04;10

Поперечная динамика релятивистского электронного пучка большой плотности, распространяющегося в плазме продольно внешнему магнитному полю

© Е.К. Колесников, А.С. Мануйлов

Санкт-Петербургский государственный университет;
Научно-исследовательский институт математики и механики им. В.И. Смирнова,
198504 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: Kolesnikov_evg@mail.ru, man06@mail.ru

(Поступило в Редакцию 16 сентября 2008 г.)

На основе анализа эффективного потенциала установлена возможность реализации единственного типа радиальной эволюции релятивистских электронных пучков (РЭП) большой плотности: режима, характеризующего периодические колебания его радиуса в некотором промежутке значений. Определены условия радиальной стабилизации пучка в указанном режиме транспортировки.

PACS: 52.40.Mj

Введение

Залача о радиальной динамике плотных аксиально-симметричных релятивистских электронных пучков (РЭП), распространяющихся в разреженной плазме в режиме ионной фокусировки (ИФ), давно привлекает внимание исследователей [1–17]. В пренебрежении эффектами неламинарности для холодного пучка с однородным профилем плотности эта задача была рассмотрена в работах [4–6].

В настоящей работе на основе сформулированного нами в [18] уравнения огибающей РЭП с автомодельным радиальным профилем исследованы основные качественные особенности транспортировки квазистационарного неламинарного РЭП с произвольным автомодельным профилем плотности, распространяющегося в бесстолкновительной плазме продольно однородному внешнему магнитному полю.

Постановка задачи

Рассмотрим аксиально-симметричный параксиальный релятивистский электронный пучок, инжектируемый в однородную плазму при наличии однородного стационарного магнитного поля $\mathbf{B} = B_0\mathbf{i}_z$, направленного параллельно оси симметрии пучка z ($\mathbf{i}_z$ — орт указанной оси). Предположим, что плотность электронов пучка n_b много больше плотности электронов фоновой плазмы n_Φ:

$$n_b \gg n_\Phi, \tag{1}$$

длительность импульса τ_b удовлетворяет условиям

$$\tau_e \ll \tau_b \ll \tau_i, \tag{2}$$

где τ_e — характерное время вытеснения электронов плазмы из области пучка его электрическим полем, а τ_i — характерное время колебаний ионов плазмы в потенциальной яме пучка. Как было показано в [4,5], для пучка с однородным профилем значения плотности времени τ_e и τ_i определяются выражениями

$$\tau_e = 3.2 \cdot 10^{-9}\sqrt{\frac{\beta}{J_{bz}}} \ \ [\text{s}], \tag{3}$$

$$\tau_i = 7.4 \cdot 10^{-8}\sqrt{\frac{M\beta}{ZJ_{bz}}} \ \ [\text{s}], \tag{4}$$

где J_{bz} — плотность тока пучка в A/sm^2, M и Z — соответственно массовое и зарядовое числа ионов плазмы.

Кроме того, эффектом рассеяния частиц пучка в столкновениях с частицами фоновой плазмы будем пренебрегать.

При выполнении условия $\tau_e \ll \tau_b$ электрическое поле головной части РЭП вытакливает из области пучка электроны плазмы, и основная часть пучка распространяется на фоне ионов плазмы, которые в силу условия $\tau_b \ll \tau_i$ в процессе прохождения пучка остаются неподвижными. Таким образом, в рассматриваемом случае задача о транспортировке РЭП в плазме сводится к определению эволюции поперечных сегментов пучка, распространяющегося на фоне неподвижных ионов.

Сделаем дополнительное предположение об автомодельности профиля плотности пучка, т. е. будем считать, что в любые моменты времени плотность пучка в сегменте S^τ зависит от отношения радиальной координаты r к радиусу пучка R_b в сегменте S^τ. В этом случае функция $\chi(\mathbf{r}, t)$, характеризующая радиальный профиль плотности пучка в сегменте S^τ и определяемая как

$$\chi(\mathbf{r}_\perp, t) = \int f^\tau(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp, t)\, d\mathbf{p}_\perp, \tag{5}$$

