01;05;09

Возбуждение поверхностных электростатических волн в полуограниченных слоистых сверхпроводниках нерелятивистским электронным пучком

© Ю.О. Аверков, В.М. Яковенко

Институт радиофизики и электроники им. А.Я. Усикова НАН Украины,
61085 Харьков, Украина
e-mail: yuaver@online.kharkiv.com

(Поступило в Редакцию 3 апреля 2008 г.)

Теоретически исследовано возбуждение потенциальных поверхностных волн нерелятивистским электронным пучком, движущимся в вакууме вблизи границы слоистого сверхпроводника. Получены дисперсионные уравнения поверхностных волн для произвольного угла наклона слоев сверхпроводника по отношению к границе раздела двух сред. Учтена возможность произвольного направления распространения волн в плоскости границы раздела двух сред. Найдены инкременты кинетической и гидродинамической неустойчивости. Показана возможность возникновения абсолютной неустойчивости.

PACS: 41.60.Bq, 73.20.Mf, 74.72.-h

Введение

Поверхностные электромагнитные волны (поверхностные поляритоны) представляют собой особый вид макроскопических электромагнитных волн, распространяющихся вдоль поверхностей или границ раздела сред. Напряженность электромагнитного поля в такой волне экспоненциально убывает при удалении от границы [1,2]. Дисперсионные характеристики поверхностных электромагнитных волн существенно зависят от свойств поверхностей и приповерхностных слоев граничащих сред. Спектроскопия этих волн является удобным инструментом изучения свойств таких материалов, как полупроводники, диэлектрики, сверхрешетки, двумерные квантовые системы [1–4], магнитоупорядоченные среды [5], леворукие среды [6], сверхпроводники [7] и др.

Широкое применение высокотемпературных сверхпроводников (ВТСП) в устройствах современной электроники обусловило интерес к исследованию высокочастотных свойств ВТСП. Например, практическое применение ВТСП и слоистых структур на их основе в качестве управляемой волноведущей среды [8–10] стимулировало исследование дисперсионных свойств поверхностных электромагнитных волн, распространяющихся вдоль поверхности сверхпроводника. В частности, слоистые структуры типа сверхпроводник–феррит ($YBa_2Cu_3O_{7-x}-Y_3Fe_5O_{12}$) могут применяться для создания СВЧ полосовых фильтров [9]. Особенности распространения поверхностных электромагнитных волн в таких структурах исследованы в работе [10]. Показано, что чувствительность дисперсионных характеристик поверхностных волн к глубине проникновения поля в пленку сверхпроводника позволяет по величине фазового набега измерять такие параметры сверхпроводящих пленок, как глубина проникновения в пленку и поверхностное сопротивление в присутствии внешнего магнитного поля.

Слоистая структура ВТСП способствует распространению электромагнитных волн с джозефсоновской плазменной частотой, лежащей в терагерцовой области. Это позволяет создавать на основе таких структур генераторы, детекторы и перестраиваемые фильтры терагерцового излучения [11–13].

Обнаружение пикосекундного отклика ВТСП-пленок на лазерное излучение позволяет создавать целый ряд сверхбыстродействующих устройств инфракрасного и оптического диапазонов таких, как пикосекундные детекторы, широкополосные смесители и др. [14,15]. Поверхностные электромагнитные волны являются удобным инструментом для экспериментального определения частотных и температурных зависимостей диэлектрической проницаемости ВТСП [16–19]. В указанных работах поверхностные волны возбуждались методом нарушенного полного внутреннего отражения в геометрии Отто [1]. Знание этих зависимостей необходимо, например, для расчета магнитооптических свойств таких слоистых структур, как $Y_2BiFe_5O_{12}-Bi_2Sr_2CaCu_2O_{8+x}-StTiO_3$, использующихся для регистрации квантов магнитного потока в современных ВТСП-устройствах [20]. Кроме этого, учет частотной дисперсии диэлектрической проницаемости важен для исследования эффектов отражения и преломления света поверхностью слоистого сверхпроводника и особенно для исследования возбуждения дополнительных волн в ВТСП [21]. В работе [22] были исследованы дисперсионные характеристики поверхностных электромагнитных волн, распространяющихся вдоль границы раздела сред диэлектрик–слоистый сверхпроводник перпендикулярно кристаллографической оси c кристалла. Полученное в [22] дисперсионное соотношение для поверхностных волн при произвольных углах наклона слоев по отношению к границе раздела двух сред позволяет рассчитать частотные и температурные зависимости параметров локализации волн.

В настоящей работе рассмотрена задача возбуждения поверхностных электромагнитных волн на границе вакуум–слоистый сверхпроводник нерелятивистским электронным пучком. Получено дисперсионное соотношение для связанных волн при произвольных углах наклона слоев по отношению к границе раздела двух сред и при произвольных углах распространения поверхностных волн по отношению к направлению скорости пучка. Показана возможность возникновения абсолютной неустойчивости, позволяющая генерировать поверхностные волны в оптическом частотном диапазоне. Найденные выражения для инкрементов неустойчивости позволяют найти значения характерных частот слоистого сверхпроводника. Рассмотрены условия существования поверхностных волн в полуограниченной искусственной слоистой среде, состоящей из чередующихся сверхпроводящих и диэлектрических слоев.

1. Постановка задачи и основные уравнения

Вследствие малости диссипативных потерь в сверхпроводниках при температурах значительно ниже температуры сверхпроводящего перехода T_c можно добиться существенных замедлений поверхностных электромагнитных волн по сравнению с полуограниченными полупроводниками. Благодаря этому сверхпроводники могут обеспечивать надежную связь волн пространственного заряда с поверхностными электромагнитными волнами. Например, анализ дисперсионных кривых собственных поверхностных волн на границе вакуум–слоистый сверхпроводник, приведенных в работе [22], но с учетом конечных диссипативных потерь, показывает, что вблизи точки поворота спектра фазовая скорость поверхностных волн v_{ph} может быть значительно меньше скорости света в вакууме ($v_{\mathrm{ph}} \ll c$, где c — скорость света в вакууме). Например, при температуре сверхпроводника $T = 0.1T_c$ коэффициент замедления поверхностных волн, равный отношению v_{ph}/c, может достигать значений, меньших чем 0.1. В связи с этим для описания взаимодействия потока нерелятивистских заряженных частиц с собственными поверхностными волнами полуограниченного сверхпроводника можно воспользоваться приближением электростатики.

Рассмотрим границу раздела сред пучок–слоистый сверхпроводник, расположенную в плоскости $y = 0$. Электронный пучок занимает полупространство $y > 0$ (среда 1) и движется вдоль оси z со скоростью $v_0 \ll c$. Слоистый сверхпроводник занимает полупространство $y < 0$ (среда 2). Мы предполагаем, что толщина пучка ($d \sim 10^{-5}$–10^{-4} m [23]) значительно превышает длину возбуждаемых поверхностных волн ($\lambda \sim 10^{-7}$ m).

