01;03

О модификации теории пограничного слоя для расчета волнового движения на поверхности слоя вязкой жидкости конечной толщины на твердом дне

© А.И. Григорьев, Д.М. Пожарицкий, С.О. Ширяева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
15000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 9 апреля 2008 г.)

Предложена модификация теории пограничного слоя вблизи свободной поверхности бесконечно глубокой вязкой жидкости, связанного с ее периодическим движением, для расчета волнового движения конечной амплитуды на заряженной поверхности слоя вязкой электропроводной жидкости конечной толщины на твердом дне, когда толщина слоя сравнима с длиной волны. Для адекватного описания течения вязкой жидкости в обсуждаемой системе вводятся два пограничных слоя: один у свободной поверхности жидкости, другой — у твердого дна. Получены оценки на значения толщины пограничных слоев, при которых в асимптоте малой вязкости различие между точным решением и решением модельной задачи (сформулированной в рамках предложенной теории) может быть задано с заранее оговоренной точностью. Показано, что учет пограничного слоя вблизи твердого дна актуален (с относительной погрешностью расчета, не превышающей одной тысячной) только для слоев вязкой жидкости с толщиной, не превышающей двух длин волн. Для более толстых слоев движение жидкости возле дна можно считать потенциальным. В тонких слоях с толщиной порядка двух десятых от длины волны и меньше приповерхностный и придонный пограничные слои перекрываются, а вихревое движение заполняет весь объем жидкости. При приближении поверхностного заряда к величине, критической для начала реализации неустойчивости по отношению к отрицательному давлению электрического поля, толщина обоих пограничных слоев резко увеличивается.

PACS: 47.15.Cb, 47.35.Pq

Введение

В работе [1] качественные представления, развитые в середине прошлого столетия Лонгет-Хиггенсом [2] о пограничном слое в окрестности свободной поверхности бесконечно глубокой вязкой несжимаемой жидкости, совершающей периодические движения модифицированы на основе строгого аналитического исследования для проведения корректных расчетов с контролируемой точностью. В частности, в [1] показано, что для обеспечения разумной (порядка единиц процентов) точности приближенных расчетов в рамках теории пограничного слоя толщины δ_L последнего, введенную Лонгет-Хиггинсом [2]: $\delta_L \equiv \sqrt{2\nu/\omega}$, где ν — коэффициент кинематической вязкости жидкости, а ω — частота волны, необходимо увеличить в примерно четыре раза. Уже общефизические соображения указывают на то, что теория пограничного слоя, развитая для бесконечно глубокой жидкости [1], не может быть без изменений применена к расчету волновых движений в слое вязкой жидкости с толщиной порядка длины волны (либо меньше), поскольку в слоях жидкости указанной величины значительный вклад в затухание волнового движения и генерацию вихревой компоненты поля скоростей течения жидкости, связанного с волной, играет твердое дно [3–6], на котором полная скорость течения обращается в нуль.

Настоящая работа посвящена развитию теории пограничного слоя для расчета течений, связанных с периодическим волновым движением в заряженном слое вязкой электропроводности жидкости в ситуации, когда толщина слоя сравнима с длиной волны.

1. Формулировка задачи и точное решение

Рассмотрим задачу о расчете капиллярно-гравитационных волн на граничащей с вакуумом плоской заряженной поверхности идеально проводящей жидкости конечной глубины d с плотностью ρ, вязкостью ν, коэффициентом поверхностного натяжения γ в поле сил тяжести g и в электростатическом поле E_0, направленном в сторону, противоположную направлению ускорения поля силы тяжести.

Рассмотрим декартову систему координат так, чтобы ось z была направлена вертикально вверх $\mathbf{n}_z \| -\mathbf{g}$ ($\mathbf{n}_z$ — орт оси z), а ось x — по направлению движения плоской капиллярной волны $\sim \exp(st - ikx)$. Примем также, что плоскость $z = 0$ совпадает с невозмущенной свободной поверхностью жидкости (s — комплексная частота, k — волновое число, t — время, i — мнимая единица). Пусть функция $\xi(x,t) = \xi_0 \exp(st - ikx)$ описывает малую виртуальную деформацию плоской равновесной поверхности жидкости, а $\mathbf{U}(\mathbf{r},t)$ — поле скоростей движения жидкости, вызванного возмущением $\xi(x,t)$, имеющее в безразмерных переменных, в которых $\rho = g = \gamma = 1$, тот же порядок малости, что и $\xi(x,t)$. Амплитуду волны ξ_0 будем принимать много меньшей ее длины и капиллярной постоянной жидкости: $a \equiv \sqrt{\gamma/\rho g}$.

Система уравнений электрогидродинамики вязкой жидкости, описывающая движение жидкости в анализируемой системе, имеет вид

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = -\nabla P(\mathbf{r},t) + \nu\Delta\mathbf{U} - \nabla z; \quad \nabla\cdot\mathbf{U} = 0; \quad \Delta\Phi = 0;$$

$$z = \xi: \quad \Phi = \mathrm{const}; \quad \frac{dF}{dt} = 0, \quad F(x,z,t) \equiv z - \xi(x,t),$$

$$\mathbf{n}\cdot(\boldsymbol{\tau}\cdot\nabla)\mathbf{U} + \boldsymbol{\tau}\cdot(\mathbf{n}\cdot\nabla)\mathbf{U} = 0,$$

$$-P(\mathbf{r},t) + 2\nu\mathbf{n}\cdot(\mathbf{n}\cdot\nabla)\mathbf{U} - P_E(\mathbf{r},t) + P_\gamma(\mathbf{r},t) = 0.$$

$$z = -d: \qquad \mathbf{U} = 0; \quad z\to\infty: \quad -\nabla\Phi \to E_0\mathbf{e}_z.$$

$$t = 0: \qquad \xi(x,t) = \xi_0\exp(ikx).$$

В выписанных выражениях τ и n — орты касательной и нормали к свободной поверхности жидкости: $P(\mathbf{r},t)$ и $\Phi(\mathbf{r},t) \equiv \Phi_0(z) + \phi(\mathbf{r},t)$ — поля гидродинамического давления в жидкости и электростатического (в предположении, что гидродинамические скорости много меньше скорости распространения электромагнитного сигнала) потенциала вне жидкости соответственно, $P_E(\mathbf{r},t)$ и $P_\gamma(\mathbf{r},t)$ — давление электрического поля и сил поверхностного натяжения на свободную поверхность жидкости.

