(\lambda_l, \tau) d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_l \int_0^{\infty} \tau N_a(\lambda_l, \tau) d\tau}, \quad (11)$$

по-прежнему остается близкой к нулю ($\Lambda_{0a} = -10^{-4}$), то соответствующее распределение $N_s(\lambda_l, \tau)$ для ламинарных фаз становится асимметричным и сдвигается в

сторону отрицательных значений. Соответственно ляпуновская экспонента, подсчитанная по ламинарным фазам

$$\Lambda_{0s} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_l \int_0^{\infty} \lambda_l \tau N_s(\lambda_l, \tau) d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_l \int_0^{\infty} \tau N_s(\lambda_l, \tau) d\tau}, \quad (12)$$

будет отрицательной ($\Lambda_{0s} = -3 \cdot 10^{-3}$), точно так же как и ляпуновская экспонента $\Lambda_0 = -2.8 \cdot 10^{-3}$.

Рис. 3, с соответствует еще большей интенсивности шума, $D = 10^{-4}$. Видно, что тенденция, отмеченная на рис. 3, б продолжает развиваться: распределения $N_a(\lambda_l, \tau)$ и $N_s(\lambda_l, \tau)$ становятся все шире и ниже, распределение для турбулентных фаз по-прежнему симметрично, в то время как распределение $N_s(\lambda_l, \tau)$, полученное для ламинарных фаз, становится еще более асимметричным и еще больше сдвигается в область отрицательных значений. Соответственно и ляпуновская экспонента $\Lambda_0 = -5.2 \cdot 10^{-3}$ становится еще более отрицательной. Таким образом, отрицательность рассматриваемой ляпуновской экспоненты Λ_0 в отображении окружности с шумом связана, в первую очередь, с динамикой системы во время ламинарных фаз. Именно эти участки обуславливают отрицательность ляпуновской экспоненты.

Интересным следствием полученных результатов является тот факт, что два идентичных периодических осциллятора, находящихся под внешним периодическим воздействием, но не синхронизованных им, должны демонстрировать идентичное поведение при добавлении шума, в то время как в отсутствие шума их динамика должна отличаться. Это обуславливается тем, что в этом случае условная нулевая ляпуновская экспонента Λ_0 является старшей условной ляпуновской экспонентой и ее отрицательность при добавлении шума свидетельствует об установлении режима индуцированной шумом синхронизации [8]. Для описываемых периодических осцилляторов, чтобы подчеркнуть факт неавтономного поведения, по всей видимости, целесообразно говорить о неавтономной индуцированной шумом синхронизации.

3. Локальные условные нулевые ляпуновские экспоненты: система Ресслера

Рассмотрим теперь поведение условных локальных ляпуновских экспонент для системы однонаправленно связанных хаотических осцилляторов (1), в качестве которых выберем две связанные системы Ресслера, находящиеся вблизи границы режима фазовой синхронизации. В этом случае в рассмотрении присутствуют и явление синхронизации, и детерминированное хаотическое поведение. Уравнения взаимодействующих осцилляторов

имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_d &= -\omega_d y_d - z_d, \\ \dot{y}_d &= \omega_d x_d + a y_d, \\ \dot{z}_d &= p + z_d(x_d - c), \\ \dot{x}_r &= -\omega_r y_r - z_r + \sigma(x_d - x_r), \\ \dot{y}_r &= \omega_r x_r + a y_r, \\ \dot{z}_r &= p + z_r(x_r - c), \end{aligned} \quad (13)$$

где (x_d, y_d, z_d) и (x_r, y_r, z_r) — векторы, характеризующие состояние ведущего и ведомого осцилляторов соответственно; точка обозначает производную по времени, параметр σ характеризует величину связи между осцилляторами. Значения остальных управляющих параметров ($a = 0.15$, $p = 0.2$, $c = 10.0$) были выбраны по аналогии с предыдущими работами [12,20].