Поля в пучке описываются следующими уравнениями:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}_1 = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{E}_1 = 4\pi e n_1, \quad e\frac{\partial n_1}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j}_1 = 0, \qquad (1)$$

где e — заряд электрона, а возмущения концентрации n_1 и плотности тока $\mathbf{j}_1$ электронов пучка связаны с электрическим полем $\mathbf{E}_1$ кинетическим уравнением Власова [24]. Используя методику, изложенную в [24], можно получить закон дисперсии поверхностных электростатических волн, взаимодействующих с пучком электронов. В качестве стационарной функции распределения электронов в пучке выбирается распределение Максвелла для макропотока

$$f_0(\mathbf{p}) = \frac{n_{01}}{(2\pi m_0 T_1)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(p_z - p_0)^2 + p_x^2 + p_y^2}{2m_0 T_1}\right], \qquad (2)$$

где n_{01} — равновесная концентрация электронов пучка, m_0 — масса свободного электрона, $p_0 = m_0 v_0$ — импульс направленного движения потока, T_1 — температура электронов пучка, выраженная в энергетических единицах. Заметим, что функция распределения (2) имеет такой же вид, как и для безграничной плазмы. Это справедливо при условии зеркального отражения электронов от границы раздела двух сред [24]. Воспользуемся более простым и наглядным способом получения закона дисперсии поверхностных волн и инкрементов их неустойчивости. Это так называемый энергетический подход, суть которого заключается в представлении энергии поля поверхностной волны в виде суммы квантов $\hbar\omega_{\mathbf{q}}$ элементарных поверхностных возбуждений (поверхностных плазмонов), изменение числа $N_{\mathbf{q}}$ которых описывается соответствующим кинетическим уравнением [3]:

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \mathbf{E}_1 \frac{\partial \mathbf{D}_1}{\partial t}\, d\mathbf{r} + \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^0 \mathbf{E}_2 \frac{\partial \mathbf{D}_2}{\partial t}\, d\mathbf{r} = \sum_{\mathbf{q}} \hbar\omega_{\mathbf{q}} \frac{\partial N_{\mathbf{q}}}{\partial t} = -\int_0^\infty \mathbf{j}_{\mathrm{ext}} \mathbf{E}_1 d\mathbf{r}, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial N_{\mathbf{q}}}{\partial t} = \frac{2\pi}{\hbar}\sum_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2} \left|W_{\mathbf{k}_1\mathbf{q}\mathbf{k}_2}\right|^2 \delta(\Theta_1 - \Theta_2 - \hbar\omega_{\mathbf{q}}) \times \left[(N_{\mathbf{q}} + 1)n_{\mathbf{k}_1}(1 - n_{\mathbf{k}_2}) - N_{\mathbf{q}} n_{\mathbf{k}_2}(1 - n_{\mathbf{k}_1})\right], \qquad (4)$$

где $\hbar$ — постоянная Планка, $\omega_{\mathbf{q}}$ — частота поверхностного плазмона с волновым вектором $\mathbf{q}$, $n_{\mathbf{k}_j} = (0, 1)$ — число электронов в состоянии $\mathbf{k}_j$, $\Theta_j = \hbar^2 k_{\mathbf{j}}^2/(2m_0)$ — энергия электронов в состоянии $\mathbf{k}_j$, $W_{\mathbf{k}_1\mathbf{q}\mathbf{k}_2}$ — матричный элемент гамильтониана электрон-плазмонного взаимодействия, $\mathbf{j}_{\mathrm{ext}}$ — плотность сторонних токов. Уравнение (3) означает, что изменение энергии электростатического поля поверхностных плазмонов равно мощности потерь сторонних токов, взятой с противоположным знаком. Например, отрицательный знак этой мощности будет означать рост энергии плазмонов. Подробный расчет величины $W_{\mathbf{k}_1\mathbf{q}\mathbf{k}_2}$ для спонтанного и индуцированного излучений электронов будет выполнен ниже.

Рассмотрим область $y < 0$. Пусть сверхпроводник выращен таким образом, что кристаллографическая ось a совпадает с координатной осью x, а кристаллографические оси b и c образуют угол ψ с координатными осями y и z соответственно. При $\psi = 0$ ось b совпадает с осью y, а ось c — с осью z. Уравнения для полей в сверхпроводнике имеют вид

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{D}_2(\mathbf{r}, t) = 0, \tag{5}$$

где $D_{2i} = \varepsilon_{ij}E_{2j}$ — компоненты вектора электрической индукции, ε_{ij} — тензор диэлектрической проницаемости среды, $i, j = x, y, z$. Электрические поля в пучке и в сверхпроводнике представим в следующем виде:

$$\mathbf{E}_l(\mathbf{r}, t) = -\nabla\Phi_l(\mathbf{r}, t),$$
$$\Phi_l(\mathbf{r}, t) = \Phi_{0l}\exp\left[i(q_x x + q_{ly}y + q_z z - \omega t)\right], \tag{6}$$

где Φ_{0l} — амплитуда скалярного потенциала, $l = 1, 2$. В главных осях ($\psi = 0$) ненулевые диагональные компоненты тензора ε_{ij} равны:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_a, \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_b, \quad \varepsilon_{zz} = \varepsilon_c. \tag{7}$$

Эти компоненты могут быть представлены в виде [25]

$$\varepsilon_\gamma = \varepsilon_{0\gamma} - \frac{\omega_{0\gamma}^2}{\omega^2}\left(1 - \frac{i\nu_\gamma\theta^4}{\omega + i\nu_\gamma}\right), \tag{8}$$

где

$$\omega_{0\gamma} = \sqrt{4\pi n_2 e^2/m_\gamma^*}$$

— плазменная частота для соответствующего кристаллографического направления, m_γ^* — диагональные компоненты тензора эффективной массы электрона, $n_2 = n_{2N} + n_{2S}$ — полная концентрация электронов, $n_{2N} = n_2\theta^4$ и $n_{2S} = n_2(1 - \theta^4)$ — концентрации „нормальных“ и „сверхпроводящих“ электронов соответственно, $\theta = T/T_c$ — нормированная температура, ν_γ — частота столкновений „нормальных“ электронов, $\varepsilon_{0\gamma}$ — решеточный вклад в соответствующую компоненту диэлектрической проницаемости, $\gamma = a, b, c$. Заметим, что $\varepsilon_a = \varepsilon_b$ и $m_a^* = m_b^*$ в силу одноосной симметрии сверхпроводника. В купратных ВТСП выполняется неравенство $m_a^* \ll m_c^* \simeq m_0$, где m_0 — масса свободного электрона [25].