Полагая безразмерную амплитуду волны много меньшей единицы, линеаризуем по ней задачу, и, перенеся граничные условия на свободной поверхности $F(x,z,t) = 0$ на невозмущенную поверхность жидкости $z = 0$, получим

$$\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t} = -\nabla P + \nu\Delta\mathbf{U} - \nabla z; \quad \nabla\cdot\mathbf{U} = 0; \quad \Delta\phi = 0;$$

$$z = 0: \quad -\frac{\partial\xi}{\partial t} + U_z = 0; \quad \frac{\partial U_z}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial z} = 0; \quad \phi = -\frac{\partial\Phi_0}{\partial z}\xi;$$

$$-p(\xi) + 2\nu\frac{\partial U_z}{\partial z} - p_E(\xi) + p_\gamma(\xi) = 0;$$

$$z = -d: \qquad \mathbf{U} = 0;$$

$$z\to\infty: \qquad \nabla\Phi \to -E_0\mathbf{e}_z;$$

$$t = 0: \qquad \xi(x,t) = \xi_0\exp(ikx). \tag{1}$$

Здесь $p(\xi)$,

$$p_E(\xi) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$$

и $p_\gamma(\xi) = -(\partial^2\xi/\partial x^2)$ — линейные по ξ поправки к гидродинамическому давлению, давлению электрического поля и давлению капиллярных сил, вызванные волновым движением поверхности $\xi(x,t)$; $\phi(\mathbf{r},t)$ — вызванная волновым движением свободной поверхности $\xi(x,t)$ линейная по ξ поправка к потенциалу электростатического поля над невозмущенной свободной поверхностью жидкости $\Phi_0(z) \equiv -E_0 z$.

Не останавливаясь на процедуре решения сформулированной задачи, подробно описанной в [3] вплоть до вывода дисперсионного уравнения, приведем готовое решение, удовлетворяющее начальному условию (1):

$$\xi(x,t) = \xi_0\exp(st - ikx) + k.c.;$$

$$\varphi(x,z,t) = \xi_0\big(B_1\,\mathrm{sh}(kz) + B_2\,\mathrm{ch}(kz)\big)\exp(st - ikx) + k.c.;$$

$$B_1 = (s + 2\nu k^2)/k;$$

$$B_2 = \frac{\big((s+2\nu k^2)\big(k\,\mathrm{sh}(kd)\,\mathrm{sh}(qd) - q\,\mathrm{ch}(kd)\,\mathrm{ch}(qd)\big) + 2\nu k^2 q\big)}{k\big(k\,\mathrm{ch}(kd)\,\mathrm{sh}(qd) - q\,\mathrm{sh}(kd)\,\mathrm{ch}(qd)\big)};$$

$$\psi(x,z,t) = \xi_0\big(B_3\,\mathrm{sh}(qz) + B_4\,\mathrm{ch}(qz)\big)\exp(st - ikx) + k.c.;$$

$$B_3 = i\,\frac{\big((s+2\nu k^2) - 2\nu k\big(k\,\mathrm{ch}(kd)\,\mathrm{ch}(qd) - q\,\mathrm{sh}(kd)\,\mathrm{sh}(qd)\big)\big)}{\big(k\,\mathrm{ch}(kd)\,\mathrm{sh}(qd) - q\,\mathrm{sh}(kd)\,\mathrm{ch}(qd)\big)};$$

$$B_4 = -2i\nu k;$$

$$\phi(x,z,t) = \xi_0 E_0\exp(-kz)\cos(st - ikx) + k.c. \tag{2}$$

Здесь $\varphi(x,z,t)$ — потенциал поля скоростей, а $\psi(x,z,t)$ — функция тока, аббревиатура „$k.c.$“ означает „слагаемые, комплексно сопряженные к выписанным“.

Выпишем теперь компоненты вектора $\mathbf{U}(\mathbf{r},t)$ — поля скоростей течения жидкости, связанного с волной:

$$U_x(\mathbf{r},t) = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial z}$$

$$= -\xi_0 i\Big\{kB_1\big(\mathrm{sh}(kz) + \mathrm{sh}(kd)\,\mathrm{ch}[q(z+d)]\big)$$

$$+ kB_2\big(\mathrm{ch}(kz) - \mathrm{ch}(kd)\,\mathrm{ch}[q(z+d)]\big) + q[B_2\,\mathrm{sh}(kd)$$

$$- B_1\,\mathrm{ch}(kd)]\,\mathrm{sh}[q(z+d)]\Big\}\exp(st - ikx) + k.c.; \tag{3}$$

$$U_z(\mathbf{r},t) = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial x}$$

$$= \xi_0 k q^{-1}\Big\{qB_1\big(\mathrm{ch}(kz) - \mathrm{ch}(kd)\,\mathrm{ch}[q(z+d)]\big)$$

$$+ qB_2\big(\mathrm{sh}(kz) + \mathrm{sh}(kd)\,\mathrm{ch}[q(z+d)]\big) - k[B_2\,\mathrm{ch}(kd)$$

$$- B_1\,\mathrm{sh}(kd)]\,\mathrm{sh}[q(z+d)]\Big\}\exp(st - ikx) + k.c. \tag{4}$$

