01;03

О структуре поля скоростей, связанного с волновым движением на однородно заряженной границе раздела двух вязких несмешивающихся жидкостей

© А.И. Григорьев, Д.М. Пожарицкий, С.О. Ширяева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 28 октября 2008 г.)

Найдено аналитическое решение задачи об исследовании временной эволюции капиллярно-гравитационной волны на однородно заряженной поверхности раздела вязких несжимаемых несмешивающихся жидкостей. Показано, что по мере удаления от поверхности раздела как полные течения жидкостей, так и их вихревые компоненты, связанные с волной, по обе стороны границы раздела быстро убывают. Амплитуда ротора поля скоростей при переходе через границу раздела сред изменяется скачком. Отношение амплитуд вихревых компонент поля скоростей в рассматриваемых средах зависит от плотности электрического заряда на границе раздела, отношения коэффициентов кинематической вязкости и плотностей верхней и нижней жидкостей.

PACS: 47.10.-g; 47.32.C-

Введение

Исследование физических закономерностей реализации и устойчивости волнового движения на границе раздела двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей неоднократно становилось объектом исследования в связи с приложениями к феноменам неустойчивости Кельвина–Гельмгольца [1–4], неустойчивости Майлза [5–8], неустойчивости Рэлея–Тейлора [9–11], неустойчивости однородно электрически заряженной границы раздела несмешивающихся электропроводной и диэлектрической жидкостей [12] или двух жидкостей с реальными электропроводностями [13], динамического поверхностного натяжения [14], нелинейного волнового движения границы раздела сред [11,15–17]. Тем не менее некоторые вопросы обсуждаемого феномена, играющие роль во многих из перечисленных приложений, пока не ясны. Сказанное касается изучения структуры течений, возникающих в окрестности границы раздела двух вязких несмешивающихся жидкостей различной плотности, когда по ней проходит плоская капиллярно-гравитационная волна конечной амплитуды. Этой проблеме и посвящена настоящая работа.

1. Формулировка задачи

Пусть вязкие, несжимаемые жидкости с плотностью ρ_1 и ρ_2, где $\rho_1 \geq \rho_2$, и вязкостью ν_1, ν_2 заполняют в поле сил тяжести полупространства $z \leq 0$ и $z > 0$ соответственно. Все рассмотрение проведем в декартовой системе координат, ось z которой направлена против направления ускорения поля силы тяжести $\mathbf{e}_z \parallel -\mathbf{g}$, а ось x — по направлению движения плоской капиллярно-гравитационной волны $\sim \exp(st + ikx)$ (здесь $\mathbf{e}_z$ — орт оси z; s — комплексная частота; k — волновое число; t — время; i — мнимая единица).

Верхнюю жидкость будем считать диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε_*, а нижнюю — идеальным проводником. Примем, что плоскость $z = 0$ совпадает с невозмущенной границей раздела сред, характеризуемой коэффициентом поверхностного натяжения γ, по которой однородно распределен электрический заряд так, что и в верхней жидкости в отсутствие деформации границы раздела существует однородное электростатическое поле $\mathbf{E_0} \parallel \mathbf{e}_z$. В начальный момент времени $t = 0$ равновесная в поле сил тяжести поверхность границы раздела жидкостей деформируется бегущей плоской капиллярно-гравитационной волной: $\xi(x, t) = \zeta_0 \exp(st + ikx)$, амплитуда которой ζ_0 много меньше капиллярной постоянной нижней жидкости $\zeta_0 \ll \alpha \equiv \sqrt{\gamma/g\rho_1}$. Поля скоростей течений жидкости в нижней и верхней средах, связанные с бегущей волной, обозначим $\mathbf{U}^{(1)}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{U}^{(2)}(\mathbf{r}, t)$ соответственно.

Положим, что в безразмерных переменных $\rho_1 = g = \gamma = 1$ поля скоростей $\mathbf{U}^{(1)}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{U}^{(2)}(\mathbf{r}, t)$ имеют тот же порядок малости, что и безразмерная амплитуда ζ_0, за которой оставляем прежнее обозначение (так же как и за остальными физическими величинами) и которая является малым параметром задачи. Зададимся целью исследовать структуру поля скоростей волнового течения жидкостей в окрестности границы раздела.

Математическая формулировка задачи, описывающая движения жидкостей в анализируемой системе, имеет вид

$$z > \xi: \qquad \frac{d\mathbf{U}^{(2)}}{dt} = -\nabla P(\mathbf{r}, t) + \nu_2 \Delta \mathbf{U}^{(2)} - \nabla z;$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{U}^{(2)}) = 0; \quad \Delta\Phi = 0;$$

$$z \le \xi: \qquad \frac{d\mathbf{U}^{(1)}}{dt} = -\nabla P(\mathbf{r},t) + \nu_1 \Delta \mathbf{U}^{(1)} - \nabla z;$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{U}^{(1)}) = 0;$$

$$z = \xi: \qquad \frac{\partial F}{\partial t} = 0; \quad F(x,z,t) = z - \xi(x,t);$$