Для произвольных значений угла ψ тензор $\varepsilon_{i,j}(\psi)$ получается с помощью преобразования $\varepsilon(\omega, \psi)_{ij} = \varepsilon(\omega)_{pq}C_{ip}C_{jq}$, где C_{ip} и C_{jq} — элементы матрицы поворота на угол ψ вокруг кристаллографической оси a

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_a, \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_a\cos^2(\psi) + \varepsilon_c\sin^2(\psi), \tag{9}$$

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_a\sin^2(\psi) + \varepsilon_c\cos^2(\psi),$$
$$\varepsilon_{zy} = \varepsilon_{yz} = (\varepsilon_a - \varepsilon_c)\sin(\psi)\cos(\psi). \tag{10}$$

Воспользовавшись (6)–(10), из уравнения $\operatorname{div}\mathbf{D}_2 = 0$ получим дисперсионное соотношение для потенциальных волн в слоистом сверхпроводнике при произвольных значениях угла ψ:

$$q_x^2\varepsilon_a + q_{2y}^2\varepsilon_{yy} + q_z^2\varepsilon_{zz} + 2\varepsilon_{zy}q_{2y}q_z = 0. \tag{11}$$

Из (11) получим следующее выражение для q_{2y}:

$$q_{2y} = \varepsilon_{yy}^{-1}\left[-q_z\varepsilon_{yz} + i\sqrt{\varepsilon_a(\varepsilon_c q_z^2 + \varepsilon_{yy}q_x^2)}\right]. \tag{12}$$

2. Кинетическая неустойчивость

Для того, чтобы найти величину $W_{\mathbf{k}_1\mathbf{q}\mathbf{k}_2}$, рассмотрим сначала потери энергии одного электрона на возбуждение поверхностных волн. Пусть этот электрон движется в вакууме вдоль оси z со скоростью v_0 на расстоянии h от границы $y = 0$. Ток электрона $\mathbf{j}_{\text{ext}} = (0, 0, j_z^e)$ запишется в виде

$$j_z^e(\mathbf{r}, t) = ev_0\delta(x)\delta(y - h)\delta(z - v_0 t), \tag{13}$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака. Из (3) и (13) следует, что потери энергии электрона равны мощности спонтанного излучения ($N_\mathbf{q} \ll 1$). Из уравнений Максвелла для электрического поля, создаваемого электроном, получается следующее выражение:

$$\mathbf{E}^e(\mathbf{r}, t) = -\nabla\int dq_x dq_z d\omega\Phi^e(q_x, q_z, \omega; y)$$
$$\times\exp\left[i(q_x x + q_z z - \omega t)\right], \tag{14}$$

где

$$\Phi^e(q_x, q_z, \omega; y) = \frac{ie}{2\pi q_{1y}}\exp(iq_{1y}|y - h|)\delta(q_z v_0 - \omega),$$
$$q_{1y} = i\sqrt{q_x^2 + q_z^2}. \tag{15}$$

Полный потенциал полей в вакууме равен $\Phi_v(\mathbf{r}, t) = \Phi^e(\mathbf{r}, t) + \Phi_1(\mathbf{r}, t)$. Здесь потенциал $\Phi_1(\mathbf{r}, t)$ описывает поле излучения в вакууме. Требования непрерывности на границе $y = 0$ тангенциальных компонент электрических полей и нормальных компонент электрических индукций принимают вид

$$\Phi_v(\mathbf{r}, t)\big|_{y=0} = \Phi_2(\mathbf{r}, t)\big|_{y=0},$$
$$\frac{\partial\Phi_v(\mathbf{r}, t)}{\partial y}\bigg|_{y=0} = \sum_j \varepsilon_{yj}\frac{\partial\Phi_2(\mathbf{r}, t)}{\partial r_j}\bigg|_{y=0}, \tag{16}$$

где $j = x, y, z$. Из (16) находим

$$\Phi_1(q_x, q_z, \omega; 0) = -\frac{ie}{2\pi q_{1y}}\exp(iq_{1y}h)$$
$$\times\frac{\varepsilon_{yy}q_{2y} + \varepsilon_{yz}q_z + q_{1y}}{\varepsilon_{yy}q_{2y} + \varepsilon_{yz}q_z - q_{1y}}\delta(q_z v_0 - \omega), \tag{17}$$

где q_{2y} задается выражением (12). Подставив (17) в (14) и выполнив интегрирование по $d\omega$ с учетом полюса подынтегрального выражения, из (3) и (4) получим выражение для $|W_{\mathbf{k}_1\mathbf{q}\mathbf{k}_2}|^2$ при $\psi = 0$, когда слои сверхпроводника перпендикулярны поверхности кристалла

$$\left|W_{\mathbf{k}_1\mathbf{q}\mathbf{k}_2}\right|^2 = -\frac{4\pi\hbar e^2 v_0}{S_{xz}\omega_{0a}^2}$$
$$\times\frac{\omega_\perp^2\varepsilon_a(\omega_\perp)q_z\kappa\exp(-2h\kappa)}{q_x^2[1 + \varepsilon_a^2(\omega_\perp)] + q_z^2[1 + \alpha\varepsilon_a^2(\omega_\perp)]}, \tag{18}$$

где S_{xz} — площадь системы в плоскости (xz), $\alpha = \omega_{0c}^2/\omega_{0a}^2$, $\kappa = \sqrt{q_x^2 + q_z^2}$,

$$\omega_\perp^2 = \frac{\omega_{0a}^2}{2} \times \frac{2\varepsilon_{0a}\,\mathrm{tg}^2(\vartheta) + \varepsilon_{0c} + \alpha\varepsilon_{0a} - \sqrt{(\varepsilon_{0c} - \alpha\varepsilon_{0a})^2 + 4[1 + \mathrm{tg}^2(\vartheta)][\alpha + \mathrm{tg}^2(\vartheta)]}}{(\varepsilon_{0a}^2 - 1)\,\mathrm{tg}^2(\vartheta) + (\varepsilon_{0a}\varepsilon_{0c} - 1)}, \tag{19}$$

где $\mathrm{tg}^2(\vartheta) = q_x^2/q_z^2$. Из формулы (4) можно получить выражение для инкремента (декремента) поверхностных плазмонов при распространении над поверхностью кристалла электронного пучка с конечной температурой электронов T_1. Поскольку распределение электронов по энергиям в пучке является невырожденным ($n_{\mathbf{k}} \ll 1$), а их излучение — индуцированным ($N_{\mathbf{q}} \gg 1$), то с учетом малости импульса поверхностного плазмона по сравнению с импульсом электрона ($p_z \gg \hbar q_z$, $T_1 \gg \hbar\omega_{\mathbf{q}}$) выражение для инкремента неустойчивости запишется следующим образом [3]:

$$\gamma^K = \frac{1}{N_{\mathbf{q}}}\frac{\partial N_{\mathbf{q}}}{\partial t} = \frac{2\pi L_y S_{xz}}{\hbar} \times \int d\mathbf{p} \left|W_{\mathbf{k}_1\mathbf{q}\mathbf{k}_2}\right|^2 \delta\left(p_z - \frac{\omega_{\mathbf{q}}}{q_z}\right)\frac{\partial f_0(\mathbf{p})}{\partial p_z}, \tag{20}$$