В выписанных решениях $q \equiv \sqrt{k^2 + (s/\nu)}$ является решением дисперсионного уравнения

$$4qk^2(k^2+q^2) + (k^2+q^2)^2\big(k\,\mathrm{sh}(kd)\,\mathrm{sh}(qd)$$

$$- q\,\mathrm{ch}(kd)\,\mathrm{ch}(qd)\big) + 4qk^3\big(q\,\mathrm{sh}(kd)\,\mathrm{sh}(qd)$$

$$- k\,\mathrm{ch}(kd)\,\mathrm{ch}(qd)\big) - \omega_0^2(k)\nu^{-2}\big(q\,\mathrm{sh}(kd)\,\mathrm{ch}(qd)$$

$$- k\,\mathrm{ch}(kd)\,\mathrm{sh}(qd)\big) = 0;$$

$$\omega_0^2(k) \equiv k(k^2 - Wk + 1), \qquad W \equiv E_0^3/4\pi.$$

Параметр ω_0^2 имеет смысл квадрата частоты капиллярно-гравитационных волн в идеальной несжимаемой однородно поверхностно заряженной электропроводной бесконечно глубокой жидкости [1,7,8]. Безразмерный параметр W, называемый параметром Тонкса–Френкеля, характеризует устойчивость плоской равновесной в поле сил тяжести и поле капиллярных сил неоднородно заряженной свободной поверхности электропроводной жидкости по отношению к отрицательному давлению электрического поля [7,8]. Критические условия реализации неустойчивости имеют вид: $W = k + k^{-1}$, $k = 1$ и не зависят от вязкости жидкости [7,8].

Когда заряд на свободной поверхности жидкости настолько велик, что $W = 2$, то волна с $k = 1$ претерпевает неустойчивость, и на поверхности жидкости появляются эмиссионные выступы, называемые конусами Тейлора, с вершин которых начинается сброс избыточного заряда путем эмиссии высокодисперсных сильно заряженных струй жидкости и капелек [8,9]. Таким образом, поверхностная плотность заряда, при которой $W = 2$, является максимально возможной.

При $\nu \ll 1$, когда $q \gg k$, дисперсионное уравнение в линейном приближении по безразмерной вязкости ν может быть переписано в существенно более простом виде относительно комплексной частоты s:

$$s^2 + 4\nu k^2 s + \omega_0^2(k)\mathrm{th}(kd) = 0, \tag{5}$$

а его решения в том же приближении легко выписываются

$$s^{(1,2)} = \eta \pm i\omega \equiv -2\nu k^2 \pm \sqrt{(2\nu k^2)^2 - \omega_0^2(k)\mathrm{th}(kd)}; \tag{6}$$

здесь ω — частота капиллярно-гравитационной волны в заряженном слое вязкой электропроводной жидкости конечной толщины.

Видно, что при $z = -d$ обе компоненты поля скоростей обращаются в нуль, как и должно быть для вязкой жидкости. При предельном переходе $d \to -\infty$ выражения для потенциала поля скоростей, функции тока и компонент поля скоростей превращаются в соответствующие решения для бесконечно глубокой вязкости жидкости с однородно заряженной свободной поверхностью [1].

Имея в виду исследование вихревой компоненты поля скоростей, связанного с волновым движением в слое вязкой жидкости конечной толщины, выпишем выражения для ротора поля скоростей:

$$\begin{aligned}\Omega\mathbf{n}_y \equiv \mathrm{rot}\mathbf{U} = \Big\{&-\xi_0 is(\nu q)^{-1}\big(q(B_1\,\mathrm{ch}(kd)\\ &- B_2\,\mathrm{sh}(kd)\big)\,\mathrm{ch}[q(z+d)] + k\big(B_2\,\mathrm{ch}(kd)\\ &- B_1\,\mathrm{sh}(kd)\big)\,\mathrm{sh}[q(z+d)]\big)\exp(st-ikx) + k.c.\Big\}\mathbf{n}_y. \end{aligned} \tag{7}$$

Несложно видеть, что вихри, связанные с волновым движением, в анализируемой ситуации являются плоскими и реализуются в плоскости XOZ.

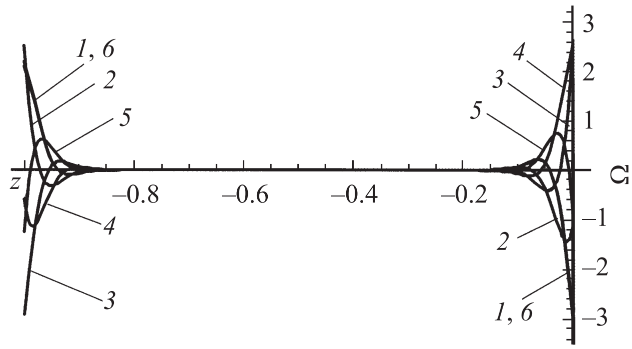

Рис. 1. Зависимости от безразмерной глубины амплитудных значений безразмерного ротора поля скоростей течения жидкости, рассчитанные при $\nu = 0.002$, $k = 3$, $W = 0$, $d = 1$ в различные моменты безразмерного времени, измеренного в долях периода волны: *1* — $t = 0$; *2* — $T/5$; *3* — $2T/5$; *4* — $3T/5$; *5* — $4T/5$; *4* — T.

На рис. 1 приведены рассчитанные по (7) в различные моменты времени при малой вязкости жидкости зависимости $\Omega \equiv \Omega(x)$. Из рис. 1 видно, что вихревое движение сконцентрировано в малой окрестности свободной поверхности жидкости, по которой бежит волна, и в малой окрестности твердого дна, на котором обе компоненты поля скоростей обращаются в нуль. Указанное обстоятельство означает, что попытки использования для расчета характеристик волнового движения в вязкой жидкости приближенного метода расчета, называемого теорией пограничного слоя, должны учитывать наличие двух пограничных слоев — приповерхностного и придонного — и это должно быть учтено при формулировке модельной задачи.

