

01;05

## Электроконвекция нематического жидкого кристалла в переменном электрическом поле

© А.Н. Мордвинов, Б.Л. Смородин

Пермский государственный университет,  
614990 Пермь, Россия

(Поступило в Редакцию 27 мая 2008 г.)

Исследовано возникновение электроконвекции в нематическом жидком кристалле под действием переменного электрического поля. Рассмотрение проведено на основе одномерного приближения. Предложена новая форма изменения внешнего поля, при которой существуют субгармонические колебания. Проанализировано поведение различных классов синхронных возмущений и субгармонических колебаний: изучена эволюция полей директора и объемного заряда. Найдены области параметрической неустойчивости и определены критические частоты перехода между режимами отклика. На плоскости частота–амплитуда напряжения построены карты устойчивости нематического жидкого кристалла.

PACS: 47.20.-k, 61.30.-v, 47.54.-r

### Введение

Интересным классом веществ, в которых проявляются красивые эффекты влияния электрического поля на среду, являются жидкие кристаллы. Особенностью данных сред является поле директора  $\mathbf{n}$ , указывающего направление ориентации длинных молекулярных осей [1]. Нематические жидкие кристаллы (НЖК), являясь слабопроводящими средами и обладая свойством анизотропии, во внешнем переменном электрическом поле демонстрируют возможность образования периодических пространственных структур. Это явление называется электроконвективной неустойчивостью. Для объяснения наблюдаемых эффектов нематические жидкие кристаллы должны рассматриваться как сложные системы, состоящие из двух подсистем: анизотропных молекул и носителей электрического заряда.

Изучение поведения структур НЖК во внешнем переменном электрическом поле имеет давнюю историю [1–3]. Экспериментальные и теоретические исследования образца НЖК долгое время проводились в гармоническом или ступенчатом переменном поле  $E(t)$ , обладающим следующим свойством трансляционной симметрии:

$$E(t) = -E(t + T/2), \quad (1)$$

где  $T$  — период внешнего поля.

Отклик НЖК на внешнее переменное поле при любых значениях частоты такого воздействия принадлежит к классу синхронных колебаний: период отклика совпадает с периодом внешнего воздействия. Однако поведение НЖК в области высоких и низких частот различно.

Влияние переменного электрического поля с относительно высокой частотой  $\omega$ , большей обратного времени релаксации объемного заряда, на НЖК приводит к возникновению особого типа неустойчивости. Выше порога неустойчивости в НЖК возникает модулиро-

ванная структура, связанная с неоднородной ориентацией директора. Характерной особенностью данного эффекта является зависимость порога его возникновения от частоты. В таком диэлектрическом режиме поле изменяется быстро, поэтому заряд не успевает релаксировать и не меняет знак, а распределение возмущений директора и скорости течения изменяются с частотой внешнего поля. На оптической картине образца в таком случае темные и светлые полосы меняются в пространстве местами через полпериода.

В низкочастотном (проводящем) режиме поля меняется достаточно медленно для того, чтобы заряд успевал перетекать из одной точки в другую. Объемный заряд осциллирует синфазно с внешним полем, а порог напряжения, при котором возникает модулированная структура, не зависит от частоты. На оптической картине темные и светлые полосы остаются на своих местах в течение всего воздействия на НЖК. Эти режимы неустойчивости описываются в рамках уравнений нематодинамики [1–3].

Качественно новым результатом серии работ [4–6] является обнаружение и анализ неустойчивости НЖК, принадлежащей субгармоническому отклику на внешнее воздействие. Период изменения характеристик системы при этом вдвое больше периода электрического поля. Несмотря на то что субгармонические колебания являются причиной неустойчивости во многих физических системах [7] и хорошо изучены [8], в электроконвекции НЖК подобное явление ранее не наблюдалось.

В отличие от предыдущих работ, где рассматривалось гармоническое, ступенчатое или пилообразное поле, в настоящем исследовании используется внешнее поле, форма которого изменяется на периоде по закону с трансляционной симметрией, отличной от гармонической и ступенчатой модуляции (1).