($f^\tau(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp, t)$ — функция распределения частиц пучка в сегменте S^τ по поперечным координатам $\mathbf{r}_\perp$ и импульсам $\mathbf{p}_\perp$), будет иметь вид [18]

$$\chi(\mathbf{r}_\perp, t) = \frac{1}{2\pi R_b^2(t)}\,\Phi(x), \tag{6}$$

где безразмерная координата $x = r/R_b$ (здесь $r = |\mathbf{r}_\perp|$), а $\Phi(x)$ — заданная функция, удовлетворяющая условию

$$\int_0^1 x\Phi(x)dx = 1. \tag{7}$$

Для определения основных особенностей поперечной динамики пучка воспользуемся сформулированным нами в работе [18] уравнением огибающей (см. (43) в [18]), которое в рассматриваемом случае ($\gamma = 1$, $\operatorname{sign}\kappa = -1$) может быть записано в виде

$$\frac{d^2\xi}{dt'^2} - \frac{1}{2\xi} + \frac{\delta^2\xi}{2} + \frac{\lambda^2\xi}{4} = \frac{1}{\xi^3}\left[\varepsilon^2 + \left(\sigma_\theta + \frac{\lambda}{2}\right)^2\right], \tag{8}$$

или

$$\frac{d^2\xi}{dt'^2} = -\frac{\partial U_{\text{eff}}}{\partial\xi}, \tag{9}$$

где

$$U_{\text{eff}}(\xi) = \frac{\delta^2}{4}(\xi^2 - 1) + \frac{\lambda^2}{8}(\xi^2 - 1) + \frac{1}{2}\left[\varepsilon^2 + \left(\sigma_\theta + \frac{\lambda}{2}\right)^2\right]\frac{1-\xi^2}{\xi^2} - \frac{\ln(\xi)}{2} \tag{10}$$

— эффективный скалярный потенциал поперечного движения, $\xi = R_b/R_{b0}$, $t' = t/t_0$, (R_b и R_{b0} — текущий и начальный радиус пучка), а безразмерные постоянные δ, λ, σ_θ, ε и масштаб времени t_0 определяются выражениями

$$t_0 \equiv \frac{\gamma\eta_\Phi}{\omega_{b0}}, \quad \delta = \frac{\gamma\eta_\Phi\omega_\Phi}{\omega_{b0}}, \quad \lambda = \frac{\Omega_b\eta_\Phi\gamma}{\omega_{b0}}, \tag{11}$$

$$\sigma_\theta = \frac{2\langle\Phi(x)x^3\dot\theta_0(x)\rangle\gamma}{\omega_{b0}\,\eta_\Phi}, \quad \varepsilon = \frac{2E_0}{\omega_{b0}\,\eta_\Phi\,R_{b0}^2}. \tag{12}$$

В (11) и (12)

$$\left\langle\Phi(x)x^3\dot\theta_0(x)\right\rangle = \int_0^1 \Phi(x)x^3\dot\theta_0(x)dx, \tag{13}$$

$$\eta_\Phi = \left[2\int_2^1 \Phi(x)x^3dx\right]^{1/2}, \quad \omega_{b0}^2 = \frac{4\pi e^2\langle n_{bo}\rangle}{\gamma m}, \tag{14}$$

где $\omega_\Phi = (4\pi e^2 n_\Phi/m)^{1/2}$ — ленгмюровская частота электронов фоновой плазмы (e, m — заряд и масса электрона), E_0 — начальное значение среднеквадратичного эмиттанса, $\langle n_{b0}\rangle = N_b^0/(\pi R_{b0}^2)$ — средняя начальная плотность пучка в сегменте S^τ, $\Omega_b = |e|B_0/(\gamma mc)$ — гирочастота частиц пучка во внешнем магнитном поле.

Как видно из выражения (10), для эффективного потенциала $U_{\text{eff}}(\xi)$ в случае $n_\Phi \neq 0(\delta \neq 0)$, $U_{\text{eff}}(\xi) \to +\infty$ при $\xi \to 0, +\infty$ и, следовательно, в рассматриваемом случае единственным возможным типом радиальной эволюции сегмента пучка являются периодические колебания его радиуса в некотором промежутке $[\xi_{\min}, \xi_{\max}]$.