где L_y — размер системы в направлении оси y, а $f_0(\mathbf{p})$ задается выражением (2). Подстановка выражения (18), в котором v_0 заменяем на p_z/m_0, в (20) дает

$$\gamma_\perp^K = \frac{4\pi^2 L_y m_0^3 \omega_{01}^2 \omega_\perp^3 \varepsilon_a(\omega_\perp)\kappa(\omega_\perp - q_z v_0)}{(2\pi m_0 T_1)^{3/2} q_z \omega_{0a}^2 \left\{q_x^2[1 + \varepsilon_a^2(\omega_\perp)] + q_z^2[1 + \alpha\varepsilon_a^2(\omega_\perp)]\right\}} \times \exp\left[-\frac{m_0(\omega_\perp - q_z v_0)^2}{2T_1 q_z^2}\right], \tag{21}$$

где $L_y \sim q_z^{-1}$,

$$\omega_{01} = \sqrt{4\pi e^2 n_{01}/m_0}$$

— ленгмюровская частота электронов пучка. Из (21) видно, что при $v_0 > \omega_\perp/q_z$ амплитуда поверхностных плазмонов начинает экспоненциально расти, так как $\varepsilon_a(\omega_\perp) < 0$ и $\gamma_\perp^K > 0$. При $v_0 < \omega_\perp/q_z$ имеем $\gamma_\perp^K < 0$, что соответствует затуханию поверхностных плазмонов.

На рис. 1 приведены зависимости максимального значения инкремента $\bar{\gamma}_{\max}^K = \gamma_\perp^K/\omega_{0a}$ (кривая *1*) и соответствующего ему значения частоты $\bar{\omega}_{\max} = \omega_\perp/\omega_{0a}$ (кривая *2*) от величины волнового вектора $\bar{q}_x = q_x v_0/\omega_{0a}$, для следующих параметров сверхпроводника $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$ [22] и пучка [3]: $\varepsilon_{0a} = \varepsilon_{0c} = 4.0$, $\omega_{0a} = 5.6 \cdot 10^{15}\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_{0c} = 1.1 \cdot 10^{15}\,\mathrm{s}^{-1}$, $n_{01} \sim 10^{18}\,\mathrm{m}^{-3}$, $v_0 = 3 \cdot 10^9\,\mathrm{s}^{-1}$, $T_1 = 1.38 \cdot 10^{-20}\,\mathrm{J}$. Кривой *1* соответствует левая ось ординат, а кривой *2* — правая. Из рис. 1 следует, что в плоскости границы раздела двух сред для заданных параметров сверхпроводника и пучка существует выделенное направление распространения поверхностных волн, в котором значение

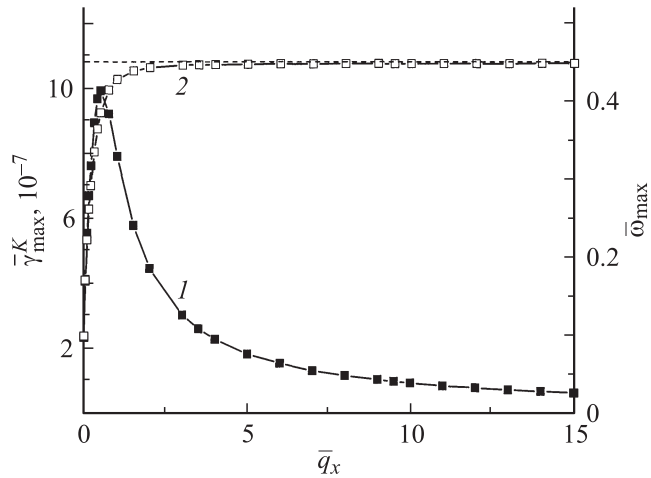

Рис. 1. Зависимость максимального значения инкремента $\bar{\gamma}_{\max}^K = \gamma_\perp^K/\omega_{0a}$ (кривая *1*) и сопутствующего ему значения частоты $\bar{\omega}_{\max} = \omega_\perp/\omega_{0a}$ (*2*) от величины волнового вектора $\bar{q}_x = q_x v_0/\omega_{0a}$. Кривые построены с помощью выражения (21).

максимального инкремента неустойчивости оказывается наибольшим. Для указанных параметров кристалла и пучка это направление соответствует углу $\vartheta \approx 52°$, при этом $\omega_\perp/q_z \approx 0.995 v_0$.

При $\psi = \pi/2$, когда слои сверхпроводника параллельны поверхности кристалла, выражения для $|W_{\mathbf{k}_1\mathbf{q}\mathbf{k}_2}|^2$ и инкремента неустойчивости $\gamma_\parallel^K$ имеют вид

$$\left|W_{\mathbf{k}_1\mathbf{q}\mathbf{k}_2}\right|^2 = -\frac{4\pi\hbar e^2 v_0}{S_{xz}\kappa}\frac{\omega_\parallel^2 q_z \exp(-2h\kappa)}{\omega_{0a}^2\varepsilon_c(\omega_\parallel) + \omega_{0c}^2\varepsilon_a(\omega_\parallel)}, \tag{22}$$

$$\gamma_\parallel^K = \frac{4\pi^2 L_y m_0^3 \omega_{01}^2 \omega_\parallel^3(\omega_\parallel - q_z v_0)}{(2\pi m_0 T_1)^{3/2} q_z \kappa\left[\omega_{0a}^2\varepsilon_c(\omega_\parallel) + \omega_{0c}^2\varepsilon_a(\omega_\parallel)\right]} \times \exp\left[-\frac{m_0(\omega_\parallel - q_z v_0)^2}{2T_1 q_z^2}\right], \tag{23}$$

где $L_y \sim q_z^{-1}$

$$\omega_\parallel^2 = \omega_\perp^2(\vartheta = 0) = \frac{\varepsilon_{0c}\omega_{0a}^2 + \varepsilon_{0a}\omega_{0c}^2 - \sqrt{(\varepsilon_{0c}\omega_{0a}^2 - \varepsilon_{0a}\omega_{0c}^2)^2 + 4\omega_{0a}^2\omega_{0c}^2}}{2(\varepsilon_{0a}\varepsilon_{0c} - 1)}. \tag{24}$$

Заметим, что $\varepsilon_a(\omega_\parallel) < 0$ и $\varepsilon_c(\omega_\parallel) < 0$. При $v_0 > \omega_\parallel/q_z$ происходит усиление поверхностных колебаний. Из выражения (23) следует, что в рассматриваемом случае наибольшее значение инкремента достигается при $q_x = 0$ и является величиной порядка $\gamma_\parallel^K/\omega_{0a} \sim 10^{-7}$ для вышеуказанных параметров сверхпроводника и пучка.