## 1. Постановка задачи, используемая модель и метод решения

Рассмотрим нематический жидкий кристалл, заполняющий плоский горизонтальный конденсатор толщиной  $d$  (рис. 1), к обкладкам которого приложено переменное электрическое поле, на периоде внешнего воздействия  $T$  изменяющееся по закону:

$$E(t) = E_m f(t) = (U/d)f(t),$$

$$f(t) = b_0 + \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right). \quad (2)$$

Здесь  $E_m$  и  $U$  — амплитуда напряженности и напряжения переменного поля,  $b_0 = E_0/E_m$  — параметр, характеризующий величину постоянной составляющей поля  $E_0$  ( $0 < b_0 < 1$ ). При  $b_0 = 0$  (рис. 2) данный сигнал является антисимметричным относительно середины периода: поле удовлетворяет условиям трансляционной симметрии  $f(T/2 + t) = -f(T/2 - t)$ .

Ось  $x$  направим вдоль пластин конденсатора, ось  $z$  — в перпендикулярном направлении. Будем считать, что в состоянии равновесия директор  $n$  (единичный вектор вдоль направления преимущественной ориентации длинных осей молекул нематика) направлен вдоль оси  $x$ .

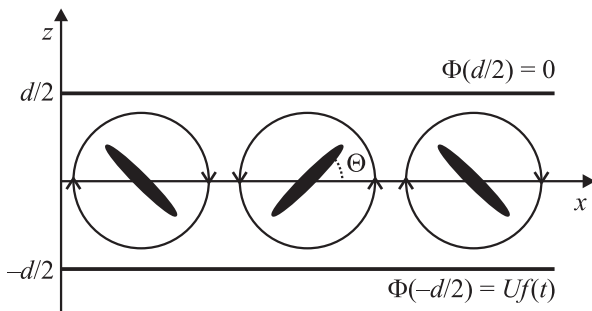


Рис. 1. Геометрия задачи: слой НЖК между обкладками конденсатора.

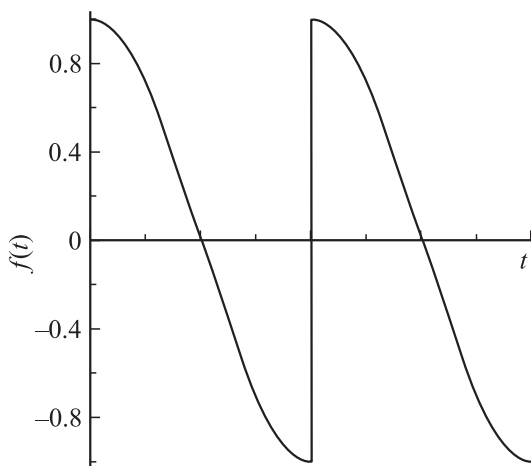


Рис. 2. Вид действующего на образец НЖК поля в случае  $b_0 = 0$ .

Для описания поведения НЖК применим традиционный подход [1]. Прежде всего, используя обозначение  $\partial_i = \partial/\partial x_i$  для пространственных производных и  $A_{ij} = (1/2)(\partial_i v_j + \partial_j v_i)$  для симметричной части градиентов скоростей, будем считать нематическую жидкость несжимаемой и запишем уравнения Навье—Стокса в виде:

$$\partial_i v_i = A_{ii} = 0,$$

$$\rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \partial_i v_j \right) = f_i + \partial_j \Sigma_{ij}. \quad (3)$$

Здесь  $\rho$  — плотность нематика,  $\Sigma_{ij}$  — тензор вязких напряжений и  $f_i$  — объемная плотность сил, действующих на НЖК.