Закон временно́й эволюции радиуса пучка определяется решением уравнения (9), которое $\dot R_{b0} \geq 0$ будет иметь вид

$$t - \tau = \begin{cases} T_0(\xi) + mT_1 + mT_2, & \xi \geq 1, \\ -T_0(\xi) + (m+1)T_1 + mT_2, & \xi \geq 1, \\ T_0(\xi) + (m+1)T_1 + mT_2, & \xi < 1, \\ -T_0(\xi) + (m+1)T_1 + (m+1)T_2, & \xi < 1, \end{cases} \tag{15}$$

а при $\dot R_{b0} < 0$

$$t - \tau = \begin{cases} T_0(\xi) + mT_1 + mT_2, & \xi \leq 1, \\ -T_0(\xi) + mT_1 + (m+1)T_2, & \xi \leq 1, \\ T_0(\xi) + mT_1 + (m+1)T_2, & \xi > 1, \\ -T_0(\xi) + (m+1)T_1 + (m+1)T_2, & \xi > 1, \end{cases} \tag{16}$$

где $m = 0, 1, 2\ldots,$

$$T_0(\xi) = t_0\left|\int_1^\xi \frac{d\xi'}{\sqrt{\Psi(\xi')}}\right|, \ T_1 = 2T_0(\xi_{\max}), \ T_2 = 2T_0(\xi_{\min}), \tag{17}$$

функция

$$\Psi(\xi) = \sigma_r^2 + \frac{\delta^2(1-\xi^2)}{2} + \frac{\lambda^2}{4}(1-\xi^2) + \left[\varepsilon^2 + \left(\sigma_\theta + \frac{\lambda}{2}\right)^2\right]\frac{1-\xi^2}{\xi^2} + \ln\xi, \tag{18}$$

постоянная

$$\sigma_r = \dot R_{b0}/(R_{b0}/t_0), \tag{19}$$

а $\xi_{\min}$ и $\xi_{\max}$ определяются корнями уравнения

$$\Psi(\xi) = 0. \tag{20}$$

В случае, когда радиальная скорость частиц пучка на выходе из инжектора равна нулю (параметр $\sigma_r = 0$), при выполнении соответствующего ограничения на параметры пучка и плазмы возможен специальный режим транспортировки РЭП, когда $\xi_{\min} = \xi_{\max} = 1$, т. е. в процессе транспортировки радиус пучка остается постоянным и равным начальному радиусу R_{b0}. Этот случай так называемого „стабилизированного РЭП“ имеет место, если при $\xi = 1$ эффективная сила удовлетворяет условию

$$E_{\text{eff}} = -\frac{\partial U_{\text{eff}}}{\partial\xi} = \left.\frac{d^2\xi}{dt'^2}\right|_{\xi=1} = 0. \tag{21}$$

Как следует из (21), в отсутствие вращения пучка на выходе из инжектора ($\sigma_\theta = 0$) условие радиальной стабилизации РЭП может быть записано в виде

$$\delta^2 = 1 + 2\varepsilon^2, \tag{22}$$

откуда с учетом (11) и (12) в предположении об однородности пучка ($\eta_\Phi = 1$) получим соответствующее выражение для радиуса стабилизированного пучка

$$R_b^{\text{st}} = \sqrt{\frac{c\varepsilon_N}{\omega_\Phi\sqrt{\gamma}}\left(\sqrt{2+\xi^2}+\xi\right)}, \tag{23}$$

где ε_N — так называемый „нормализованный" эмиттанс пучка, связанный со среднеквадратичным эмиттансом E соотношением $\varepsilon_N = 2E/c$, а безразмерный параметр ξ определяется как

$$\xi = \frac{2c}{\varepsilon_N\omega_\Phi\sqrt{\gamma}}\frac{I_b}{I_A}, \tag{24}$$

где I_b — полный ток пучка и $I_A = 17\beta\gamma$ [kA] — предельный ток Альфвена.