3. Гидродинамическая неустойчивость

Гидродинамическое описание электронного пучка возможно в пренебрежении тепловым движением электронов. Условием этого является малость дебаевского радиуса электронов пучка r_D по сравнению с характерным размером системы [24]. В рассматриваемой задаче таким размером является глубина проникновения поля поверхностной волны в пучок, являющаяся величиной порядка длины волны λ. Поэтому условие пренебрежения тепловым движением электронов пучка запишется в виде

$$r_D = \frac{v_T}{\omega_{01}} = \sqrt{\frac{T_1}{4\pi e^2 n_{01}}} \ll \lambda, \tag{25}$$

где $v_T = \sqrt{T_1/m_0}$ — тепловая скорость электронов пучка. Например, для пучка с плотностью $n_{01} \sim 10^{18}\,\mathrm{m}^{-3}$ и $\lambda \sim 10^{-7}\,\mathrm{m}$ неравенство (25) выполнится при $T_1 \ll 3 \cdot 10^{-23}$ J. Если

$$\left(\gamma^H\right)^2 \gg \omega_{01}^2, \quad \frac{v_T}{\gamma^H} \ll \lambda, \tag{26}$$

где γ^H — инкремент гидродинамической неустойчивости, то в процессе развития неустойчивости электроны пучка смещаются на расстояния от границы много меньшие, чем глубина проникновения поля, т.е. находятся в тонком приповерхностном слое в области $y > 0$ в течение всего времени развития неустойчивости. Это означает образование поверхностных зарядов на границе раздела сред пучок–сверхпроводник. Первое условие в (26) соответствует одночастичному эффекту Черенкова [24]. Ниже будет показано, что при рассматриваемых параметрах пучка $(\gamma^H)^2 \sim 10^{23}\,\mathrm{s}^{-2}$, $\omega_{01}^2 \sim 10^{21}\,\mathrm{s}^{-2}$. Следовательно, при $\lambda \sim 10^{-7}\,\mathrm{m}$ образование поверхностных зарядов будет происходить при температуре пучка $T_1 \ll 10^{-21}$ J. Это означает, что условие применимости гидродинамического приближения (25) налагает более жесткие ограничения на температуру пучка, чем условия (26). Заметим, что в рассмотренном выше случае кинетической неустойчивости температура пучка бралась равной $T_1 = 1.38 \cdot 10^{-20}$ J, и поэтому поверхностные заряды не возникали.

Дисперсионное соотношение для связанных поверхностных волн получается из граничных условий, выражающих непрерывность тангенциальных компонент электрического поля и скачок нормальных компонент электрической индукции, связанной с наличием поверхностных токов. Следуя работе [26], рассмотрим тонкий переходный слой $-\delta < y < \delta$ (где $\delta \ll \lambda$), в котором поведение электронов описывается следующей системой линеаризованных уравнений непрерывности и движения:

$$\frac{\partial N(\mathbf{r},t)}{\partial t} + N_0\left[\frac{\partial v_x(\mathbf{r},t)}{\partial x} + \frac{\partial v_z(\mathbf{r},t)}{\partial z}\right] + \frac{\partial[N_0 v_y(\mathbf{r},t)]}{\partial y} + v_0\frac{\partial N(\mathbf{r},t)}{\partial z} = 0. \tag{27}$$

$$\frac{\partial v_i(\mathbf{r},t)}{\partial t} + v_0\frac{\partial v_i(\mathbf{r},t)}{\partial z} = \frac{eE_i(\mathbf{r},t)}{m_0}, \tag{28}$$

где N_0 — равновесная плотность электронов, $N(\mathbf{r},t)$ и $v_i(\mathbf{r},t)$ — возмущения плотности и компонент скорости электронов соответственно, $i = x, y, z$. Плотность высокочастотных неоднородных составляющих тока в переходном слое задается следующим образом:

$$j_x = eN_0 v_x(\mathbf{r},t), \quad j_y = eN_0 v_y(\mathbf{r},t),$$
$$j_z = eN_0 v_z(\mathbf{r},t) + eN(\mathbf{r},t)v_0. \tag{29}$$

Решив уравнения (27), (28), найдем вектор электрической индукции и тензор диэлектрической проницаемости пучка $\varepsilon_{ik}^{(1)}$ с помощью (29) и следующего известного выражения:

$$D_i = \delta_{ik}E_k + 4\pi i j_i/\omega = \varepsilon_{ik}^{(1)}E_k, \tag{30}$$

где δ_{ik} — символ Кронекера. Уравнение, описывающее скачок нормальной компоненты электрической индукции, получается в результате интегрирования уравнения $\operatorname{div}\mathbf{D} = 0$ по толщине переходного слоя и с точностью до членов порядка $O(\delta/\lambda)$ имеет вид

$$\sum_j \varepsilon_{yj}\frac{\partial\Phi_2(\mathbf{r},t)}{\partial r_j}\Big|_{y=0} - \varepsilon_{yy}^{(1)}\frac{\partial\Phi_1(\mathbf{r},t)}{\partial y}\Big|_{y=0}$$
$$= -\frac{4\pi e^2 q_z v_0}{m_0\omega(\omega - q_z v_0)^2}\lim_{\delta\to 0}\int\limits_{-\delta}^{\delta} dy\,\frac{\partial}{\partial y}\left[N_0\frac{\partial\Phi(\mathbf{r},t)}{\partial y}\right], \tag{31}$$

где

$$\varepsilon_{yy}^{(1)} = 1 - \frac{\omega_{01}^2}{\omega(\omega - q_z v_0)}, \tag{32}$$

$j = x, y, z$. Выполнив в (31) интегрирование и учтя условие непрерывности потенциалов $\Phi_1(\mathbf{r},t)$ и $\Phi_2(\mathbf{r},t)$ на границе $y = 0$, получим

$$\varepsilon_{yy}q_{2y} + \varepsilon_{yz}q_z = \left[1 - \frac{\omega_{01}^2}{(\omega - q_z v_0)^2}\right]q_{1y}. \tag{33}$$

При $v_0 = 0$ уравнение (33) описывает поверхностные волны на границе слоистый сверхпроводник–равновесная плазма, а при $\omega_{01} = 0$ — поверхностные волны на границе слоистый сверхпроводник–вакуум.