Параметр ω_r , определяющий основную собственную частоту колебаний в ведомой системе, был выбран равным $\omega_r = 0.95$, аналогичный параметр ведущей системы был $\omega_d = 0.93$. Для такого выбора значений управляющих параметров система связанных осцилляторов (13) демонстрирует хаотическое поведение, при котором хаотические аттракторы обоих осцилляторов являются фазово-когерентными, что позволяет ввести фазы хаотических сигналов $\varphi(t)_{d,r}$ традиционным способом, как угол поворота

$$\varphi_{d,r} = \arctg\left(\frac{y_{d,r}}{x_{d,r}}\right) \quad (14)$$

на плоскостях проекций (x, y) для каждого из осцилляторов. Наличие режима хаотической фазовой синхронизации можно установить с помощью отслеживания эволюции во времени разности фаз, для которой в режиме фазовой синхронизации должно выполняться условие захвата фазы [4]

$$|\Delta\varphi(t)| = |\varphi_d(t) - \varphi_r(t)| < \text{const}. \quad (15)$$

Важно обратить внимание на тот факт, что, хотя поведение рассматриваемых осцилляторов (13) полностью детерминировано, их хаотическая динамика может рассматриваться как случайные возмущения периодических колебаний [5,21]. Соответственно можно ожидать, что выявленные в разд. 2 особенности поведения локальных ляпуновских экспонент, реализующиеся в случае регулярной динамики в присутствии шума, будут также наблюдаться и для детерминированных систем с хаотической динамикой. Дополнительные особенности в этом случае будут возникать из-за того, что хаотическая динамика не может быть исключена из рассмотрения, в отличие от шумов, интенсивность D которых может быть увеличена, уменьшена или даже положена равной нулю.

Еще одной интересной особенностью является то, что старшая ляпуновская экспонента для каждого хаотического осциллятора системы (13) является положительной, в отличие от рассмотренного выше случая (раздела 2) для отображения окружности. Как уже отмечалось, поведение двух связанных систем Ресслера (13) характеризуется спектром ляпуновских экспонент $\lambda_1 \geq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_6$, причем в силу однонаправленного характера связи между осцилляторами поведение ведущей системы не зависит от величины параметра связи σ , и соответственно спектр ляпуновских экспонент может быть разделен на две части, соответствующие поведению ведущей ($\lambda_1^d > \lambda_2^d > \lambda_3^d$) и ведомой ($\lambda_1^r > \lambda_2^r > \lambda_3^r$) систем. Первая часть спектра ляпуновских экспонент ($\lambda_1^d > \lambda_2^d > \lambda_3^d$) не зависит от величины параметра связи, в то время как оставшиеся ляпуновские экспоненты ($\lambda_1^r > \lambda_2^r > \lambda_3^r$), называемые условными, изменяются с увеличением σ .

На рис. 4 показаны зависимости четырех ляпуновских экспонент от величины связи σ (две остальные ляпуновские экспоненты сильно отрицательны $\lambda_3^d \approx \lambda_3^r \approx -10$ и не существенны для проводимого рассмотрения). Две из четырех экспонент ($\lambda_1^d > 0$ и $\lambda_2^d = 0$) соответствуют поведению ведущей системы, поэтому их значения постоянны. Две другие ляпуновские экспоненты $\lambda_{1,2}^r$ являются условными. При отсутствии связи между системами ($\sigma = 0$) $\lambda_1^r > 0$ (характеризует хаотическую динамику ведомой системы) и $\lambda_2^r = 0$. Именно вторая условная ляпуновская экспонента λ_2^r оказывается нулевой и соответственно является основным объектом настоящего исследования, иными словами, $\Lambda_0 = \lambda_2^r$. С увеличением параметра Λ_0 становится отрицательной, и при $\sigma_{PS} \approx 0.039$ устанавливается режим фазовой синхронизации.

Как и в рассмотренном выше случае отображения окружности (разд. 2), отрицательность ляпуновской экспоненты Λ_0 свидетельствует о возникновении некоторого синхронизма в динамике взаимодействующих систем,