При заданном радиусе R_b наибольшим равновесным током I_b^{st} будет обладать так называемый „холодный" пучок, нормализованный эмиттанс которого удовлетворяет условию

$$\varepsilon_N \ll \varepsilon_N^* = \frac{2e}{\omega_\Phi\sqrt{\gamma}}\frac{I_b^{\text{st}}}{I_A}$$

$$= 62.5n_\Phi^{-1/2}I_b^{\text{st}}(1+2\varepsilon_b)^{-3/2}\,[\text{sm}\cdot\text{rad}], \tag{25}$$

где n_Φ — в sm^{-3}, I_b^{st} — в A, ε_b — кинетическая энергия электронов в MeV.

В этом случае, как следует из (23), связь между радиусом R_b и током I_b^{st} равновесного пучка определяется формулой

$$I_b^{\text{st}} = \frac{\omega_\Phi^2\gamma}{4c^2}I_AR_b^2 = 1.51\cdot10^{-8}n_\Phi(1+2\varepsilon_b)^2R_b^2\,[\text{A}], \tag{26}$$

где R_b — в sm, а остальные величины в тех же единицах, что и в (25).

В качестве примера в табл. 1 и 2 приведены рассчитанные по формуле (26) значения токов I_b^{st} в пучке радиусом $R_b = 5$ sm при плотностях фоновой плазмы $n_\Phi = 10^5$ и $10^4\,\text{sm}^{-3}$. Наряду с токами I_b^{st} в табл. 1 и 2 приведены соответствующие значения плотности тока J_{bz}^{st} в стабилизированном пучке, а также характерные времена τ_e и τ_i (для $M_i = 16$, $Z_i = 1$), рассчитанные по формулам (3) и (4).

Заметим, что данные табл. 1 и 2 являются корректными при выполнении необходимого ограничения на нормализованный эмиттанс пучка: $\varepsilon_N \ll \varepsilon_N^*$ (значения ε_N^* также приведены в таблицах).

На практике пучки с требуемыми низкими значениями эмиттанса могут быть получены, например, с использованием сильноточных фотоэмиссионных катодов, разработанных в последние годы в связи с необходимостью получения низкоэмиттансных сильноточных электронных пучков для лазеров на свободных электронах [19].

При использовании традиционных термоэмиссионных катодов равновесные токи I_b^{st} при фиксированном радиусе пучка R_b оказываются меньшими предельных токов, определяемых формулой (26).

Таблица 1. Значения I_b^{st}, J_{bz}^{st}, τ_e, τ_i и ε_N^* в случае $R_b = 5$ sm, $n_\Phi = 10^5\,\text{sm}^{-3}$ для различных значений ε_b, где ток I_b^{st} определялся по формуле (26)

ε_b, MeV	I_b^{st}, A	J_{bz}^{st}, A/sm^2	τ_e, ns	τ_i, ns	ε_N^*, sm · rad
10	16	0.21	7.0	640	$3.4\cdot10^{-2}$
20	64	0.81	3.6	330	$4.8\cdot10^{-2}$
50	390	4.9	1.5	130	$7.5\cdot10^{-2}$
70	750	9.6	1.0	96	$8.9\cdot10^{-2}$
100	1500	19	0.73	67	$1.1\cdot10^{-1}$

Таблица 2. Значения I_b^{st}, J_{bz}^{st}, τ_e, τ_i и ε_N^* в случае $R_b = 5$ sm, $n_\Phi = 10^4\,\text{sm}^{-3}$ для различных значений ε_b, где ток I_b^{st} определялся по формуле (26)

ε_b, MeV	I_b^{st}, A	J_{bz}^{st}, A/sm^2	τ_e, ns	τ_i, ns	ε_N^*, sm · rad
10	1.7	$2.1\cdot10^{-2}$	22	2000	$1.1\cdot10^{-2}$
20	6.4	$8.1\cdot10^{-2}$	11	1000	$1.5\cdot10^{-2}$
50	39	0.49	4.6	420	$2.4\cdot10^{-2}$
70	75	0.96	3.3	300	$2.8\cdot10^{-2}$
100	150	1.9	2.3	210	$3.3\cdot10^{-2}$

Оценим возможные значения токов I_b в этом последнем случае. Для определения нормализованного эмиттанса воспользуемся эмпирической формулой Лоусона–Пэннера:

$$\varepsilon_N = S\sqrt{I_b}\,[\text{sm}\cdot\text{rad}], \tag{27}$$

где I_b — ток пучка в kA, а S — коэффициент порядка 0.1–0.3 (для ускорителей с термоэлектронным катодом) [20].