2. Модельная задача

Сформулируем модельную задачу, которой будем аппроксимировать точное решение (1) и которая получается из задачи (1) на основании представлений о погранслойном строении поля скоростей течения жидкости в слое вязкой жидкости конечной толщины. Для достижения этой цели будем исходить из предположения, что вихревая часть модельного течения сосредоточена в приповерхностном пограничном слое толщиной δ_1 и в придонном пограничном слое толщиной δ_2 (см. рис. 1), а потенциальная составляющая поля скоростей течения жидкости охватывает весь ее объем. В соответствии с этим потенциальное течение во всем объеме слоя жидкости и вихревые течения в приповерхностном и придонном слоях будем рассчитывать отдельно, а граничным условиям на свободной поверхности и на дне будут удовлетворять соответствующие комбинации потенциальной и вихревой компонент поля скоростей.

2a. Приповерхностный пограничный слой: $-\delta_1 \leq z \leq 0$

Будем полагать, что в указанной области поле скоростей течения жидкости $\mathbf{U}^{(1)}(\mathbf{r}, t)$ состоит из вихревой и потенциальной составляющих. Толщину слоя δ_1 будем оценивать по аналогии с тем, как это делалось в [1] с точностью до постоянного множителя G в виде

$$\delta_1 \equiv G\delta_L; \qquad \delta_L \equiv \sqrt{2\nu/\omega}; \tag{8}$$

$$\omega \equiv \sqrt{-\left((2\nu k^2)^2 - \omega_0^2(k)\mathrm{th}(kd)\right)};$$

$$\omega_0^2(k)\mathrm{th}(kd) > (2\nu k^2)^2.$$

Поле скоростей течения жидкости в приповерхностном слое $\mathbf{U}^{(1)}(\mathbf{r}, t)$ будем искать с использованием процедуры скаляризации исходной векторной задачи на основе теоремы Гельмгольца, вводя потенциал поля скоростей $\varphi(\mathbf{r}, t)$ и функцию тока $\psi^{(1)}(\mathbf{r}, t)$ [4]:

$$\mathbf{U}^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{N}}_1\varphi(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{N}}_2\psi^{(1)}(\mathbf{r}, t),$$

$$\hat{\mathbf{N}}_1 \equiv \boldsymbol{\nabla}, \quad \hat{\mathbf{N}}_2 \equiv \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{n}_y,$$

где $\mathbf{n}_y$ — орт декартовой координаты y; $\hat{\mathbf{N}}_1$ и $\hat{\mathbf{N}}_2$ — векторные дифференциальные операторы, удовлетворяющие соотношениям ортогональности и условиям коммутативности с оператором Лапласа. Эрмитовый оператор $\hat{\mathbf{N}}_1$ выделяет потенциальную часть поля скоростей, а антиэрмитовый $\hat{\mathbf{N}}_2$ — вихревую.

На основе уравнений гидродинамики вязкой жидкости, приняв собственные значения операторов $\hat{\mathbf{N}}_1^+ \cdot \hat{\mathbf{N}}_2$ и $\hat{\mathbf{N}}_2^+ \cdot \hat{\mathbf{N}}_1$ (верхний индекс „+“ означает эрмитовое сопряжение) отличными от нуля, несложно вывести скалярное уравнение для отыскания функции тока [1,2,4]

$$-\delta_1 \leq z \leq 0: \qquad \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial t} - \nu\Delta\psi^{(1)} = 0.$$

Учитывая, что в соответствии с вышесказанным ротор скорости должен обращаться в нуль на нижней границе слоя, получим граничное условие для функции тока на нижней границе слоя

$$z = -\delta_1: \qquad \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial t} = 0.$$

2b. Придонный пограничный слой: $-d \leq z \leq -d + \delta_2$

В указанной области идеология введения пограничного слоя несколько отлична. Пограничный слой, связанный с периодической волной, бегущей по свободной поверхности вязкой жидкости, порождается периодическим движением поверхности жидкости и обусловлен пространственной скоростью затухания вихревой части движения с глубиной. По предположению, вихревое движение жидкости, порождаемое волной, затухает на глубине $z = -\delta_1$. Причина возникновения вихревого движения возле твердого дна, когда над ним возникает течение вязкой жидкости с изменяющейся во времени амплитудой, порождаемое волной на поверхности жидкости, заключается в прилипании жидкости ко дну (обращение на дне в нуль полной скорости течения) и генерации вихревого течения с интенсивностью, экспоненциально убывающей с расстоянием по мере удаления от дна [5]. Ситуация, складывающаяся в этом случае, аналогична обтеканию постоянным потоком жидкости твердого тела конечных размеров, совершающего колебания возле некоторого положения равновесия (см. [5], параграф 24). Поэтому толщину пограничного слоя в окрестности дна δ_2 будем оценивать по обычной формуле теории пограничного слоя [5,6], но введем неопределенный численный множитель H, значение которого установим, добиваясь заданной точности аппроксимации точного решения приближенным:

$$\delta_2 \equiv H(l/\sqrt{\mathrm{Re}}\,) \equiv H(l/\sqrt{Vl/\nu}\,) \equiv H\sqrt{l \cdot \nu/V}.$$

Здесь в качестве характерного линейного размера l примем длину волны λ, а в качестве скорости потока V возьмем фазовую скорость волны: $(\omega/k) \equiv (\omega\lambda/2\pi)$. Окончательно для оценки толщины пограничного слоя возле дна получим

$$\delta_2 \equiv H\sqrt{2\pi\nu/\omega}. \tag{9}$$

Поле скоростей течения жидкости в придонном слое $\mathbf{U}^{(2)}(\mathbf{r}, t)$ будем искать так же, как это делалось для приповерхностного слоя, вводя потенциал поля скоростей $\varphi(\mathbf{r}, t)$ и функцию тока $\psi^{(2)}(\mathbf{r}, t)$:

$$\mathbf{U}^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{N}}_1\varphi(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{N}}_2\psi^{(2)}(\mathbf{r}, t).$$