Тензор вязких напряжений записывается через компоненты директора, симметричную  $A_{ij}$  и антисимметричную  $\omega_{ij}$  части тензора градиента скоростей [1]:

$$\Sigma_{ij} = \alpha_1 n_i n_j n_k n_m A_{km} + \alpha_2 n_i N_j + \alpha_3 n_j N_i + \alpha_4 A_{ij} + \alpha_5 n_i n_k A_{kj} + \alpha_6 n_k n_j A_{ik}, \quad (4)$$

$$N_j = \frac{dn_i}{dt} - \omega_{ij} n_j, \quad \omega_{ji} = \frac{1}{2}(\partial_j v_i - \partial_i v_j)$$

и содержит коэффициенты Лесли  $\alpha_i$ , имеющие размерность вязкости.

Используем далее выражение для объемной плотности свободной энергии  $F$  деформированного НЖК во внешнем электрическом поле

$$F = \frac{1}{2} \{ K_1 (\text{div } \mathbf{n})^2 + K_2 (\mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{n})^2 + K_3 (\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{n})^2 \} - \frac{\epsilon_a}{4\pi} (\mathbf{E}\mathbf{n})^2, \quad (5)$$

где  $K_1, K_2, K_3$  — модули упругости (константы Франка),  $\epsilon_a = \epsilon_{\parallel} - \epsilon_{\perp}$  анизотропия тензора диэлектрической проницаемости  $\epsilon_{ij} = \epsilon_{\perp} \delta_{ij} + \epsilon_a n_i n_j$ . Тогда объемная плотность сил, действующих на НЖК, запишется в виде

$$f_i = \partial_j \tilde{\Sigma}_{ij}; \quad \tilde{\Sigma}_{ij} = -P \delta_{ij} - \frac{\partial F}{\partial (\partial_j n_i)} \partial_i n_i, \quad (6)$$

где  $P$  — давление.

Уравнения движения директора  $n_i$  можно представить следующим образом [1]:

$$\gamma_1 N_i + \gamma_2 n_j A_{ji} = -\frac{\partial F}{\partial n_i} + \partial_k \frac{\partial F}{\partial (\partial_k n_i)}, \quad (7)$$

где  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  — коэффициенты вращательной вязкости нематика

$$\gamma_1 = \alpha_3 - \alpha_2, \quad \gamma_2 = \alpha_2 - \alpha_3. \quad (8)$$

Для исследования устойчивости основного состояния, представляющего собой неподвижный НЖК с планарной

ориентацией директора, относительно малых возмущений используем линеаризованные уравнения [1]. Уравнение Навье–Стокса в проекциях на оси координат примет вид

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \gamma_3 \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \gamma_4 \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \alpha_3 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t \partial x}, \quad (9)$$

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = qE(t) - \frac{\partial P}{\partial z} + \gamma_5 \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \gamma_6 \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \alpha_2 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t \partial x}, \quad (10)$$

где  $\Theta$  — угол отклонения директора от горизонтали;  $q$  — плотность объемного заряда,  $\gamma_i$  — различные линейные комбинации коэффициентов  $\alpha_i$  [1]:

$$\begin{aligned} \gamma_3 &= \alpha_1 + \alpha_5 + \frac{1}{2}(\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6), & \gamma_4 &= \frac{1}{2}(\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6), \\ \gamma_5 &= \frac{1}{2}(-\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5), & \gamma_6 &= \frac{1}{2}(-\alpha_2 + \alpha_4 - \alpha_6). \end{aligned} \quad (11)$$

Уравнение, характеризующее эволюцию директора, также записывается в терминах угла  $\Theta$

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_a}{4\pi} E(t) \left[ \Theta E(t) - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] + K_1 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} + K_3 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} \\ = \gamma_1 \frac{\partial \Theta}{\partial t} + \alpha_3 \frac{\partial v_x}{\partial z} + \alpha_2 \frac{\partial v_z}{\partial x}, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $\varphi$  — возмущения потенциала.

Для замыкания системы уравнений, описывающих неустойчивость НЖК, необходимы уравнения неразрывности и Пуассона для электрического поля:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \sigma_a E(t) \frac{\partial \Theta}{\partial x} - \sigma_{\parallel} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \sigma_{\perp} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad (13)$$

$$q = \frac{1}{4\pi} \left[ \varepsilon_a E(t) \frac{\partial \Theta}{\partial x} - \varepsilon_{\parallel} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \varepsilon_{\perp} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right]; \quad (14)$$

здесь  $\sigma_a = \sigma_{\parallel} - \sigma_{\perp}$  — анизотропия проводимости  $\sigma_{ij} = \sigma_{\perp} \delta_{ij} + \sigma_a n_i n_j$ .