В табл. 3 и 4 представлены соответствующие значения равновесных токов I_b^{st} для $R_b = 5$ sm при $n_\Phi = 10^5$

Таблица 3. Значения I_b^{st}, J_{bz}^{st}, τ_e, τ_i и ε_N^* в случае $R_b = 5$ sm, $n_\Phi = 10^5\,\text{sm}^{-3}$ для различных значений ε_b, где ток I_b^{st} определялся из (26) и (27)

ε_b, MeV	I_b^{st}, A	J_{bz}^{st}, A/sm^2	τ_e, ns	τ_i, ns	ε_N, sm · rad
10	16	0.20	7.2	660	$1.2\cdot10^{-2}$
20	55	0.70	3.8	350	$2.3\cdot10^{-2}$
50	280	3.6	1.7	160	$5.3\cdot10^{-2}$
70	500	6.4	1.3	120	$7.1\cdot10^{-2}$
100	900	11.0	0.96	89	$9.5\cdot10^{-2}$

Таблица 4. Значения I_b^{st}, J_{bz}^{st}, τ_e, τ_i и ε_N^* в случае $R_b = 5$ sm, $n_\Phi = 10^4\,\text{sm}^{-3}$ для различных значений ε_b, где ток I_b^{st} определялся из (26) и (27)

ε_b, MeV	I_b^{st}, A	J_{bz}^{st}, A/sm^2	τ_e, ns	τ_i, ns	ε_N, sm · rad
10	1.6	$2.0\cdot10^{-2}$	23	2100	$4.0\cdot10^{-3}$
20	5.5	$7.0\cdot10^{-2}$	12	1100	$7.4\cdot10^{-3}$
50	28	0.36	5.3	490	$1.7\cdot10^{-2}$
70	50	0.64	4.0	370	$2.2\cdot10^{-2}$
100	90	1.1	3.1	280	$3.0\cdot10^{-2}$

и $10^4\,\mathrm{sm}^{-3}$, рассчитанные путем численного решения уравнения (23) с учетом выражения (27) для ε_N.

При проведении расчетов значение коэффициента S в формуле (27) для определенности полагалось равным 0.1. Наряду с токами I_b^{st} в табл. 3 и 4 приведены соответствующие значения плотности тока J_{ba}^{st}, времени τ_e и τ_i, а также значения нормализованного эмиттанса ε_N, соответствующие найденным значениям I_b^{st}.

Как видно из данных табл. 3 и 4, при высоких значениях энергии электронов, близких к 100 MeV, равновесный ток I_b^{st} пучка, создаваемого ускорителем с термоэмиссионным катодом, заметно меньше равновесного тока в „холодном" пучке. Однако с уменьшением энергии электронов различие между указанными токами убывает и становится несущественным при энергиях электронов пучка порядка 10 MeV.

Заканчивая оценку необходимых условий радиальной стабилизации сильноточного РЭП, отметим принципиальную возможность значительного увеличения токов стабилизированных пучков в случае использования для транспортировки РЭП в разреженном газе плазменного канала, создаваемого в результате ионизации нейтральной компоненты фонового газа пучком излучения вспомогательного ультрафиолетового лазера. Как показывают оценки, при практически достижимых уровнях мощности ионизирующего лазерного пучка, плотность плазмы в канале может иметь значения $n_\Phi^c \geq 10^8\,\mathrm{sm}^{-3}$. При этом оказывается возможной радиальная стабилизация РЭП с токами порядка 1–10 kA радиусом порядка нескольких сантиметров даже при сравнительно низких энергиях электронов пучка (~ 10 MeV). Например, при плотности плазмы в канале $n_\Phi^c = 10^8\,\mathrm{sm}^{-3}$ и радиусе пучка $R_b = 5\,\mathrm{sm}$ ток стабилизированного пучка электронов с энергией 10 MeV и нормализованным эмиттансом, определяемым формулой (27), приближенно равен 15 kA. Отметим, наконец, что в рассматриваемой концепции транспортировки плазменный канал помимо увеличения уровня тока стабилизированного РЭП выполняет еще одну важную функцию, которая состоит в компенсации возмущающего воздействия на траекторию пучка в разреженной газоплазменной среде поперечного внешнего магнитного поля (если оно присутствует в рассматриваемой задаче), чем обеспечивается практически прямолинейное распространение пучка [19].