В итоге для отыскания функции тока $\psi^{(2)}(\mathbf{r}, t)$ получим скалярное уравнение

$$-d \leq z \leq -d + \delta_2: \qquad \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial t} - \nu\Delta\psi^{(2)} = 0$$

с граничным условием на верхней границе придонного слоя, где ротор поля скоростей обращается в нуль

$$z = -d + \delta_2: \qquad \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial t} = 0;$$

и граничными условиями на дне

$$z = -d: \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial x} = 0,$$

соответствующими обращению в нуль проекций поля скоростей $U_x(\mathbf{r}, t)$ и $U_z(\mathbf{r}, t)$.

2c. Потенциальная составляющая поля скоростей

Во всей исследуемой области $-d \leq z \leq 0$ справедливы уравнения для потенциальной составляющей поля скоростей

$$-d \leq z \leq 0: \qquad \Delta\varphi = 0, \quad P(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - z.$$

Соберем теперь выписанные уравнения для отыскания функций $\varphi(\mathbf{r},t)$, $\psi^{(1)}(\mathbf{r},t)$, $\psi^{(2)}(\mathbf{r},t)$ с соответствующими граничными условиями и дополним их гидродинамическими граничными условиями на свободной поверхности жидкости и электростатической (в предположении, что гидродинамические скорости много меньше скорости передачи электромагнитных волн) задачей для отыскания электростатического поля в пространстве над жидкостью.

2d. Общая математическая формулировка модельной задачи

Выпишем всю задачу

$$z>0: \qquad \Delta\phi = 0;$$

$$-d \le z \le 0: \qquad \Delta\varphi = 0;$$

$$-\delta_1 \le z \le 0: \qquad \frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial t} - \nu\Delta\psi^{(1)} = 0;$$

$$-\delta \le z \le -d+\delta_2: \qquad \frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial t} - \nu\Delta\psi^{(2)} = 0;$$

$$z = -\delta_1: \qquad \frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial t} = 0;$$

$$z = -d+\delta_2: \qquad \frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial t} = 0;$$

$$z = -d: \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial x} = 0;$$

$$z = 0: \ \frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial x}, \ 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2\psi^{(1)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi^{(1)}}{\partial z^2} = 0;$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \xi + 2\nu\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\psi^{(1)}}{\partial x\partial z}\right) - p_E(\xi) + p_\gamma(\xi) = 0;$$

$$\phi = -\frac{\partial\Phi_0}{\partial z}\xi;$$

$$z\to\infty: \qquad \nabla\Phi \to -E_0\mathbf{e}_z.$$

2e. Решение модельной задачи

Ограниченные периодические по x решения будем искать в декартовой системе координат в виде

$$\xi(x,t) = a\exp(st - ikx);$$

$$\varphi(\mathbf{r},t) = \big(B_1\operatorname{sh}(kz) + B_2\operatorname{ch}(kz)\big)\exp(st-ikx);$$

$$\psi^{(1)}(\mathbf{r},t) = \big(B_3\operatorname{sh}(qz) + B_4\operatorname{ch}(qz)\big)\exp(st-ikx);$$

$$\psi^{(2)}(\mathbf{r},t) = \big(B_5\operatorname{sh}(qz) + B_6\operatorname{ch}(qz)\big)\exp(st-ikx);$$

$$\phi(\mathbf{r},t) = aE_0\exp(-kz)\exp(st-ikx), \tag{10}$$

где $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, s$ — комплексные величины.

Так как ротор скорости обращается в нуль на соответствующих границах слоев, то выражения для $\psi^{(1)}(\mathbf{r},t)$ и $\psi^{(2)}(\mathbf{r},t)$ в (10) преобразуются

$$-\delta_1 \le z \le 0: \qquad \psi^{(1)}(\mathbf{r},t)B_3\operatorname{ch}^{-1}(q\delta_1) \times \operatorname{sh}[q(z+\delta_1)]\exp(st-ikx);$$

$$d \le -z \le d-\delta_2: \quad \psi^{(2)}(\mathbf{r},t)B_5\big(\operatorname{sh}(qz) - \operatorname{ch}(qz) \times \operatorname{th}[q(-d+\delta_2)]\big)\exp(st-ikx).$$

Воспользуемся теперь условиями на дне и сократим количество неизвестных констант:

$$B_1 = \frac{iB_5\big(q\operatorname{ch}(q\delta_2)\operatorname{sh}(kd) - k\operatorname{ch}(kd)\operatorname{sh}(q\delta_2)\big)}{k\operatorname{ch}[q(d-\delta_2)]};$$

$$B_2 = \frac{iB_5\big(q\operatorname{ch}(q\delta_2)\operatorname{ch}(kd) - k\operatorname{sh}(kd)\operatorname{sh}(q\delta_2)\big)}{k\operatorname{ch}[q(d-\delta_2)]}.$$

Подставив (10) в граничные условия на свободной поверхности, получим однородную систему линейных уравнений относительно неизвестных B_3, B_5, a:

$$ik\operatorname{th}(q\delta_1)B_3 + i\operatorname{ch}^{-1}[q(d-\delta_2)] \times \big(k\operatorname{sh}(q\delta_2)\operatorname{ch}(kd) - q\operatorname{ch}(q\delta_2)\operatorname{sh}(kd)\big)B_5 + sa = 0;$$

$$i(k^2+q^2)\operatorname{th}(q\delta_1)B_3 - 2k\operatorname{ch}^{-1}[q(d-\delta_2)] \times \big(q\operatorname{ch}(q\delta_2)\operatorname{sh}(kd) - k\operatorname{sh}(q\delta_2)\operatorname{ch}(kd)\big)B_5 = 0;$$

$$-2ik^2q\nu B_3 + i(s+2\nu k^2)\operatorname{ch}^{-1}[q(d-\delta_2)] \times \big(q\operatorname{ch}(q\delta_2)\operatorname{ch}(kd) - k\operatorname{sh}(q\delta_2)\operatorname{sh}(kd)\big)B_5 + \omega_0^2(k)a = 0.$$