$$U_z^{(1)} = U_z^{(2)}; \quad U_x^{(1)} = U_x^{(2)}; \quad \Phi = \mathrm{const};$$

$$\rho\nu_2\Big(\boldsymbol{\tau}\cdot(\mathbf{n}\cdot\nabla)\mathbf{U}^{(2)} + \mathbf{n}\cdot(\boldsymbol{\tau}\cdot\nabla)\mathbf{U}^{(2)}\Big)$$

$$= \nu_1\Big(\boldsymbol{\tau}\cdot(\mathbf{n}\cdot\nabla)\mathbf{U}^{(1)} + \mathbf{n}\cdot(\boldsymbol{\tau}\cdot\nabla)\mathbf{U}^{(1)}\Big);$$

$$-(P_1 - P_2) + 2\Big(\nu_1\mathbf{n}\cdot(\mathbf{n}\cdot\nabla)\mathbf{U}^{(1)} - \rho\nu_2\mathbf{n}\cdot(\mathbf{n}\cdot\nabla)\mathbf{U}^{(2)}\Big)$$

$$- P_e(\xi) + P_\gamma(\xi) = 0;$$

$$z \to \infty: \qquad \nabla\Phi \to -E_0\mathbf{e}_z; \quad \mathbf{U}^{(2)} = 0;$$

$$z \to -\infty: \qquad \mathbf{U}^{(1)} = 0;$$

$$t = 0: \qquad \xi(x,t) = \xi_0 \exp(ikx),$$

где $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{n}$ — орты касательной и нормали к границе раздела сред; $\rho \equiv \rho_2/\rho_1 \le 1$; $P_j(\mathbf{r},t)$ — давление в жидкости; $\Phi(\mathbf{r},t)$ — электростатический потенциал; P_1 и P_2 — гидродинамическое давление в первой и второй средах; $P_e(\mathbf{r},t)$ и $P_\gamma(\mathbf{r},t)$ — давление на границу раздела электрических сил и сил поверхностного натяжения.

Поскольку сформулированная эволюционная задача характеризуется производными по времени второго порядка (производные по времени входят в уравнение Навье–Стокса и в кинематическое граничное условие), то должны быть заданы два начальных условия, а не одно. Помимо формы деформации поверхности раздела сред в начальный момент времени нужно задать еще и профиль поля скоростей при $t = 0$. Однако в нижеследующих построениях в качестве второго начального условия использовано требование обращения в нуль начальной фазы волновой деформации. Это позволит получить в проводимом качественном исследовании менее громоздкие финальные выражения для искомых полей скоростей волнового течения жидкостей выше и ниже границы раздела сред.

После линеаризации и снесения граничных условий на невозмущенную поверхность раздела сред математическая формулировка задачи примет вид

$$z > 0: \qquad \frac{\partial \mathbf{U}^{(2)}}{\partial t} = -\nabla P(\mathbf{r},t) + \nu_2 \Delta \mathbf{U}^{(2)} - \nabla z;$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{U}^{(2)}) = 0; \quad \Delta\phi_* = 0; \tag{1}$$

$$z \le 0: \qquad \frac{\partial \mathbf{U}^{(1)}}{\partial t} = -\nabla P(\mathbf{r},t) + \nu_1 \Delta \mathbf{U}^{(1)} - \nabla z;$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{U}^{(1)}) = 0; \tag{2}$$

$$z = 0: \quad -\frac{\partial \xi}{\partial t} + U_z^{(1)} = 0; \quad U_z^{(1)} = U_z^{(2)}; \quad U_x^{(1)} = U_x^{(2)}; \tag{3}$$

$$\phi_* = -\frac{\partial \phi_0}{\partial z}\xi;$$

$$\rho\nu_2\left(\frac{\partial U_z^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial U_z^{(2)}}{\partial z}\right) = \nu_1\left(\frac{\partial U_z^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial U_x^{(1)}}{\partial z}\right); \tag{4}$$

$$-(P_1 - P_2) + 2\left(\nu_1\frac{\partial U_z^{(1)}}{\partial z} - \rho\nu_2\frac{\partial U_z^{(2)}}{\partial z}\right)$$

$$- p_e(\xi) + p_\gamma(\xi) = 0; \tag{5}$$

$$z \to \infty: \qquad \nabla\phi_* \to 0; \quad \mathbf{U}^{(2)} = 0; \tag{6}$$

$$z \to -\infty: \qquad \mathbf{U}^{(1)} = 0; \tag{7}$$

$$t = 0: \qquad \xi(x,t) = \xi_0 \exp(st + ikx);$$

$\phi_0 \equiv -E_0 z$ — потенциал электростатического поля над невозмущенной поверхностью раздела сред; $\phi_*(\mathbf{r},t)$ — потенциал электрического поля, вызванный деформацией поверхности раздела $\xi(x,t)$ (отметим, что $\Phi(\mathbf{r},t) \equiv \phi_0(\mathbf{r},t) + \phi_*(\mathbf{r},t)$); $p_e(\xi)$ и $p_\gamma(\xi)$ — поправки к значениям давления на границу раздела сред электрических сил и сил поверхностного натяжения, вызванные возмущением поверхности ξ.