Возвращаясь к задаче о транспортировке РЭП в пространственно неограниченной разреженной газоплазменной среде, отметим, что в условиях, когда радиальная стабилизация пучка отсутствует и его радиус колеблется в некотором промежутке значений $[R_b^{\min}, R_b^{\max}]$, уравнение (9) корректно описывает радиальную динамику пучка, если в процессе пульсаций остаются выполненными основные условия применимости рассматриваемой модели „тела" пучка (1), (2). Последнее предположение является справедливым, если минимальные (за период радиального колебания) значения плотности пучка n_b и времени τ_i и максимальное знчение времени τ_e удовлетворяют соотношениям

$$n_b^{\min} \gg n_\Phi, \tag{28}$$

$$\tau_e^{\max} \ll \tau_b \ll \tau_i^{\min}. \tag{29}$$

Заметим, что для однородного пучка

$$n_b^{\min} = n_b\big|_{R_b=R_b^{\max}} = n_{b0}\left(\frac{R_{b0}}{R_b^{\max}}\right)^2, \tag{30}$$

$$\tau_e^{\max} = \tau_e\big|_{R_b=R_b^{\max}} = \tau_{e0}\left(\frac{R_b^{\max}}{R_{b0}}\right), \tag{31}$$

$$\tau_i^{\min} = \tau_i\big|_{R_b=R_b^{\min}} = \tau_{i0}\left(\frac{R_b^{\min}}{R_{b0}}\right), \tag{32}$$

где n_{b0}, τ_{e0} и τ_{i0} — значения плотности пучка и времени τ_e и τ_i на выходе из инжектора.

Подстановка (30)–(32) в (28), (29) приводит к соответствующим ограничениям на минимальное $\xi_{\min}$ и максимальное $\xi_{\max}$ значения безразмерного радиуса пучка $\xi = R_b/R_{b0}$

$$\xi_{\max} \ll \xi_c = \sqrt{\frac{n_{b0}}{n_\Phi}}, \tag{33}$$

$$\xi_{\max} \ll \xi_e = \frac{\tau_b}{\tau_{e0}}, \tag{34}$$

$$\xi_{\min} \gg \xi_i = \frac{\tau_b}{\tau_{i0}}. \tag{35}$$

Рассмотрим теперь случай, когда в процессе транспортировки в плазме пучок может расширяться до значений плотности, меньших плотности фоновой плазмы. Указанная ситуация будет иметь место, если максимальное значение корня уравнения (20) удовлетворяет условию

$$\xi_{\max} > \xi_c. \tag{36}$$

В ситуации (36) для описания поперечной динамики рассматриваемого сегмента „тела" пучка для значений безразмерного радиуса $\xi < \xi_c$ будем по-прежнему исходить из модели РЭП, распространяющегося на фоне неподвижного ионного „остова" плазмы, предполагая, что длительность импульса пучка τ_b удовлетворяет условиям

$$\tau_e^{\,c} \ll \tau_b \ll \tau_i^{\min}, \tag{37}$$

где время

$$\tau_e^{\,c} = \tau_e\big|_{R_b=R_b^c}.$$

В стадии сильного расширения пучка, когда его безразмерный радиус $\xi > \xi_c$, радиальную эволюцию пучка будем описывать на основе модели полностью нейтрализованного по заряду РЭП. Токовой нейтрализацией пучка при радиусах $\xi > \xi_c$ будем пренебрегать, полагая коэффициент нейтрализации $\alpha_m = 0$. Указанная модель будет корректно описывать радиальную динамику РЭП в стадии сильного расширения, если длительность импульса пучка τ_b и его максимальный радиус $R_b^{\max}$ (уравнение для определения $R_b^{\max}$ см. ниже) удовлетворяет условиям

$$\tau_b \gg \tau_p, \tag{38}$$

$$R_b^{\max} \ll \lambda_p, \tag{39}$$

где время $\tau_p = (4\pi m/e^2 n_\Phi)^{1/2}$ — период ленгмюровских колебаний фоновой плазмы, а длина $\lambda_p = c\beta\tau_p$.