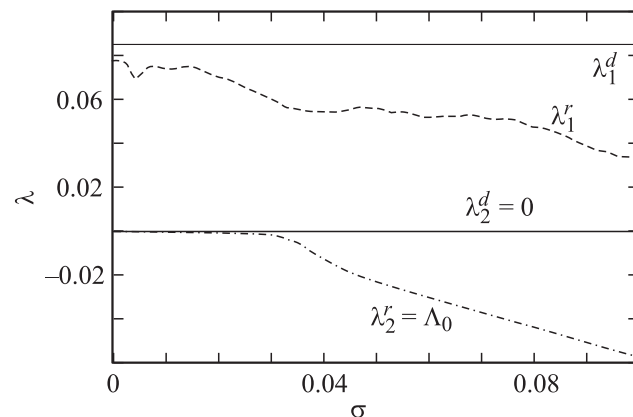


Рис. 4. Зависимость ляпуновских экспонент для системы однонаправленно связанных осцилляторов Ресслера (13) от величины параметра связи σ . Условные ляпуновские экспоненты показаны пунктиром (λ_1^r) и штрихпунктиром (λ_2^r).

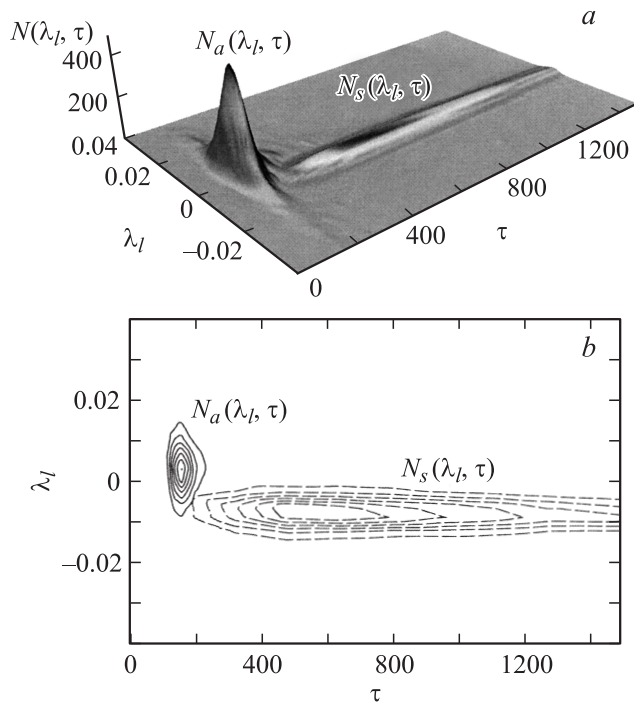


Рис. 5. *a* — распределения локальных ляпуновских экспонент, полученных для синхронных и асинхронных фаз хаотических колебаний связанных осцилляторов Ресслера (13), построенные по $n = 7125$ фазам. Значение параметра связи — $\sigma = 0.034$, условная ляпуновская экспонента — $\Lambda_0 = -0.037$. *b* — проекции распределений $N_s(\lambda_l, \tau)$ и $N_a(\lambda_l, \tau)$ на плоскость (τ, λ_l) , линии уровня показаны для турбулентных фаз с шагом $h_{N_s} = 70$ (внешняя (минимальная) линия уровня соответствует $N_a = 70$), для ламинарных — с шагом $h_{N_a} = 7$ (внешняя (минимальная) линия уровня соответствует $N_a = 7$).

хотя режим фазовой синхронизации еще не наблюдается. Точно так же как и в случае отображения окружности, для двух однонаправленно связанных осцилляторов Ресслера (13) рассмотрим распределения локальных нулевых экспонент $N_s(\lambda_l, \tau)$ и $N_a(\lambda_l, \tau)$, найденные для ламинарных и турбулентных фаз соответственно. Данные распределения показаны на рис. 5.

Из рисунка видно, что локальные ляпуновские экспоненты, соответствующие интервалам синхронного движения, локализованы в области отрицательных значений, в то время как локальные ляпуновские экспоненты, найденные для асинхронных участков (участков проскоков фазы) расположены в окрестности нуля, так же как это имеет место для отображения окружности (см. рис. 2).

Таким образом, можно сделать вывод о том, что отрицательность условной нулевой ляпуновской экспоненты является проявлением синхронизма, наблюдающегося на определенных временных интервалах. Именно участки синхронной динамики ответственны за отрицательность соответствующей ляпуновской экспоненты. В то же время следует учитывать, что отрицательность условной

нулевой ляпуновской экспоненты вовсе не означает установления режима фазовой хаотической синхронизации, поскольку существуют участки асинхронной динамики, прерывающие ламинарные фазы.