2. Процедура отыскания решения задачи

Двумерность задачи (волновую деформацию формы поверхности раздела $\xi(x,t)$ и поля скоростей $\mathbf{U}^{(1)}(x,z,t)$, $\mathbf{U}^{(2)}(x,z,t)$ считаем не зависящими от координаты y) позволяет провести разделение полей скоростей на потенциальные и вихревые части на основе теоремы Гельмгольца [18]. Для этого введем скалярные потенциалы полей скоростей $\varphi^{(1)}(\mathbf{r},t)$ и скалярные функции $\psi^{(1)}(\mathbf{r},t)$ (имеющие тот же смысл, что и функции тока [18], но несколько иначе определенные) для нижней и $\varphi^{(2)}(\mathbf{r},t)$ и $\psi^{(2)}(\mathbf{r},t)$ — для верхней жидкостей:

$$\mathbf{U}^{(1)}(\mathbf{r},t) = \widehat{\mathbf{N}}_1\,\varphi^{(1)}(\mathbf{r},t) + \widehat{\mathbf{N}}_2\,\psi^{(1)}(\mathbf{r},t);$$

$$\mathbf{U}^{(2)}(\mathbf{r},t) = \widehat{\mathbf{N}}_1\,\varphi^{(2)}(\mathbf{r},t) + \widehat{\mathbf{N}}_2\,\psi^{(2)}(\mathbf{r},t);$$

$$\widehat{\mathbf{N}}_1 \equiv \nabla; \qquad \widehat{\mathbf{N}}_2 \equiv \nabla \times \mathbf{n}_y, \tag{8}$$

где $\mathbf{n}_y$ — орт декартовой координаты y; $\widehat{\mathbf{N}}_1$ и $\widehat{\mathbf{N}}_2$ — векторные дифференциальные операторы, удовлетворяющие соотношениям ортогональности и условиям коммутативности с оператором Лапласа [19]. Эрмитовый оператор $\widehat{\mathbf{N}}_1$ выделяет потенциальную часть движения, а антиэрмитовый $\widehat{\mathbf{N}}_2$ — вихревую.

Подставив разложение (8) в уравнения (1),(2) и приняв собственные значения операторов $\widehat{\mathbf{N}}_1^{+}\cdot\widehat{\mathbf{N}}_2$ и $\widehat{\mathbf{N}}_2^{+}\cdot\widehat{\mathbf{N}}_1$ (где $\widehat{\mathbf{N}}_j^{+}$ — оператор, эрмитовосопряженный к $\widehat{\mathbf{N}}_j$), отличными от нуля, получим систему скалярных уравнений

$$\frac{\partial\psi^{(j)}}{\partial t} - \nu_j \Delta\psi^{(j)} = 0; \quad \Delta\varphi^{(j)} = 0; \quad j = 1, 2;$$

$$P_1 = -\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial t} - z; \quad P_2 = -\rho\left(\frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial t} + z\right).$$

Подставив разложение (8) в условия (3)–(7), преобразуем граничные условия для векторных полей скоростей $\mathbf{U}^{(1)}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{U}^{(2)}(\mathbf{r}, t)$ в условия для скалярных функций $\varphi^{(j)}(\mathbf{r}, t)$ и $\psi^{(j)}(\mathbf{r}, t)$, $j = 1; 2$. Условия на $\pm\infty$ (6) и (7) преобразуются в соотношения

$$z \to \infty: \quad \frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial x} - \frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial z} \to 0; \quad \frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial z} + \frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial x} \to 0;$$

$$z \to -\infty: \quad \frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial z} \to 0; \quad \frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial x} \to 0.$$

Граничные условия на поверхности раздела жидкостей (3)–(5) примут вид

$$z = 0: \quad \frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial x} = \frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial z} + \frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial x};$$

$$\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial z} = \frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial x} - \frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial z}; \quad \frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial x};$$

$$\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial t} + \xi - \rho\frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial t} - \rho\xi + 2\nu_1\left(\frac{\partial^2\varphi^{(1)}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\psi^{(1)}}{\partial x\partial z}\right)$$

$$- 2\rho\nu_2\left(\frac{\partial^2\varphi^{(2)}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\psi^{(2)}}{\partial x\partial z}\right) - p_e(\xi) + p_\gamma(\xi) = 0;$$

$$\rho\nu_2\left(2\frac{\partial^2\varphi^{(2)}}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2\psi^{(2)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi^{(2)}}{\partial z^2}\right)$$

$$= \nu_1\left(2\frac{\partial^2\varphi^{(1)}}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2\psi^{(1)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi^{(1)}}{\partial z^2}\right);$$

$$\phi_* = -\frac{\partial\phi_0}{\partial z}\xi. \tag{9}$$

Таким образом, получена система уравнений, представляющих исходную задачу в скаляризованном виде.