В области частот, где $\varepsilon_a, \varepsilon_c < 0$, имеем $\varepsilon_{yy} < 0$ и $\operatorname{Im}\{q_{2y}\} < 0$. Из (12) следует, что при $0 < \psi < \pi/2$ волна в сверхпроводнике в отсутствие потерь $(T \ll T_c)$ не является чисто поверхностной, так как $\operatorname{Re}\{q_{2y}\} = -q_z\varepsilon_{yz}/\varepsilon_{yy} \neq 0$ в общем случае. Из выражения (12) следуют условия существования волн в кристалле с амплитудой, убывающей при удалении от границы раздела двух сред

$$\varepsilon_a\left[\varepsilon_c + \varepsilon_{yy}\operatorname{tg}^2(\vartheta)\right] > 0, \quad \varepsilon_{yy} < 0. \tag{34}$$

Так как $\omega \sim \omega_{0a} \sim 10^{15}\,\mathrm{s}^{-1} \gg \omega_{01} \sim 10^{10}\,\mathrm{s}^{-1}$, то дисперсионное уравнение для собственных поверхностных волн можно переписать в виде

$$\varepsilon_a\left[\varepsilon_c\cos^2(\vartheta) + \varepsilon_{yy}\sin^2(\vartheta)\right] = 1 + O\left(\frac{\omega_{01}^2}{\omega_{0a}^2}\right). \tag{35}$$

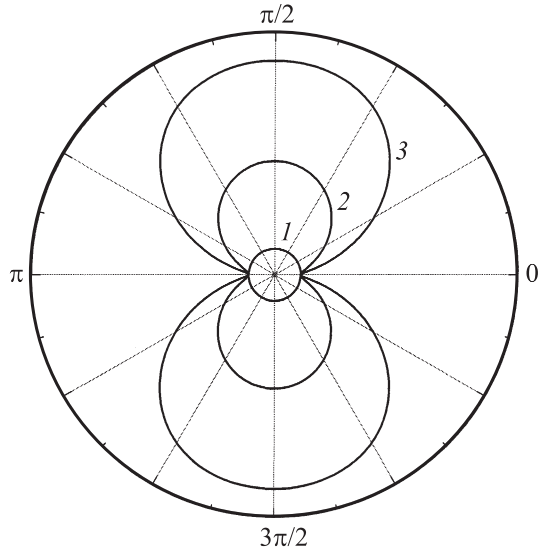

Рис. 2. Распределение частоты поверхностных волн в зависимости от угла ϑ для ряда значений ψ без учета диссипативных потерь ($T \ll T_c$). Расчет по формуле (35). Кривая *1* соответствует значению $\psi = \pi/2$, *2* — $\pi/3$, *3* — 0.

На рис. 2 показаны распределения частоты поверхностных волн в зависимости от угла ϑ для ряда значений ψ при вышеуказанных параметрах сверхпроводника, а также плотности и скорости пучка. Здесь и в дальнейшем будем считать, что все электроны в среде 2 находятся в сверхпроводящем состоянии ($T \ll T_c$). Из рис. 2 видно, что при ориентации слоев сверхпроводника параллельно границе раздела двух сред ($\psi = \pi/2$) значения частоты поверхностных волн одинаковы для всех направлений распространения. Соответствующая частота определяется из соотношения $\varepsilon_a \varepsilon_c = 1$ и равна $\omega_{\min} = \omega_\perp(\vartheta = 0) \approx (\omega_{0c}/\sqrt{\varepsilon_{0c}})[1 - O(\varepsilon_{0a}^{-1}\varepsilon_{0c}^{-1})]$. С уменьшинем ψ угловое распределение частоты становится неоднородным. Минимум частоты находится при $\vartheta = 0$, а максимум — при $\vartheta = \pi/2$ (с периодом π). Наибольшее значение частоты $\omega_{\max} = \omega_\perp(\vartheta = \pi/2) = \omega_{0a}/\sqrt{1 + \varepsilon_{0a}}$ достигается при $\psi = 0$, $\vartheta = \pi/2$ и определяется из соотношения $\varepsilon_a^2 = 1$. Отметим, что значения частоты, принадлежащие интервалу $\omega_{\min} < \omega < \omega_{\max}$ удовлетворяет условиям (34).

Введем безразмерные частоту $\bar{\omega}$ и волновые векторы $\bar{q}_x$, $\bar{q}_z$:

$$\bar{\omega} = \omega/\omega_{0a}, \quad \bar{q}_x = q_x/q_0, \quad \bar{q}_z = q_z/q_0, \tag{36}$$

где $q_0 = \omega_{0a}/v_0 \sim 10^6\,\text{cm}^{-1}$ при $v_0 = 0.1c$.

Зависимость частоты $\bar{\omega}$ поверхностных волн от величины $\bar{q}_z$ при фиксированном значении $\bar{q}_x = 0.1$ для разных углов наклона слоев ψ показаны на рис. 3. Из рис. 3 видно, что приведенные зависимости имеют отрицательную дисперсию при $\psi \neq \pi/2$. При $\psi = \pi/2$ поверхностные волны являются бездисперсионными и распространяются на частоте $\omega_{\min}$. Отрицательный характер дисперсии поверхностных волн означает, что при выполнении условия синхронизма этих волн с волной пучка (в точке пересечения дисперсионных кривых пучка и поверхностной волны) возникает абсолютная пучковая неустойчивость. В окрестности резонанса, когда

$$\omega = \omega_R + \delta\omega, \quad |\delta\omega| \ll \omega_R, \tag{37}$$

где частота $\omega_R = q_z v_0$ удовлетворяет дисперсионному уравнению поверхностных волн в отсутствие пучка, дисперсионное уравнение (33) можно переписать в безразмерных переменных $\bar{\omega}$, $\bar{q}_x$, $\bar{q}_z$ в следующем виде:

$$\left(\delta\bar{\omega} - \delta\bar{q}_z\right)^2\left(\delta\bar{\omega} - \bar{v}_{\text{gr}}\delta\bar{q}_z\right) = -\left(\frac{\omega_{01}}{\omega_{0a}}\right)^2 \frac{\bar{\omega}_R^3(\bar{q}_x^2 + \bar{q}_z^2)}{2\varepsilon_a\bar{q}_x^2 + (\varepsilon_c + \alpha\varepsilon_a)\bar{q}_z^2}, \tag{38}$$

где значения диэлектрической проницаемости ε_a и ε_c соответствуют частоте $\bar{\omega}_R$,

$$\bar{v}_{\text{gr}} = \frac{(1 - \varepsilon_a\varepsilon_c)\bar{q}_z\bar{\omega}_R^3}{2\varepsilon_a\bar{q}_x^2 + (\varepsilon_c + \alpha\varepsilon_a)\bar{q}_z^2}. \tag{39}$$