В случае тонких слоев нематика (в экспериментах [4–6] толщина составляет  $d = 40–100 \mu\text{m}$ ) система уравнений (3)–(6) упрощается. В этом случае эволюцию малых возмущений равновесия можно характеризовать всего лишь двумя полями: полем директора  $\Theta$  и полем объемного заряда  $q$  [2,6]

$$\frac{dZ}{dt} = A(t)Z(t),$$

$$Z(t) = \begin{pmatrix} q(t) \\ \Theta(t) \end{pmatrix} \cos(k_z z) \exp(ik_x x),$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 E_m f(t) \\ a_3 E_m f(t) & a_4 + a_5 E_m^2 f^2(t) \end{pmatrix}, \quad (15)$$

где  $k_z = \pi/d$ . Такой вид решения обеспечивает существование периодических в направлении  $x$  структур в конденсаторе с планарной ориентацией НЖК на идеально проводящих границах.

Система уравнений (15) с заданными коэффициентами интегрировалась с помощью метода Рунге–Кутты четвертого порядка после подходящего выбора начальных условий. В соответствии с теорией Флоке [8], любое из  $K$  линейно-независимых решений уравнений (15) характеризуется мультипликаторами Флоке  $\gamma_k = \exp(\lambda_k t)$  и может быть записано в виде  $F(t) = \gamma F_0(t)$ , где  $F_0(t)$  — периодическая функция. При этом характеристические показатели  $\lambda_k = \text{Re}(\lambda_k) + i \text{Im}(\lambda_k)$  — вообще говоря, комплексные числа. Значения характеристических показателей определяют устойчивость основного состояния квазиравновесия. Если  $\lambda_k$  упорядочить так, что  $\text{Re}(\lambda_1) \geq \text{Re}(\lambda_2) \geq \dots \geq \text{Re}(\lambda_k)$ , тогда основное состояние устойчиво в случае  $\text{Re}(\lambda_1) < 0$ . Условие  $\text{Re}(\lambda_1) = 0$  определяет область периодических решений в пространстве параметров  $U, T, k$ . При этом  $\text{Im}(\lambda_1) = \omega/2$  соответствует субгармоническим возмущениям с периодом, вдвое превышающим период внешнего воздействия (получелая мода). Если  $\text{Im}(\lambda_1) = \omega$ , нейтральные возмущения изменяются синхронно с вынуждающим воздействием, их периоды совпадают (целая мода). Для пары комплексно-сопряженных собственных значений с единичным модулем имеем двухчастотные квазипериодические нейтральные возмущения.

## 2. Пороги устойчивости и временная эволюция структур

При теоретическом анализе коэффициенты  $\alpha_i$  в (7) могут быть записаны упрощенным образом, если использовать предположение об однородности возмущений в вертикальном направлении [2,3].

$$a_1 = \frac{1}{\tau} = 4\pi \frac{\sigma_{\parallel}}{\varepsilon_{\parallel}}, \quad a_2 = \sigma_H = \sigma_{\parallel} \left( \frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}} - \frac{\sigma_{\perp}}{\sigma_{\parallel}} \right),$$