При сделанных предположениях уравнение, описывающее временнýю эволюцию радиуса рассматриваемого сегмента пучка, может быть получено из общего уравнения огибающей (см. (39) в [18]), в случае $\gamma' \equiv 1$, для κ и $\omega_{\Phi 0}^2$, имеющих вид ступенчатых функций безразмерного радиуса ξ:

$$\kappa = \begin{cases} -1/(\beta^2\gamma^2), & \xi \le \xi_c, \\ 1, & \xi > \xi_c, \end{cases} \tag{40}$$

$$\omega_{\Phi 0}^2 = \begin{cases} 0, & \xi \le \xi_c, \\ 4\pi e^2 n_\Phi/(\gamma m), & \xi > \xi_c, \end{cases} \tag{41}$$

соответствующих сделанным выше предположениям о моделях РЭП для $\xi < \xi_c$ и $\xi > \xi_c$.

Тогда при переходе к безразмерному времени $t' = t/t_0$ (t_0 — масштаб времени, определяемый формулой (11)), уравнение (39) из работы [18] принимает вид

$$\frac{d^2\xi}{dt'^2} = \tilde{W}(\xi), \tag{42}$$

где функция

$$\tilde{W}(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2\xi} - \frac{\delta^2\xi}{2} - \frac{\lambda^2\xi}{4} + \frac{1}{\xi^3}\left[\varepsilon^2 + \left(\sigma_\theta + \frac{\lambda}{2}\right)^2\right], & \xi \le \xi_c, \\ -\frac{\beta^2\gamma^2}{2\xi} - \frac{\lambda^2\xi}{4} + \frac{1}{\xi^3}\left[\varepsilon^2 + \left(\sigma_\theta + \frac{\lambda}{2}\right)^2\right], & \xi > \xi_c, \end{cases} \tag{43}$$

а безразмерные параметры δ, λ, ε и σ_θ задаются формулами (11) и (12).

Уравнение (42) может быть записано в виде выражения, аналогичного (9)

$$\frac{d^2\xi}{dt'^2} = \frac{\partial \tilde{U}^{\text{eff}}}{\partial \xi} \tag{44}$$

с эффективным потенциалом

$$\tilde{U}^{\text{eff}}(\xi) = \begin{cases} \tilde{U}_1^{\text{eff}}(\xi), & \xi \le \xi_c, \\ \tilde{U}_2^{\text{eff}}(\xi), & \xi > \xi_c, \end{cases} \tag{45}$$

где $\tilde{U}_1^{\text{eff}}(\xi)$ определяется формулой (10), а $\tilde{U}_2^{\text{eff}}(\xi)$ задается выражением

$$\tilde{U}_2^{\text{eff}}(\xi) = \frac{\beta^2\gamma^2}{2}\ln\xi + \frac{\lambda^2}{8}(\xi^2 - 1) + \left[\varepsilon^2 + \left(\sigma_\theta + \frac{\lambda}{2}\right)^2\right]\frac{1-\xi^2}{\xi^2} + \frac{\delta^2}{4}(\xi_c^2 - 1) - \frac{\gamma^2}{2}\ln\xi_c. \tag{46}$$

Как следует из (45), при $\xi \to 0, +\infty$ эффективный потенциал $\tilde{U}^{\text{eff}}(\xi) \to +\infty$.