На рис. 4 приведено численное решение дисперсионного уравнения (38) для $\bar{q}_x = 0.1$, $\psi = 0$. Групповая скорость поверхностной волны в точке пересечения дисперсионных кривых $\bar{\omega} = \bar{q}_z \approx 0.22$ равна $\bar{v}_{\text{gr}} \approx -0.65$, что соответствует $v_{\text{gr}}/c \approx -0.065$. Топология приведенных на рис. 4 дисперсионных кривых, в соответствии с правилами Старрока [27], указывает на возникновение абсолютной неустойчивости с инкрементом

$$\bar{\gamma}^H = \text{Im}\,(\delta\bar{\omega}) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\bar{\omega}_R\left(\frac{\omega_{01}}{\omega_{0a}}\right)^{2/3} \times \left|(\varepsilon_c + \alpha\varepsilon_a)\cos^2(\vartheta) + 2\varepsilon_a\sin^2(\vartheta)\right|^{-1/3}. \tag{40}$$

Для вышеуказанных параметров пучка и сверхпроводника получаем $\bar{\gamma}^H \sim 5 \cdot 10^{-5}$ или $\gamma^H \approx 3 \cdot 10^{11}\,\text{s}^{-1}$. При

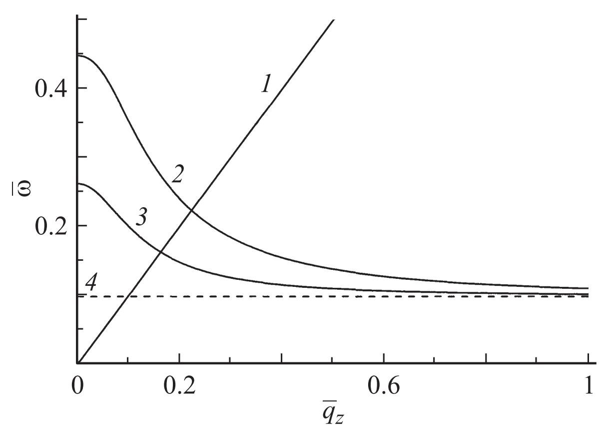

Рис. 3. Зависимость частоты $\bar{\omega}$ поверхностных волн от величины $\bar{q}_z$ при фиксированном значении $\bar{q}_x = 0.1$ для разных углов наклона слоев ψ. Диссипативные потери не учитываются ($T \ll T_c$). Расчет по формуле (33). Кривая *1* соответствует пучковой волне ($\bar{\omega} = \bar{q}_z$); *2, 3, 4* — собственным поверхностным волнам для $\psi = 0$, $\pi/6$ и $\pi/2$ соответственно.

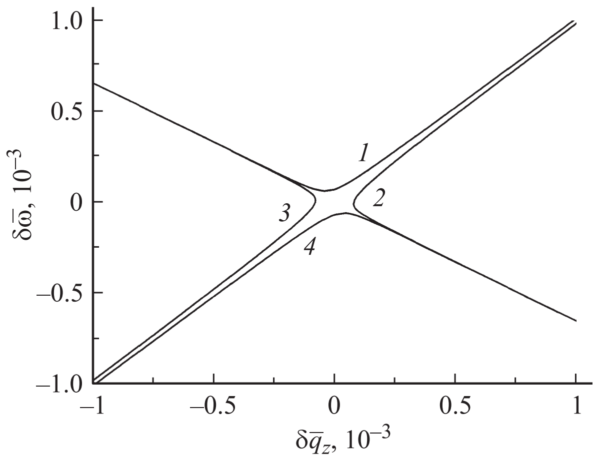

Рис. 4. Расщепление дисперсионных кривых поверхностных и пучковой волн в окрестности резонанса $\bar{\omega}_R = \bar{q}_z$. Приведенные кривые рассчитаны с помощью уравнения (38) для $\bar{q}_x = 0.1$, $\psi = 0$. Групповая скорость поверхностной волны в точке пересечения дисперсионных кривых $\bar{\omega} = \bar{q}_z \approx 0.22$ равна $\bar{v}_{\text{gr}} \approx -0.65$. Кривые *1, 2* соответствуют дисперсионным зависимостям связанных пучково-поверхностных волн в малой окрестности точки пересечения кривых *1* и *2* на рис. 3, а *3, 4* — дисперсионным зависимостям связанных пучково-поверхностных волн в окрестности резонанса в области значений $\bar{\omega} < 0$ и $\bar{q}_z < 0$.

произвольных значениях ψ инкремент определяется следующим выражением:

$$\bar{\gamma}^H = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\bar{\omega}_R\left(\frac{\omega_{01}}{\omega_{0a}}\right)^{2/3}\Big|(\varepsilon_c + \alpha\varepsilon_a)\big[\cos^2(\vartheta) + \sin^2(\vartheta)\sin^2(\psi)\big] + 2\varepsilon_a\sin^2(\vartheta)\cos^2(\psi)\Big|^{-1/3}. \tag{41}$$

Заметим, что с помощью выражения (41) можно найти характерные значения частоты слоистого сверхпроводника ω_{0a} и ω_{0c}, приняв во внимание, что $\varepsilon_{0a} = \varepsilon_{0c}$. Отметим также, что, как следует из приведенных численных оценок, $\gamma^H \gg \gamma^K$. Действительно, на гидродинамической стадии неустойчивости весь пучок находится в резонансе с соответствующей гармоникой поверхностной волны. Возбуждение колебаний пучком сопровождается „размытием" его функции распределения по скоростям. Это, в свою очередь, приводит к тому, что в резонансе с соответствующей гармоникой поверхностной волны будет находиться лишь небольшая часть электронов пучка [28].

До сих пор речь шла о сверхпроводящих слоистых структурах, таких как $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$, в которых длина когерентности куперовских пар l_{coh} порядка толщины диэлектрических слоев d_d, т.е. $l_{\text{coh}} \sim d_d$. В случае, когда значения длины электромагнитных волн в таком сверхпроводнике значительно превышают значения толщины слоев, допустимо использованное выше описание среды с помощью тензора диэлектрической проницаемости (8) [25]. Если рассматривать искусственную слоистую структуру, состоящую из чередующихся сверхпроводящих и диэлектрических слоев с толщиной $d_d \gg l_{\text{coh}}$, то для описания электродинамических свойств таких структур необходимо использовать подход, развитый в работе [29] при изучении потерь энергии заряженной частицей, проходящей через слоистый диэлектрик. Слоистая среда в этом случае описывается следующими выражениями [29]:

$$\varepsilon_c^{\text{eff}} = \frac{\varepsilon_s\varepsilon_d(d_s + d_d)}{\varepsilon_d d_s + \varepsilon_s d_d}, \quad \varepsilon_{ab}^{\text{eff}} = \frac{\varepsilon_s d_s + \varepsilon_d d_d}{d_s + d_d}, \tag{42}$$