Заключение

В настоящей работе рассмотрено влияние шума на условную нулевую ляпуновскую экспоненту для неавтономных динамических систем, находящихся вблизи границы установления синхронного режима. В рассмотрение введены локальные условные ляпуновские экспоненты для ламинарных и турбулентных фаз соответственно. Показано, что за отрицательность условной нулевой ляпуновской экспоненты отвечают ламинарные фазы: распределение локальных условных показателей Ляпунова на плоскости „значение условной ляпуновской экспоненты–длительность фазы“ сдвигается в область отрицательных значений, в то время как распределение соответствующих экспонент для турбулентных фаз остается практически симметричным относительно нулевого значения. Отрицательность условной нулевой ляпуновской экспоненты является проявлением синхронизма, наблюдающегося на определенных временных интервалах вблизи границы установления режима фазовой синхронизации, где полностью синхронный режим еще не установился.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 07-02-00044), Программы поддержки ведущих научных школ РФ (НШ-355.2008.2), научно-образовательного центра „Нелинейная динамика и биофизика“ при Саратовском госуниверситете им. Н.Г. Чернышевского (грант REC-006 of U.S. Civilian Research and Development Foundation for the Independent States of the Former Soviet Union (CRDF)). Авторы также благодарят за финансовую поддержку Фонд некоммерческих программ „Династия“.

Список литературы

- [1] *Kye W.-H., Rim S., Kim C.-M., Lee J.-H., Ryu J.-W., Yeom B.-S., Park Y.-J.* // Phys. Rev. E. 2003. Vol. 68. N 3. P. 036 203.
- [2] *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K., Ovchinnikov A.A., Boccaletti S.* // Phys. Rev. E. 2007. Vol. 76. N 2. P. 026 206.
- [3] *Koronovskii A.A., Hramov A.E.* // Eur. Phys. J.B. 2008. Vol. 62. P. 447–452.
- [4] *Boccaletti S., Kurths J., Osipov G.V., Valladares D.L., Zhou C.T.* // Physics Reports. 2002. Vol. 366. P. 1.
- [5] *Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Osipov G.V., Kurths J.* // Physica D. 1997. Vol. 104. N 4. P. 219–238.
- [6] *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K.* // Phys. Rev. E. 2007. Vol. 75. N 3. P. 036 205.
- [7] *Zhou C.T., Kurths J.* // Chaos. 2003. Vol. 13. N 1. P. 401–409.
- [8] *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Moskalenko O.I.* // Phys. Lett. A. 2006. Vol. 354. N 5–6. P. 423–427.

- [9] *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Popov P.V.* // Phys. Rev. E. 2008. Vol. 77. N 2. P. 036 215.
- [10] *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K.* // Phys. Rev. E. 2008. Vol. 78. P. 036 212.
- [11] *Pyragas K.* // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 54. N 5. P. R4508–R4511.
- [12] *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 71. N 6. P. 067 201.
- [13] *Pikovsky A.S., Osipov G.V., Rosenblum M.G., Zaks M., Kurths J.* // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 79. N 1. P. 47–50.
- [14] *Boccaletti S., Allaria E., Meucci R., Arecchi F.T.* // Phys. Rev. Lett. 2002. Vol. 89. N 19. P. 194 101.
- [15] *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K., Boccaletti S.* // Phys. Rev. Lett. 2006. Vol. 97. P. 114 101.
- [16] *Pomeau Y., Manneville P.* // Commun. Math. Phys. 1980. Vol. 74. P. 189.
- [17] *Manneville P., Pomeau Y.* // Physica D. 1980. Vol. 1. N 2. P. 167–241.
- [18] *Prasad A., Ramaswamy R.* // Phys. Rev. E. 1999. Vol. 60. N 3. P. 2761–2766.
- [19] *Zillmer R., Pikovsky A.S.* // Phys. Rev. E. 2003. Vol. 67. N 6. P. 061 117.
- [20] *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Moskalenko O.I.* // Europhys. Lett. 2005. Vol. 72. N 6. P. 901–907.
- [21] *Kye W.-H., Kim C.-M.* // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 62. N 5. P. 6304–6307.