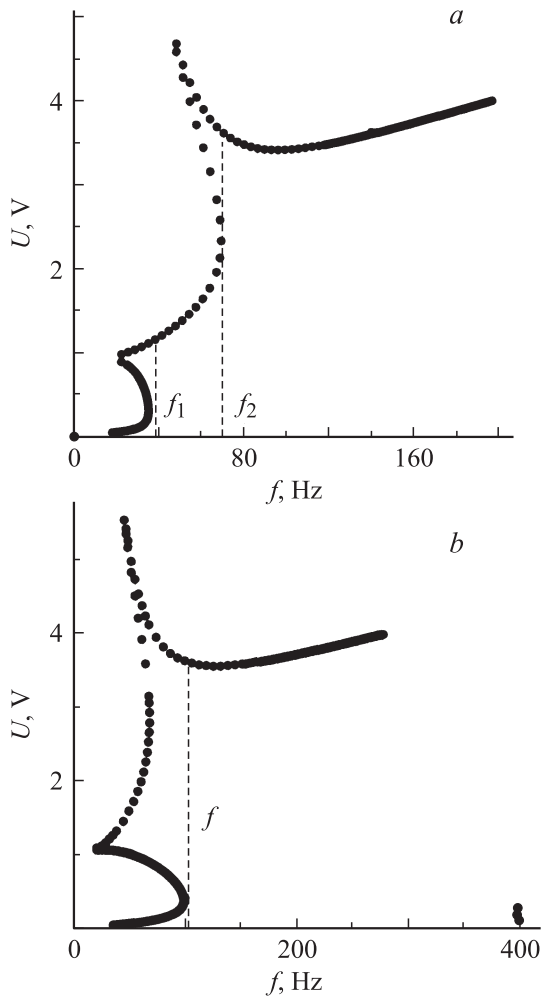
$$a_3 = \frac{1}{\eta} = \frac{1}{\eta_0} \frac{2\gamma_1}{(\gamma_1 - \gamma_2)} - \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_{\parallel}} \left( \frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\eta_0} \right),$$

$$a_4 = \left( \frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\eta_0} \right) K_3 k_x^2, \quad a_5 = \lambda,$$

$$\lambda = -\frac{\varepsilon_a}{4\pi} \frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}} \left( \frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\eta_0} \right),$$

$$\eta_0 = \frac{\gamma_1(2\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6) - \gamma_2^2}{4\gamma_1}. \quad (16)$$

Здесь  $\eta_0$  — комбинация коэффициентов вязкости НЖК [2]. При анализе устойчивости в этом подходе считается, что пространственный масштаб возникающих структур порядка толщины слоя:  $k_x \sim \pi/d$ . При этом оказывается, что пороги конвекции в различных режимах не зависят от волнового числа (критический размер электродиффузивных структур фиксирован). Это предположение позволяет после некоторой перенормировки



**Рис. 3.** Зависимость пороговой амплитуды поля от его частоты в случае: *a* —  $p = 1$ , *b* —  $0.55$ .

еще более упростить систему (15).

$$\dot{q} + q + z a f(t) \tilde{\theta} = 0;$$

$$\dot{\tilde{\theta}} + (a_0^2 + a^2 f^2(t)) \tilde{\theta} + z a f(t) q = 0;$$

$$\tilde{\theta} = (\sigma_H \eta)^{1/2} \theta; \quad t_{\text{new}} = t/\tau;$$

$$a_0^2 = -\frac{4\pi\epsilon_{\parallel}}{\epsilon_a \epsilon_{\perp}} K_3 k_x^2 \lambda \tau; \quad a^2 = E_m^2 \lambda \tau; \quad z^2 = \frac{\sigma_H \tau}{\lambda \eta}. \quad (17)$$

Здесь точка обозначает производную по времени, а переменная функция определена в (2). При численном анализе неустойчивости использовались следующие значения параметров, характеризующие реальные образцы НЖК [2–3]:

$$d = 10^{-4} \text{ cm}, \quad \epsilon_{\parallel} = 4.88, \quad \epsilon_{\perp} = 5.4, \quad \sigma_{\parallel} = 77 \text{ s}^{-1},$$

$$\sigma_{\perp} = \sigma_{\parallel}/1.5, \quad \eta_0/\gamma_1 \simeq 0.4, \quad K_3 = 10^{-6} \text{ dyn},$$