Данная система имеет нетривиальное решение тогда, и только тогда, когда ее определитель равен нулю. Это условие дает дисперсионное уравнение для спектра капиллярных движений жидкости в анализируемой системе, имеющее вид:

$$\big(\omega_0^2(k)\nu^{-2}\operatorname{th}(q\delta_1) - 4k^3q\big)\big(q\operatorname{ch}(q\delta_2)\operatorname{sh}(kd) - k\operatorname{sh}(q\delta_2)\operatorname{ch}(kd)\big) + (k^2+q^2)^2\big(q\operatorname{ch}(q\delta_2)\operatorname{ch}(kd) - k\operatorname{sh}(q\delta_2)\operatorname{sh}(kd)\big)\operatorname{th}(q\delta_1) = 0.$$

В приближении малой вязкости $\nu \ll 1$ из него получается выражение (5).

В результате решение задачи для искомых величин при заданном начальном условии имеет вид:

$$\xi(x,t) = \xi_0\exp(st-ikx) + k.c.,$$

$$\varphi(\mathbf{r},t) = \big(B_1\operatorname{sh}(kz) + B_2\operatorname{ch}(kz)\big)\exp(st-ikx) + k.c.,$$

$$B_1 = (s+2\nu k^2)/k;$$

$$B_2 = \frac{(s+2\nu k^2)\big(k\operatorname{sh}(dk)\operatorname{sh}(q\delta_2) - q\operatorname{ch}(dk)\operatorname{ch}(q\delta_2)\big)}{k\big(k\operatorname{sh}(q\delta_2)\operatorname{ch}(dk) - q\operatorname{ch}(q\delta_2)\operatorname{sh}(dk)\big)};$$

$$\psi^{(1)}(\mathbf{r},t) = \xi_0B_3\operatorname{ch}^{-1}(q\delta_1)\operatorname{sh}[q(z+\delta_1)] \times \exp(st-ikx) + k.c., \quad B_3 = -2i\nu k\operatorname{cth}(q\delta)_1;$$

$$\psi^{(2)}(\mathbf{r},t) = \xi_0B_5\big(\operatorname{sh}(qz) - \operatorname{ch}(qz)\operatorname{th}[q(-d+\delta_2)]\big) \times \exp(st-ikx) + k.c.,$$

$$B_5 = \frac{i(s+2\nu k^2)\operatorname{ch}[q(d-\delta_2)]}{\big(k\operatorname{sh}(q\delta_2)\operatorname{ch}(kd) - q\operatorname{ch}(q\delta_2)\operatorname{sh}(kd)\big)};$$

$$\phi(\mathbf{r},t) = \xi_0R_0\exp(-kz)\exp(st-ikx) + k.c.$$

2f. Характеристики векторного поля скоростей $\mathbf{U}^{(1)}(\mathbf{r}, t)$ в приповерхностном слое

Выпишем теперь компоненты векторного поля скоростей течения жидкости в приповерхностном слое $-\delta_1 \leq z \leq 0$:

$$U_x^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial z} = \xi_0 \Big\{ \mathrm{ch}^{-1}[q(d - \delta_2)]$$

$$\times \big(q\,\mathrm{ch}[k(z + d)]\,\mathrm{ch}(q\delta_2) - k\,\mathrm{sh}[k(z + d)]\,\mathrm{sh}(q\delta_2) \big) B_5$$

$$- q\,\mathrm{ch}^{-1}(q\delta_1)\,\mathrm{ch}[q(z + \delta_1)] B_3 \Big\} \exp(st - ikx) + k.c.; \tag{11}$$

$$U_z^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial x} = \xi_0 i \Big\{ \mathrm{ch}^{-1}[q(d - \delta_2)]$$

$$\times \big(q\,\mathrm{sh}[k(z + d)]\,\mathrm{ch}(q\delta_2) - k\,\mathrm{ch}[k(z + d)]\,\mathrm{sh}(q\delta_2) \big) B_5$$

$$+ k\,\mathrm{ch}^{-1}(q\delta_1)\,\mathrm{sh}[q(z + \delta_1)] B_3 \Big\} \exp(st - ikx) + k.c. \tag{12}$$

Выражение для ротора имеет вид

$$\mathrm{rot}(\mathbf{U}^{(1)})_y = -\xi_0 B_3 s [\nu\,\mathrm{ch}(q\delta_1)]^{-1}\,\mathrm{sh}[q(z + \delta_1)]$$

$$\times \exp(st - ikx) + k.c. \tag{13}$$

2h. Характеристики векторного поля скоростей $\mathbf{U}^{(2)}(\mathbf{r}, t)$ в придонном слое

Выпишем компоненты векторного поля скоростей течения вязкой жидкости в придонном слое $d \leq -z \leq d - \delta_2$:

$$U_x^{(2)}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial z} = -\xi_0 B_5\,\mathrm{ch}^{-1}[q(d - \delta_2)]$$

$$\times \Big\{ q\,\mathrm{ch}[q(d + z - \delta_2)] - q\,\mathrm{ch}[k(z + d)]\,\mathrm{ch}(q\delta_2)$$

$$+ k\,\mathrm{sh}[k(z + d)]\,\mathrm{sh}(q\delta_2) \Big\} \exp(st - ikx) + k.c.; \tag{14}$$

$$U_z^{(2)}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial x} = -\xi_0 i B_5\,\mathrm{ch}^{-1}[q(d - \delta_2)]$$

$$\times \Big\{ k\,\mathrm{sh}[q(d + z - \delta_2)] - q\,\mathrm{sh}[k(z + d)]\,\mathrm{ch}(q\delta_2)$$

$$+ k\,\mathrm{ch}[k(z + d)]\,\mathrm{sh}(q\delta_2) \Big\} \exp(st - ikx) + k.c. \tag{15}$$