Выражение для линейной по $|\xi|$ компоненты давления сил поверхностного натяжения $p_\gamma(\xi)$ имеет вид [18]:

$$p_\gamma(\xi) \approx -\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}.$$

Выражение для линейной по $|\xi|$ компоненты давления электрических сил $p_e(\xi)$ в линейном по ξ приближении имеет вид [1–4]:

$$p_e(\xi) \approx \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\phi_0}{\partial z}\frac{\partial\phi_1}{\partial z}\right).$$

3. Вывод дисперсионного уравнения задачи

Ограниченные периодические по x решения будем искать в декартовой системе координат в виде

$$\xi(x, t) = a\exp(st - ikx);$$

$$\varphi^{(1)}(x, z, t) = B_1\exp(kz)\exp(st - ikx);$$

$$\psi^{(1)}(x, z, t) = B_2\exp(q_1 z)\exp(st - ikx);$$

$$\varphi^{(2)}(x, z, t) = B_3\exp(-kz)\exp(st - ikx);$$

$$\psi^{(2)}(x, z, t) = B_4\exp(-q_2 z)\exp(st - ikx);$$

$$\phi_*(x, z, t) = aE_0\exp(-kz)\exp(st - ikx); \tag{10}$$

$$q_1 = k\sqrt{1 + \frac{s}{\nu_1 k^2}}; \quad q_2 = k\sqrt{1 + \frac{s}{\nu_2 k^2}};$$

B_1, B_2, B_3, B_4, a, s — в общем случае комплексные величины.

После подстановки проекта решений (10) в систему скаляризованных граничных условий на невозмущенной границе раздела сред (9) получим однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов B_1, B_2, B_3, B_4, a:

$$(s + 2\nu_1 k^2)B_1 - 2ikq_1\nu_1 \cdot B_2 - \rho(s + 2\nu_2 k^2)B_3$$

$$- 2i\rho kq_2\nu_2 \cdot B_4 + (k^2 - Wk + 1 - \rho)a = 0;$$

$$-2ik^2\nu_1 \cdot B_1 - (s + 2\nu_1 k^2)B_2 - 2i\rho k^2\nu_2 \cdot B_3$$

$$+ \rho(s + 2\nu_2 k^2)B_4 = 0;$$

$$B_1 - iB_2 + B_3 + iB_4 = 0;$$

$$kB_1 - iq_1 B_2 - kB_3 - iq_2 B_4 = 0;$$

$$-kB_1 + ikB_2 + sa = 0;$$

$$W = \varepsilon_* E_0^2/4\pi.$$

Параметр W характеризует устойчивость границы раздела по отношению к давлению электрического поля на границу раздела сред [1,9,11].

Выписанная система имеет нетривиальное решение тогда, и только тогда, когда определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных B_1, B_2, B_3, B_4, a, равен нулю. Это требование и дает дисперсионное уравнение для отыскания спектра капиллярно-гравитационных волн в анализируемой системе:

$$\begin{aligned}&\left[k(1-\rho)^2 - (1+\rho)(\rho q_1 + q_2)\right]s^2 \\ &+ 4k^2(\nu_1 - \rho\nu_2)\left[k(1-\rho) + \rho q_1 - q_2\right]s \\ &+ 4k^3(k - q_1)(k - q_2)(\nu_1 - \rho\nu_2)^2 \\ &+ k(k^2 - Wk + 1 - \rho)\left[k(1+\rho) - (\rho q_1 + q_2)\right] = 0.\end{aligned} \tag{11}$$

4. Асимптотики дисперсионного уравнения для малых вязкостей

Если положить $\nu_2 \equiv \rho \equiv 0$ (т. е. осуществить предельный переход к одной нижней жидкости), то дисперсионное уравнение упростится и примет известный [20,21] вид

$$s^2+4\nu_1 k^2 s+\omega^2(k)=4k^3 q_1 \nu_1^2; \quad \omega^2(k)\equiv k(k^2-Wk+1).$$

Далее, если положить $\nu_1 \equiv 0$, $\rho \to \infty$ (т. е. если осуществить предельный переход к одной верхней жидкости), то в этом случае получим

$$s^2+4\nu_2 k^2 s+\omega_*^2(k)=4k^3 q_2 \nu_2^2; \quad \omega_*^2(k)\equiv k(k^2-Wk-1).$$

Видно, что в последней ситуации сила тяжести играет дестабилизирующую роль, так же как и давление электрического поля. Подобная ситуация реализуется при электростатическом распылении жидкости с жидкого мениска на торце капилляра в поле силы тяжести [22,23] или в более общей ситуации при неустойчивости Тейлора заряженной границы раздела сред [11].