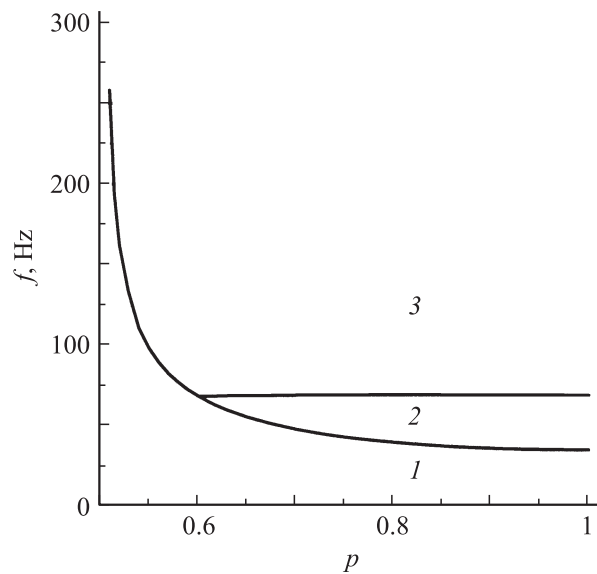
$$\tau = 5 \cdot 10^{-3} \text{ s}; \quad \left( \frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\eta_0} \right) = 4.4 \text{ p}^{-1}.$$

При этом значения коэффициентов в (17) оказываются равны  $a_0^2 = 2.2\pi^2 10^{-4}$ ;  $z^2 = 3.05$ .

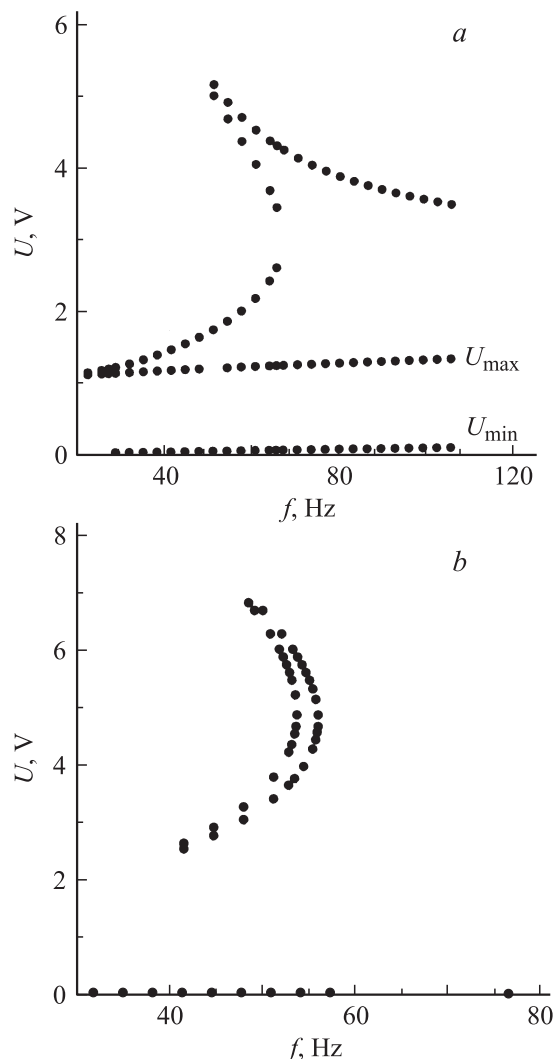
Для нарушения антисимметрии переменного воздействия относительно середины периода используем добавочную постоянную составляющую поля  $b_0$ . Степень антисимметрии внешнего поля характеризует параметр  $p = 1 - b_0$ . Таким образом, полностью антисимметричному полю (рис. 2) соответствует значение  $p = 1$ .

Обсудим возможные режимы электроконвективной неустойчивости НЖК, исследуя зависимости размерной амплитуды модуляции  $U$  от частоты  $f$  (рис. 3). Области неустойчивости расположены над кривым. В случае  $p = 1$  (при отсутствии постоянной составляющей поля) возможны синхронные и субгармонические колебания (рис. 3, *a*) и имеются две критические частоты. Первая частота  $f_1$  — граница между проводящим режимом синхронных колебаний и субгармоническим откликом, вторая  $f_2$  — граница между субгармоническим откликом и диэлектрическим синхронным режимом.