Выражение для ротора поля скоростей имеет вид

$$\mathrm{rot}(\mathbf{U}^{(2)})_y = -\xi_0 B_5 s \nu^{-1} \big\{ \mathrm{sh}(qz) - \mathrm{ch}(qz)\mathrm{th}[q(-d + \delta_2)] \big\}$$

$$\times \exp(st - ikx) + k.c. \tag{16}$$

Решенную модельную задачу используем для построения приближения пограничного слоя, когда в математической формулировке задачи можно пренебречь некоторыми слагаемыми, что может упростить математическую формулировку и облегчить процедуру отыскания решения. В используемом линейном приближении по малой амплитуде ξ_0 это упрощение несущественно, но при решении нелинейных задач расчета периодического волнового движения в слоях вязкой жидкости конечной толщины, отличающихся крайней громоздкостью [10], оно может стать весьма важным.

3. Упрощение модельной задачи в рамках приближения пограничного слоя

Математическая формулировка модельной задачи в пределе малой вязкости может быть упрощена с помощью построений, аналогичных тем, что используются в традиционной теории пограничного слоя, с некоторым различием в представлении о строении течения в пограничных слоях, связанных с наличием свободной поверхности и дна. Нижеследующее упрощение основано на оценочных рассуждениях, которые можно провести в отсутствие точного решения.

Выделим наиболее существенные свойства точного решения рассматриваемой задачи вблизи свободной поверхности и вблизи твердого дна. Течение состоит из главной (потенциальной) и добавочных погранслойных (вихревых) частей. Для основной части движения характерный линейный масштаб l, на котором изменяются компоненты скорости, одинаков во всех направлениях и определяется длиной волны: $l \sim \lambda$. Для вихревой части течения характерный линейный масштаб, на котором изменяются компоненты скорости в направлении, перпендикулярном пограничным слоям, равен толщине каждого из слоев $l \sim \delta_j$, а вдоль них определяется длиной волны $l \sim \lambda$.

На основании вышесказанного введем правила оценки производных от искомых величин по пространственным переменным. Для производных от гидродинамического потенциала $\varphi(\mathbf{r}, t)$ будем пользоваться следующими формальным правилом построения оценки: операторы дифференцирования ∂_x и ∂_z переходят в оператор умножения на $1/\lambda$. Для функций тока, определенных в пограничных слоях $\psi^{(1)}(\mathbf{r}, t)$, $\psi^{(2)}(\mathbf{r}, t)$, правило оценки производных другое — операторы дифференцирования ∂_x переходят в оператор умножения на $1/\lambda$, а оператор ∂_z переходит в операторы умножения на $1/\delta_1$ и $1/\delta_2$ для $\psi^{(1)}(\mathbf{r}, t)$ и $\psi^{(2)}(\mathbf{r}, t)$ соответственно.

Воспользуемся малостью значений толщины приповерхностного и придонного пограничных слоев δ_1, δ_2 по сравнению с длиной волны λ и упростим формулировку модельной задачи, пренебрегая в суммах вида $\Xi = A + B$ слагаемыми B, если $B/A \sim \mathrm{O}(\delta_i^2/\lambda^2)$, для $i = 1, 2$.

Пусть V — характерное значение скорости потенциального течения на уровне $z = 0$. Тогда имеем следующие оценки:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \sim \frac{\partial \varphi}{\partial z} \sim V; \qquad \left(\frac{\partial \psi^{(i)}}{\partial x}\right) \Big/ \left(\frac{\partial \psi^{(i)}}{\partial z}\right) \sim \frac{\delta_i}{\lambda};$$

$$\left(\frac{\partial^2\psi^{(i)}}{\partial x^2}\right)\Big/\left(\frac{\partial^2\psi^{(i)}}{\partial z^2}\right)\sim\frac{\delta_i^2}{\lambda^2};\quad\left(\frac{\partial\psi^{(i)}}{\partial z}\right)\sim\frac{\delta_i}{\lambda}V;$$
$$\left(\frac{\partial\psi^{(i)}}{\partial x}\right)\sim\frac{\delta_i^2}{\lambda^2}V;\quad i=1,2.$$

Учитывая все приведенные выше рассуждения, модифицируем математическую формулировку модельной задачи к упрощенному виду

$$z>0:\qquad \Delta\phi=0;$$
$$-d\le z\le 0:\qquad \Delta\varphi=0;$$
$$-\delta_1\le z\le 0:\qquad \frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial t}-\nu\frac{\partial^2\psi^{(1)}}{\partial z^2}=0;$$
$$-\delta\le z\le -d+\delta_2:\qquad \frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial t}-\nu\frac{\partial^2\psi^{(2)}}{\partial z^2}=0;$$
$$z=-\delta_1:\qquad \frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial t}=0;$$
$$z=-d+\delta_2:\qquad \frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial t}=0;$$
$$z=-d:\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial x}=0;$$
$$z=0:\qquad \frac{\partial\xi}{\partial t}=\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial x},\quad 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2\psi^{(1)}}{\partial z^2}=0;$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\xi+2\nu\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}-p_E(\xi)+p_\gamma(\xi)=0;\quad \phi=-\frac{\partial\Phi_0}{\partial z}\xi;$$
$$z\to\infty:\qquad \nabla\Phi\to -E_0\mathbf{e}_z.$$