В асимптотике маловязких жидкостей $\nu_2 \ll 1$ и $\nu_1 \ll 1$ (когда $q_1 \gg k$, $q_2 \gg k$) дисперсионное соотношение имеет заметно более простой по сравнению с (11) вид

$$(1+\rho)s^2 - 4k^2\frac{(\rho\sqrt{\nu_2}-\sqrt{\nu_1})}{(\rho\sqrt{\nu_2}+\sqrt{\nu_1})}(\nu_1-\rho\nu_2)s + k(k^2-Wk+1-\rho)=0.$$

Если $\nu_2 \ll \nu_1 \ll 1$, то дисперсионное соотношение в линейном по ν_1 приближении имеет вид

$$(1+\rho)s^2 + 4k^2 s\left[\rho(1-\rho)\nu_2 + 2\rho\sqrt{\nu_1\nu_2}-\nu_1\right] + k(k^2-Wk+1-\rho)=0.$$

Если $\nu_1 \ll \nu_2 \ll 1$, то дисперсионное соотношение в линейном по ν_2 приближении примет вид

$$(1+\rho)s^2 + 4k^2\rho s\left[(1-\rho)\nu_1 + 2\rho\sqrt{\nu_1\nu_2}-\rho\nu_2\right] + k(k^2-Wk+1-\rho)=0.$$

Поскольку определитель системы равен нулю, значит, она линейно зависима, и следовательно, является неопределенной и имеет множество решений. Но так как в задаче имеются начальные условия, то возможно выбрать единственное решение.

5. Запись окончательных решений

Решения задачи, удовлетворяющие начальному условию, амплитуды которых выражены через ξ_0 — амплитуду начальной волновой деформации границы раздела, — имеют вид:

$$\xi(x,t)=\xi_0\exp(st-ikx)+c.c.;$$

$$\varphi^{(1)}(x,z,t)=\xi_0 B_1\exp(kz)\exp(st-ikx)+c.c.;$$

$$B_1=-\frac{s\left\{(2\nu_1k^2+s)+\rho\left[k(q_2-k)+q_1(q_2+k)\right]\nu_2\right\}}{k\left(k^2-q_1^2\right)(\nu_1+\rho\nu_2)};$$

$$\psi^{(1)}(x,z,t)=\xi_0 B_2\exp(q_1z)\exp(st-ikx)+c.c.;$$

$$B_2=\frac{2is(\nu_1k+\rho\nu_2q_2)}{\left(k^2-q_1^2\right)(\nu_1+\rho\nu_2)};$$

$$\varphi^{(2)}(x,z,t)=\xi_0 B_3\exp(-kz)\exp(st-ikx)+c.c.;$$

$$B_3=\frac{s\left\{\rho\left(2\nu_2k^2+s\right)+\left[k(q_2-k)+q_1(q_2+k)\right]\nu_1\right\}}{k\left(k^2-q_2^2\right)(\nu_1+\rho\nu_2)};$$

$$\psi^{(2)}(x,z,t)=\xi_0 B_4\exp(-q_2z)\exp(st-ikx)+c.c.;$$

$$B_4=\frac{2is(\nu_1q_1+\rho\nu_2k)}{\left(k^2-q_2^2\right)(\nu_1+\rho\nu_2)};$$

$$\phi_*(x,z,t)=\xi_0 E_0\exp(-kz)\exp(st-ikx)+c.c.$$

Аббревиатура $c.c.$ означает слагаемые, „комплексно сопряженные к выписанным“.

Выпишем теперь компоненты вектора $\mathbf{U}^{(1)}(x,z,t)$ — поля скоростей движения нижней жидкости

$$U_x^{(1)}(x,z,t)=-\xi_0 i\left[kB_1\exp(kz)-iq_1B_2\exp(q_1z)\right] \times\exp(st-ikx)+c.c.;$$

$$U_z^{(1)}(x,z,t)=\xi_0 k\left[B_1\exp(kz)-iB_2\exp(q_1z)\right] \times\exp(st-ikx)+c.c.$$

Выражение для ротора поля скоростей волнового течения нижней жидкости имеет вид

$$\mathrm{rot}\left(\mathbf{U}^{(1)}\right)_y=\xi_0\left(k^2-q_1^2\right)B_2\exp(q_1z)\exp(st-ikx)+c.c.$$

Компоненты вектора $\mathbf{U}^{(2)}(x,z,t)$ — поля скоростей волнового течения верхней жидкости, — имеют вид

$$U_x^{(2)}(x,z,t)=-\xi_0\left[ikB_3\exp(-kz)-q_2B_4\exp(-q_2z)\right] \times\exp(st-ikx)+c.c.;$$

$$U_z^{(2)}(x,z,t)=-\xi_0 k\left[B_3\exp(-kz)+iB_4\exp(-q_2z)\right] \times\exp(st-ikx)+c.c.$$

Также приведем выражение для ротора поля скоростей волнового течения верхней жидкости:

$$\mathrm{rot}\left(\mathbf{U}^{(2)}\right)_y=\xi_0B_4\left(k^2-q_2^2\right)\exp(-q_2z)\exp(st-ikx)+c.c.$$

6. Анализ полученных результатов

На рис. 1 и 2 приведены зависимости амплитудных значений проекций полей скоростей волнового течения жидкости на орты декартовой прямолинейной системы координат $U_x(z,t)$, $U_z(z,t)$ и величины ротора поля скоростей в верхней и нижней средах от безразмерного расстояния до невозмущенной поверхности раздела, рассчитанные для различных соотношений коэффици-