Добавление к полю постоянной составляющей приводит к увеличению области низкочастотной проводящей неустойчивости уменьшает интервал частот переменного поля  $[f_1, f_2]$ , в котором субгармонические колебания наиболее опасны. При некотором значении параметра  $p$ , меньшем некоторого критического значения  $p^*$  вместо двух граничных частот  $f_1$  и  $f_2$  остается только одна — частота перехода от проводящего к диэлектрическому режиму  $f$  (рис. 3, *b*). Отметим, что область субгармонического отклика при этом сохраняется, но данный вид возмущений не является наиболее опасным (рис. 3, *b*). Переход между проводящим и электрическим режимами, соответствующий границе возникновения электроконвекции, аналогичен поведению нематического жидкого кристалла в гармоническом поле [2,3].



**Рис. 4.** Зависимость частоты перехода между режимами отклика НЖК от значения параметра антисимметрии  $p$ : 1 — проводящий режим, 2 — субгармонический режим, 3 — диэлектрический режим.

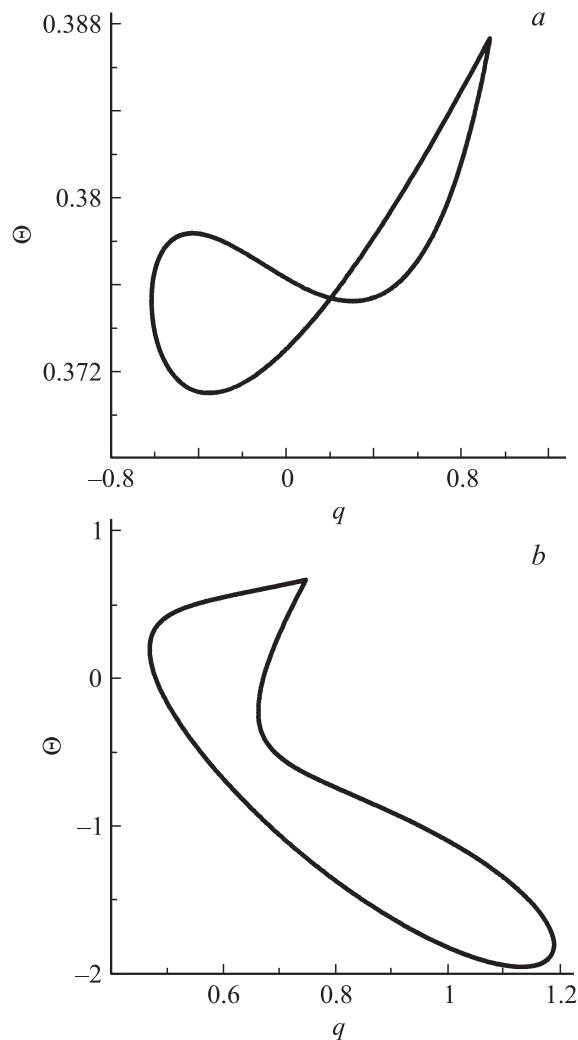


**Рис. 5.** Зависимость пороговой амплитуды поля от его частоты в случае:  $a - p = 0.5$ ,  $b - 0.25$ .

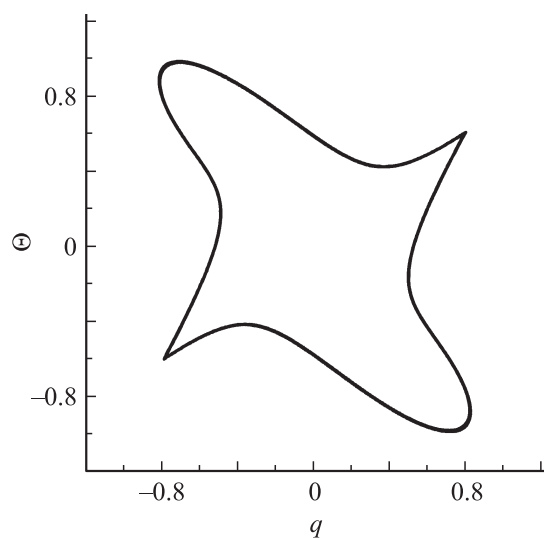
Области проводящего, диэлектрического и субгармонического режимов на плоскости параметр антисимметрии–частота, ограниченные частотами перехода  $f_1, f_2$  и  $f$ , представлены на рис. 4. Как видно из рисунка, наиболее опасные субгармонические колебания существуют при значении параметра антисимметрии  $p^* > 0.6$ .