где $\varepsilon_c^{\text{eff}}$ — эффективная диэлектрическая проницаемость кристалла в направлении его оптической оси, $\varepsilon_{ab}^{\text{eff}}$ — эффективная диэлектрическая проницаемость кристалла в плоскости его слоев, $\varepsilon_s = \varepsilon_{0s} - \omega_{0s}^2/\omega^2$ — диэлектрическая проницаемость сверхпроводящих слоев, ε_d — диэлектрическая проницаемость диэлектрика, d_s и d_d — толщина сверхпроводящих и диэлектрических слоев соответственно. Рассмотрим границу раздела сред вакуум–искусственная слоистая среда с ориентацией координатных и кристаллографических осей такой же, как и в исследованном выше случае. Если $\eta = d_s/d_d \ll 1$, то поверхностные волны на границе вакуума и искусственной слоистой среды могут существовать в следующем интервале частот:

$$0 < \omega^2 < \eta\,\frac{\omega_{0s}^2}{\varepsilon_d}\cos^2(\psi)\sin^2(\vartheta). \tag{43}$$

Заметим, что значения частоты в интервале (43) удовлетворяют условиям существования поверхностных волн (34). Из (43) следует, что в соответствии с неравенством $\eta \ll 1$, частоты поверхностных волн могут быть значительно меньше оптических и находиться, например, в миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах. Если граница раздела двух сред параллельна слоям структуры ($\psi = \pi/2$), то распространение поверхностных волн оказывается невозможным в любых направлениях в плоскости границы.

Заключение

В настоящей работе теоретически исследовано возбуждение поверхностных электростатических волн полубесконечным электронным пучком. Найдены инкременты для кинетической и гидродинамической неустойчивости. Найдены дисперсионные соотношения для собственных и связанных с пучком поверхностных волн при произвольном значении угла наклона слоев к поверхности кристалла и произвольного направления распространения волн в плоскости границы. Показано, что гидродинамическая неустойчивость имеет абсолютный характер. Этот эффект принципиально важен для создания генераторов излучения в оптическом диапазоне частот, поскольку обеспечивается обратная связь между поверхностными и пучковой волнами. Кроме того, полученные выражения для инкрементов неустойчивости позволяют найти значения характерных частот слоистого сверхпроводника. Для искусственной слоистой среды, состоящей из чередующихся сверхпроводящих и диэлектрических слоев найден частотный интервал существования поверхностных волн. Показано, что частоты таких волн могут быть значительно меньше оптических.

Список литературы

[1] Поверхностные поляритоны / Под ред. В.М. Аграновича, Д.Л. Миллса. М.: Наука, 1985. 525 с.

[2] *Дмитрук Н.Л., Литовченко В.Г., Стрижевский В.Л.* Поверхностные поляритоны в полупроводниках и диэлектриках. Киев: Наукова думка, 1989. 376 с.

[3] *Белецкий Н.Н., Светличный В.М., Халамейда Д.Д., Яковенко В.М.* Электромагнитные явления СВЧ диапазона в неоднородных полупроводниковых стуктурах. Киев: Наукова думка, 1991. 216 с.

[4] *Булгаков А.А., Мериуц А.В., Ольховский Е.А.* // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 10. С. 103–107.

[5] *Каганов М.И., Пустыльник Н.Б., Шалаева Т.И.* // УФН. 1997. Т. 167. № 2. С. 191–237.

[6] *Беспятых Ю.И., Дикштейн И.Е., Ермаков Д.И.* // Радиотехника и электроника. 2003. Т. 48. № 4. С. 449–458.

[7] *Гальперин Ю.М., Козуб В.И.* // ФТТ. 1990. Т. 32. Вып. 9. С. 2841–2843.

[8] *Штыков В.В.* // Радиотехника и электроника. 1997. Т. 42. № 10. С. 1276–1278.

[9] *Карманенко С.Ф., Семенов А.А.* // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26. Вып. 3. С. 12–17.

[10] *Семенов А.А., Карманенко С.Ф., Мелков А.А.* и др. // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 10. С. 13–19.

[11] *Savel'ev S., Rakhmanov A.L., Nori F.* // Phys. Rev. Lett. 2005. Vol. 94. N 15. P. 157 004(4).

[12] *Savel'ev S., Yampol'skii V., Rakhmanov A.L., Nori F.* // Phys. Rev. B. 2005. Vol. 72. N 14. P. 144 515(7).

[13] *Savel'ev S., Rakhmanov A.L., Yampol'skii V., Nori F.* // Nature Physics. 2006. Vol. 2. N 8. P. 521–525.

[14] *Гершензон Е.М., Гогидзе И.Г., Гольцман Г.Н.* и др. // Письма в ЖТФ. 1991. Т. 17. Вып. 22. С. 6–10.

[15] *Гогидзе И.Г., Куминов П.Б., Сергеев А.В.* // ЖТФ. 1998. Т. 68. Вып. 10. С. 63–69.

[16] *Bade T., McCafferty P.G., Rea C.* et al. // Physica C. 1996. Vol. 271. N 3, 4. P. 298–310.

[17] *Cairns G.F., Dawson P., Farnan G.A.* et al. // Physica C. 2000. Vol. 340. N 1. P. 1–15.

[18] *Sharma A.C., Vyas K.N.* // Physica C. 2001. Vol. 351. N 2. P. 145–154.

[19] *Farnan G.A., Cairns G.F., Dawson P.* et al. // Physica C. 2004. Vol. 403. N 1, 2. P. 67–85.

[20] *Shuta Yufunea, Tetsuya Kawataa, Takayuki Ishibashi* et al. // Physica C. 2006. Vol. 445–448. P. 869–872.

[21] *Helm Ch., Bulaevskii L.N.* // Phys. Rev. B. 2002. Vol. 66. N 9. P. 094 514(23).

[22] *Жирнов С.В., Семенцов Д.И.* // ФТТ. 2007. Т. 49. Вып. 5. С. 773–778.

[23] Генераторы дифракционного излучения / Под ред. В.П. Шестопалова. Киев, Наукова думка, 1991. 320 с.

[24] *Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А.* Основы электродинамики плазмы. М.: Высш. шк., 1988. 424 с.

[25] *Шмидт В.В.* Введение в физику сверхпроводников. М.: МЦНМО, 2000. 416 с.

[26] *Михайловский А.Б., Пашицкий Э.А.* // ЖЭТФ. 1965. Вып. 6. С. 1787–1795.

[27] *Sturrock P.A.* // Phys. Rev. 1958. Vol. 112. N 5. P. 1488–1503.

[28] *Файнберг Я.Б., Шапиро В.Д., Шевченко В.И.* // ЖЭТФ. 1969. Т. 57. Вып. 3(9). С. 966–977.

[29] *Файнберг Я.Б., Хижняк Н.А.* // ЖЭТФ. 1957. Т. 32. Вып. 4. С. 883–895.