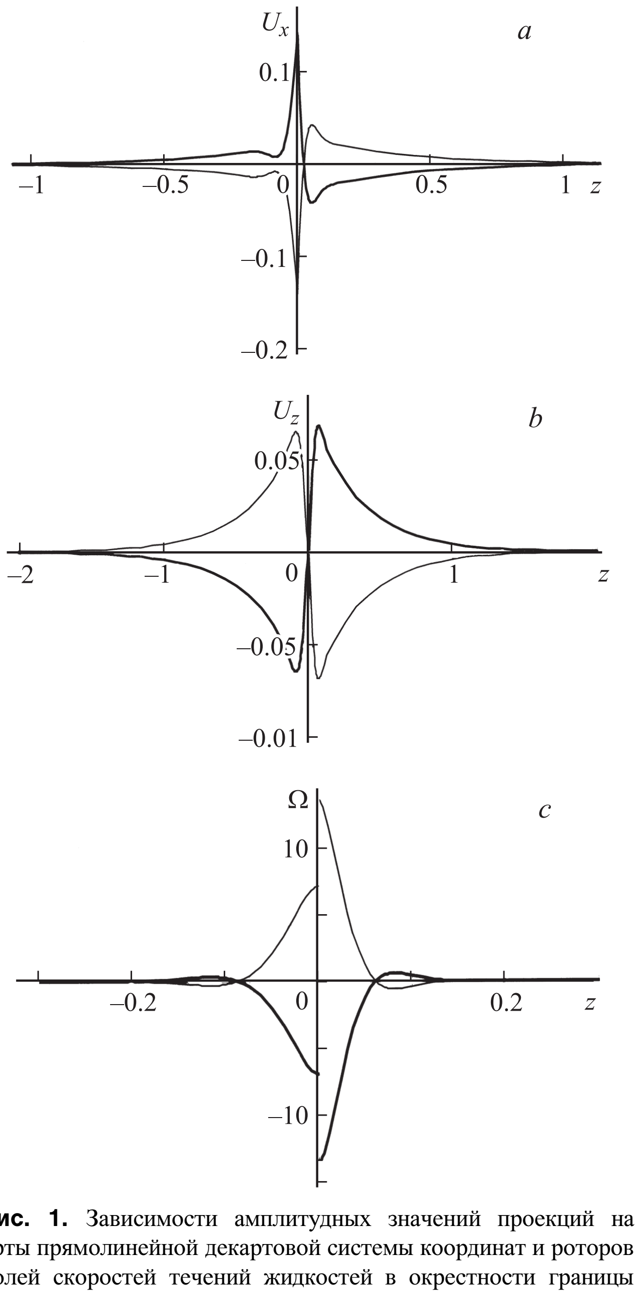

Рис. 1. Зависимости амплитудных значений проекций на орты прямолинейной декартовой системы координат и роторов полей скоростей течений жидкостей в окрестности границы раздела от безразмерной вертикальной координаты, рассчитанные при $W = 1.3$, $k = 3$, $\rho = 0.9$, $\nu_1 = 0.002$, $\nu_2 = 0.001$: a — горизонтальные компоненты полей скоростей; b — вертикальные компоненты полей скоростей; c — роторы полей скоростей. Тонкие кривые соответствуют безразмерному времени $t = 0.5$, жирные — моменту времени $t = 1$.

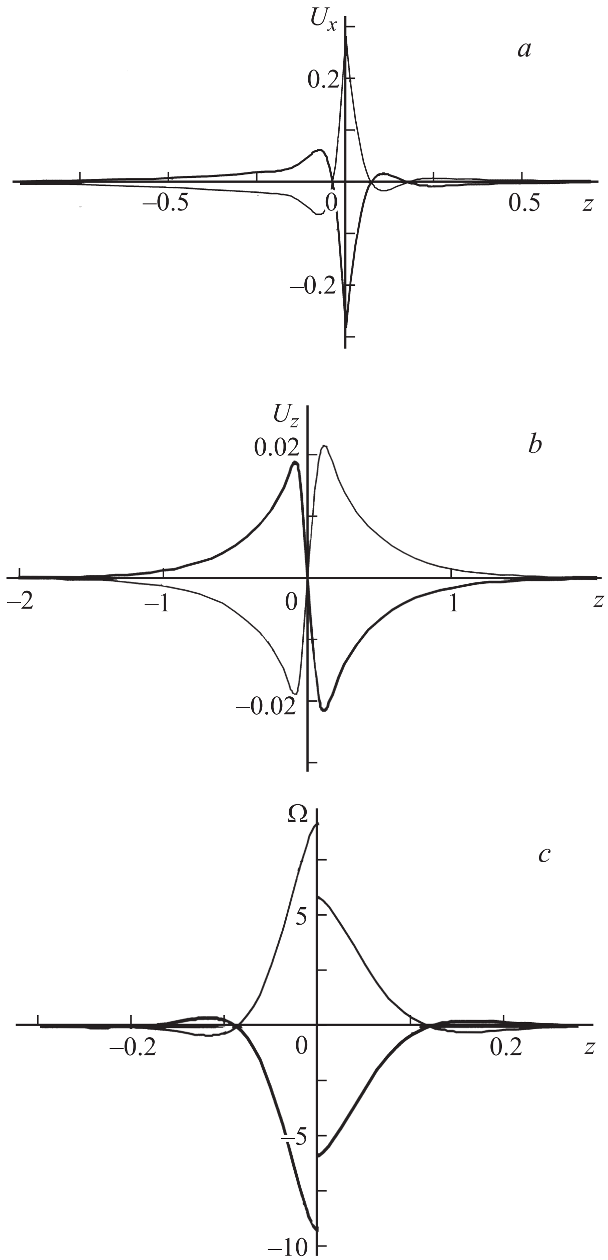

Рис. 2. Те же зависимости, что на рис. 1, рассчитанные при $\nu_1 = 0.002$, $\nu_2 = 0.004$ и прочих равных условиях.