Таким образом, как и в рассмотренном выше случае, в ситуации (36) единственно возможным типом радиальной эволюции сегмента пучка являются периодические колебания его радиуса в некотором промежутке $[\xi_{\min}, \xi_{\max}]$, которые будут описываться выражениями, аналогичными (15)–(19) с функцией

$$\Psi(\xi) = \tilde{\Psi}(\xi) = \begin{cases} \Psi_1(\xi), & \xi \le \xi_c, \\ \Psi_2(\xi), & \xi > \xi_c, \end{cases} \tag{47}$$

где $\Psi_1(\xi)$ определяется формулой (18),

$$\Psi_2(\xi) = \sigma_r^2 - \beta^2\gamma^2\ln\xi + \frac{\lambda^2}{4}(1-\xi^2) + \left[\varepsilon^2 + \left(\sigma_\theta + \frac{\lambda}{2}\right)^2\right]\frac{\xi^2-1}{\xi^2} + \frac{\delta^2}{2}(1-\xi_c^2) + \gamma^2\ln\xi_c, \tag{48}$$

а минимальное $\xi_{\min}$ и максимальное $\xi_{\max}$ значения безразмерного радиуса ξ задаются корнями уравнения

$$\tilde{\Psi}(\xi) = 0. \tag{49}$$

Выводы

Показано, что уравнение огибающей РЭП большой плотности можно записать в виде обыкновенного дифференциального уравнения, описывающего радиальное движение граничных частиц пучка в эффективном потенциальном поле. Установлено, что при сделанных предположениях единственным типом радиальной эволюции пучка являются периодические колебания его радиуса в некотором промежутке значений.

Сформулированы условия радиальной стабилизации пучка, при которых его радиус в процессе транспортировки остается постоянным и равным его начальному радиусу.

Список литературы

[1] *Рухадзе А.А., Богданкевич Л.С., Росинский С.Е., Рухлин В.Г.* Физика сильноточных релятивистских электронных пучков. М., 1980. 167 с.

[2] *Диденко А.Н., Григорьев В.Н., Усов Ю.П.* Мощные электронные пучки и их применение. М., 1977. 277 с.

[3] *Кузелев М.В., Рухадзе А.А.* Электродинамика плотных электронных пучков в плазме. М., 1990. 331 с.

[4] *Росинский С.Е., Рухлин В.Г.* // ЖТФ. 1972. Т. 42. Вып. 3. С. 511–521.

[5] *Колесников Е.К., Курышев А.П., Филиппов Б.В.* // Физическая механика. Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. Вып. 3. С. 78–93.

[6] *Колесников Е.К., Курышев А.П., Филиппов Б.В.* // Вестник ЛГУ. Сер. мат., мех., астрон. 1979. Т. 13. Вып. 3. С. 84–86.

[7] *Buchanan H.L.* // Phys. Fluids. 1987. Vol. 30 N 1. P. 221–231.

[8] *Martin W.E., Caparaso G.J., Fawley W.M.* et al. // Phys. Rev. Lett. 1985. Vol. 54. N 7. P. 685–688.

[9] *Bosch R.A., Gilgenbach R.M.* // Phys. Fluids. 1988. Vol. 31. N 3. P. 634–640.

[10] Fernsler R.F., Hubbard R.F., Slinker S. // Phys. Fluids. B. 1992. Vol. 4. N 12. P. 4153–4165.

[11] *Владыко В.Б., Рудяк Ю.В.* // Физика плазмы. 1993. Т. 19. № 12. С. 1444–1453.

[12] *Swanekamp S.B., Hollowey J.P., Kammash T., Gilgenbach R.M.* // Phys. Fluids. B. 1992. Vol. 4. N 5. P. 1332–1348.

[13] *Зеленский А.Г., Колесников Е.К.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 12. С. 71–75.

[14] *Зеленский А.Г., Колесников Е.К.* // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 11. С. 127–129.

[15] *Колесников Е.К., Мануйлов А.С.* // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 9. С. 103–107.

[16] *Колесников Е.К., Мануйлов А.С.* // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 7. С. 119–125.

[17] *Колесников Е.К., Мануйлов А.С.* // ЖТФ. 2007. Т. 77. Вып. 8. С. 109–113.

[18] *Колесников Е.К., Мануйлов А.С.* // ЖТФ. 2008. Т. 78. Вып. 2. С. 113–118.

[19] *Зеленский А.Г., Колесников Е.К.* // Модели неоднородных сред. Сер. Физическая механика. Вып. 8. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2004. С. 96–112.

[20] *Маршалл Т.* Лазеры на свободных электронах. М., 1987. 238 с.