При дальнейшем увеличении постоянной составляющей поля (уменьшении параметра  $p$ ) критическая частота  $f$ , ограничивающая область проводящего режима, увеличивается. Начиная с некоторого значения параметра  $p$  режим неустойчивости существует в полосе амплитуд напряжения ( $U_{\min} - U_{\max}$ ), простирающейся в области высоких частот ( $p = 0.5$ , рис. 5,  $a$ ). Области субгармонического и диэлектрического режимов расположены при больших значениях напряжения.

При  $p = 0.25$  (рис. 5,  $b$ ) на карте устойчивости остается небольшая область равновесия нематика в форме полумесяца: левая граница области — граница субгармонических колебаний, а правая — синхронных. Две границы синхронного отклика (одна от проводящего режима,



**Рис. 6.** Фазовые портреты нематического жидкого кристалла, рассчитанные при  $p = 1$  на границах:  $a -$  проводящего режима ( $f = 32.77$  Hz,  $U = 0.16$  V);  $b -$  диэлектрического режима ( $f = 136.1$  Hz;  $U = 3.55$  V).



**Рис. 7.** Фазовый портрет нематического жидкого кристалла, рассчитанный при  $p = 1$  на границе субгармонического режима ( $f = 63.64$  Hz;  $U = 1.78$  V).

другая от диэлектрического) соединились друг с другом, образовав правую границу области устойчивости. При дальнейшем увеличении постоянной составляющей поля области устойчивости уменьшается в размерах, а затем и вовсе исчезает.

Фазовые портреты (зависимости амплитуды угла отклонения директора от амплитуды плотности заряда) на границах синхронных режимов представлены на рис. 6 (рис. 6, *a* — для проводящего режима и рис. 6, *b* — для диэлектрического). Отметим, что для режимов синхронных колебаний поля заряда и директора колеблются с частотой внешнего поля.

Фазовый портрет на границе субгармонического режима представлен на рис. 7. Амплитуды полей директора и плотности заряда колеблются с частотой, вдвое большей частоты внешнего поля.

## Заключение

На основе одномерной модели электроконвекции исследована устойчивость НЖК в переменном поле горизонтального конденсатора. Предложен новый способ воздействия на жидкий кристалл, обеспечивающий появление области неустойчивости, связанной с субгармоническим откликом на внешнее воздействие. Найдены границы электроконвективной неустойчивости, соответствующие различным режимам поведения НЖК: диэлектрическому, проводящему, субгармоническому. Показано, что уменьшение параметра антисимметрии электрического поля приводит к изменению свойств системы: субгармонический отклик исчезает.

Исследования выполнены при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-96046) и гранта CRDF (PE-009-0).

## Список литературы

- [1] Пикун С.А. Структурные превращения в жидких кристаллах. М.: Наука, 1981. 336 с.
- [2] Dubois-Violette E., De Gennes P.G., Parodi O. // J. Phys. (France). 1971. Vol. 32. P. 305.
- [3] Dubois-Violette E. // J. Phys. (France). 1972. Vol. 33. P. 95.
- [4] John T., Stannarius R. // Phys. Rev. E. 2004. Vol. 70. P. 025 202(R).
- [5] John T., Stannarius R., Heuer J. // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 71. P. 056 307.
- [6] John T., Stannarius R., Heuer J. // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 72. P. 066 218.
- [7] Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
- [8] Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958. 474 с.