ентов кинематической вязкости. Видно, что глубина проникновения волнового течения жидкости, связанного с капиллярно-гравитационной волной на поверхности раздела, в толщу жидкости примерно равна длине волны, бегущей по поверхности раздела сред, а глубина проникновения вихревой компоненты течения в глубь жидкости примерно на порядок меньше длины волны и увеличивается с ростом вязкости жидкости. На границе раздела сред величина ротора претерпевает разрыв первого рода, тогда как проекции поля скоростей течения жидкости на орты декартовой прямолинейной системы координат $U_x(z,t)$, $U_z(z,t)$ изменяются непрерывно, хотя первая производная по z от $U_x(z,t)$ также претерпевает разрыв

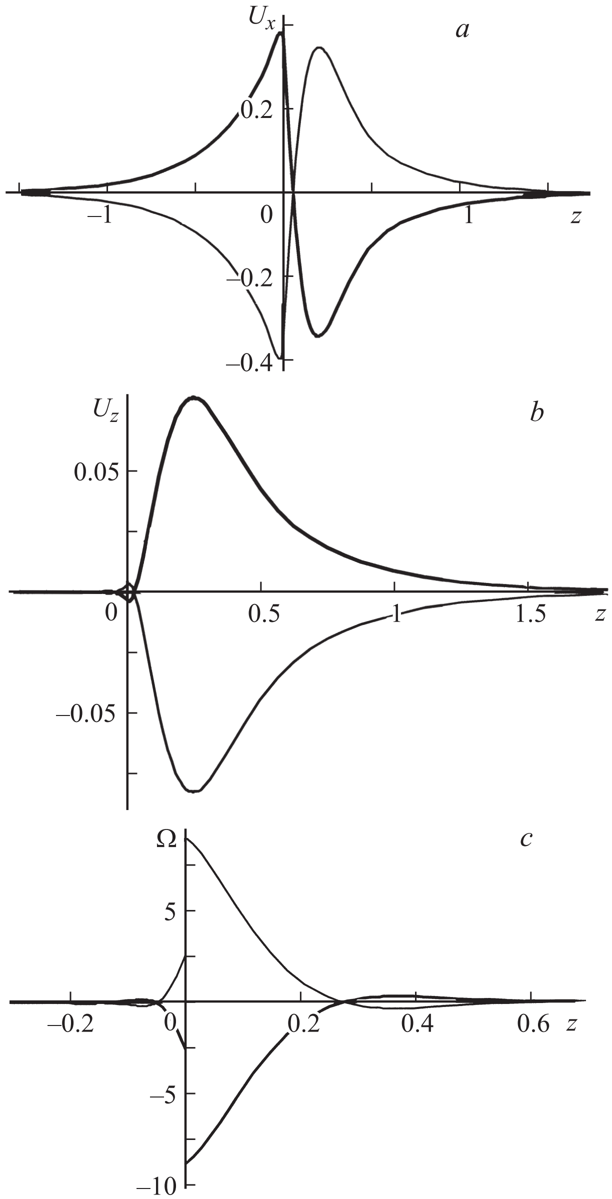

Рис. 3. Те же зависимости, что на рис. 1, рассчитанные в окрестности границы раздела воды и воздуха ($\nu_1 = 0.002$, $\nu_2 = 0.03$, $\rho = 0.001$).

первого рода. Расчеты показывают, что при уменьшении поверхностной плотности электрического заряда и прочих равных условиях увеличиваются амплитудные значения ротора вихревого течения жидкости в обеих средах.

На рис. 3 приведены зависимости от безразмерного расстояния до невозмущенной поверхности раздела амплитудных значений проекции $U_x(z,t)$, $U_z(z,t)$ и величины ротора поля скоростей, рассчитанные для верхней и нижней жидкостей в различные моменты времени для конкретной ситуации, когда нижняя жидкость является водой, а верхняя — воздухом. Видно, что существенное снижение отношения плотностей сред и увеличение отношения коэффициентов кинематической вязкости привели к тому, что глубина проникновения вихревого движения внутрь воды примерно на порядок меньше глубины проникновения вихревого движения в воздушную среду.

Рис. $1, a, b$ и $2, a, b$ рассчитаны при $k = 3$ и $W = 1.3$, т. е. при наличии поверхностного заряда, далекого от предельного для волны с $k = 3$ в смысле реализации неустойчивости границы раздела сред по отношению к давлению электрического поля [24]. Критические условия такой неустойчивости для границ раздела сред не зависят от вязкости, они определяются условиями [9,24]

$$\omega^2(k) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial k}\omega^2(k) = 0$$

и имеют вид [9,17]:

$$W_{\text{cr}} = k + \frac{1-\rho}{k}; \quad k_{\text{cr}} = \sqrt{1-\rho}.$$

Расчеты показывают, что при уменьшении поверхностного заряда отмеченные выше общие характеристики поля скоростей сохраняются, но амплитудные значения обеих проекций поля скоростей увеличиваются (при $W = 0$ примерно в полтора раза). Увеличение длины волны (уменьшение волнового числа) при прочих равных условиях приводит к снижению амплитудных значений компонент поля скоростей при сохранении остальных особенностей течения.

Отметим, что в принятом обезразмеривании характерным масштабом длины является капиллярная постоянная нижней жидкости: $\alpha \equiv \sqrt{\gamma/\rho_1 g}$ (например, для границы раздела воды с воздухом $\alpha \approx 0.26\,\text{cm}$). Это означает, что приведенные рисунки, иллюстрирующие характеристики поля скоростей течения жидкости, связанного с капиллярно-гравитационной волной с волновым числом $k = 3$, имеют безразмерную длину $\lambda \approx 2.1$ (с размерным эквивалентом для $\lambda \approx 0.55\,\text{cm}$).

Заключение

При распространении капиллярно-гравитационной волны по поверхности раздела вязких несмешивающихся жидкостей, поля скоростей, связанных с волной течений жидкостей в верхней и нижней средах, имеют сложную структуру. Глубина проникновения полных волновых течений в обе жидкости меньше длины волны, бегущей по границе раздела и зависит от значений вязкости жидкостей. Вихревое движение концентрируется в малых окрестностях поверхности раздела по обе ее стороны, в слоях толщиной порядка десятых (в зависимости от вязкости жидкости) долей длины волны. Как величины перпендикулярных к границе раздела компонент поля скоростей, так и величины роторов полей скоростей волнового течения жидкости, в малой окрестности поверхности раздела меняют свои знаки. Наличие на поверхности раздела жидкостей электрического заряда далекого от критического в смысле реализации ее неустойчивости по отношению к давлению электрического поля приводит к снижению интенсивностей вихревых компонент течения жидкости, что связано, по-видимому, со снижением частоты волн.

Работа выполнена в рамках тематического плана НИР вуза 2008 года и при поддержке гранта РФФИ № 06-01-00066-а.

Список литературы

[1] *Григорьев О.А., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 1996. Т. 66. Вып. 2. С. 23–34.
[2] *Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 1. С. 24–26.
[3] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 3. С. 9–16.
[4] *Григорьев А.И., Голованов А.С.* // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 11. С. 28–34.
[5] *Ле Блон П., Майсек Л.* Волны в океане. М.: Мир, 1981. 365 с.
[6] *Hogan J.M., Ayaswamy P.S.* // Phys. Fluids. 1985. Vol. 26. N 9. P. 2709–2715.
[7] *Hooper A.P.* // Phys. Fluids. 1985. Vol. 26. N 6. P. 1613–1618.
[8] *Miles J.W.* // J. Fluid Mech. 1993. Vol. 256. P. 427–441.
[9] *Ширяева С.О., Григорьев О.А., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1996. Т. 66. Вып. 9. С. 21–30.
[10] *Xuemei Chen, Eliot F.* // J. Fluid Mech. 2006. Vol. 560. P. 395–414.
[11] *Григорьев А.И., Пожарицкий Д.М.* // ЖТФ. 2008. Т. 78. Вып. 4. С. 35–42.
[12] *Mohamed A.A., Elshehawey E.F., El-Sayed M.F.* // J. Coll. Int. Sci. 1995. Vol. 169. P. 65–78.
[13] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 1998. Т. 68. Вып. 9. С. 13–19.
[14] *Григорьев О.А., Ширяева С.О., Григорьев А.И.* // Письма в ЖТФ. 1995. Т. 21. Вып. 12. С. 36–41.
[15] *Волков Н.Б., Майер А.Е., Яловец А.П.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 3. С. 1–9.
[16] *Хабахпашев Г.А.* // ПМТФ. 2005. Т. 46. № 6. С. 45–57.
[17] *Григорьев А.И., Пожарицкий Д.М., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 1. С. 45–50.
[18] *Левич В.Г.* Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.
[19] *Ширяева С.О., Лазарянц А.Э., Григорьев А.И. и др.* Метод скаляризации векторных краевых задач. Препринт ИМРАН № 27. Ярославль, 1994. 126 с.
[20] *Алиев И.Н., Филиппов А.В.* // Магнитная гидродинамика. 1989. № 4. С. 94–98.
[21] *Григорьев А.И., Григорьев О.А., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 1992. Т. 62. Вып. 9. С. 12–21.
[22] *Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2007. Т. 77. Вып. 2. С. 31–40.
[23] *Григорьев А.И., Пожарицкий Д.М.* // ЖТФ. 2008. Т. 78. Вып. 10. С. 40–46.
[24] *Френкель Я.И.* // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. № 4. С. 348–350.