3a. Решение упрощенной модельной задачи

Принцип решения упрощенной модельной задачи такой же, как и у точной модельной задачи. Но объем вычислений, естественно, меньше. Отличие состоит в том, что иным получается явный вид параметра $q=\sqrt{s/\nu}$, а система уравнений относительно искомых коэффициентов примет вид

$$ik\,\mathrm{th}(q\delta_1)B_3+i\,\mathrm{ch}^{-1}[q(d-\delta_2)]$$
$$\times\big(k\,\mathrm{sh}(q\delta_2)\,\mathrm{ch}(kd)-q\,\mathrm{ch}(q\delta_2)\,\mathrm{sh}(kd)\big)B_5+sa=0;$$
$$-q^2\mathrm{th}(q\delta_1)B_3+2k\,\mathrm{ch}^{-1}[q(d-\delta_2)]\big(q\,\mathrm{ch}(q\delta_2)\,\mathrm{sh}(kd)$$
$$-k\,\mathrm{sh}(q\delta_2)\,\mathrm{ch}(kd)\big)B_5=0;$$
$$i(s+2\nu k^2)\,\mathrm{ch}^{-1}[q(d-\delta_2)]\big(q\,\mathrm{ch}(q\delta_2)\,\mathrm{ch}(kd)$$
$$-k\,\mathrm{sh}(q\delta_2)\,\mathrm{sh}(kd)\big)B_5+\omega_0^2(k)a=0.$$

Дисперсионное уравнение упрощенной задачи после преобразований имеет вид

$$\omega_0^2(k)(2k^2-q^2)\big(k\,\mathrm{sh}(q\delta_2)\,\mathrm{ch}(kd)-q\,\mathrm{ch}(q\delta_2)\,\mathrm{sh}(kd)\big)$$
$$+\nu^2q^4(2k^2+q^2)\big(q\,\mathrm{ch}(q\delta_2)\,\mathrm{ch}(kd)-k\,\mathrm{sh}(q\delta_2)\,\mathrm{sh}(kd)\big)=0.$$

В приближении малой вязкости $\nu\ll 1$ это дисперсионное уравнение сводится к виду, совпадающему с асимптотикой (5) точного дисперсионного уравнения:

$$s+4\nu k^2s+\omega_0^2(k)\mathrm{th}(kd)=0.$$

Решения для искомых величин в упрощенной модельной задаче имеют вид

$$\xi(x,t)=\xi_0\exp(st-ikx)+k.c.;$$
$$\varphi(\mathbf{r},t)=\big(B_1sh(kz)+B_2\,\mathrm{ch}(kz)\big)\exp(st-ikx)+k.c.;$$
$$B_1=s^2/k(s-2\nu k^2);$$
$$B_2=\frac{s^2\big(k\,\mathrm{sh}(kd)\,\mathrm{sh}(q\delta_2)-q\,\mathrm{ch}(kd)\,\mathrm{ch}(q\delta_2)\big)}{k(s-2\nu k^2)\big(k\,\mathrm{sh}(q\delta_2)\,\mathrm{ch}(kd)-q\,\mathrm{ch}(q\delta_2)\,\mathrm{sh}(kd)\big)};$$
$$\psi^{(1)}(\mathbf{r},t)=\xi_0B_3\,\mathrm{ch}^{-1}(q\delta_1)\,\mathrm{sh}[q(z+\delta_1)]$$
$$\times\exp(st-ikx)+k.c.;$$
$$B_3=-i2k\nu s\,\mathrm{cth}(q\delta_1)/(s-2\nu k^2);$$
$$\psi^{(2)}(\mathbf{r},t)=\xi_0B_5\big(\mathrm{sh}(qz)-\mathrm{ch}(qz)\mathrm{th}[q(-d+\delta_2)]\big)$$
$$\times\exp(st-ikx)+k.c.;$$
$$B_5=i\frac{s^2\,\mathrm{ch}(q(d-\delta_2)]}{(s-2\nu k^2)\big(k\,\mathrm{sh}(q\delta_2)\,\mathrm{ch}(kd)-q\,\mathrm{ch}(q\delta_2)\,\mathrm{sh}(kd)\big)};$$
$$\phi(\mathbf{r},t)=\xi_0E_0\exp(-kz)\exp(st-ikx)+k.c.$$

3b. Компоненты векторного поля скоростей течения жидкости $U^{(1)}(\mathbf{r},t)$ в поверхностном слое

$$U_x^{(1)}(\mathbf{r},t)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial z}=\xi_0\Big\{\mathrm{ch}^{-1}[q(d-\delta_2)]$$
$$\times\big(q\,\mathrm{ch}[k(z+d)]\,\mathrm{ch}(q\delta_2)-k\,\mathrm{sh}[k(z+d)]\,\mathrm{sh}(q\delta_2)\big)B_5$$
$$-q\,\mathrm{ch}^{-1}(q\delta_1)\,\mathrm{ch}[q(z+\delta_1)]B_3\Big\}\exp(st-ikx)+k.c.;\tag{17}$$
$$U_z^{(1)}(\mathbf{r},t)=\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial x}=-\xi_0i\Big\{\mathrm{ch}^{-1}[q(d-\delta_2)]$$
$$\times\big(q\,\mathrm{sh}[k(z+d)]\,\mathrm{ch}(q\delta_2)-k\,\mathrm{ch}[k(z+d)]\,\mathrm{sh}(q\delta_2)\big)B_5$$
$$+k\,\mathrm{ch}^{-1}(q\delta_1)\,\mathrm{sh}[q(z+\delta_1)]B_3\Big\}\exp(st-ikx)+k.c.\tag{18}$$

Выражение для ротора поля скоростей имеет вид

$$\mathrm{rot}(\mathbf{U}^{(1)})_y=-\xi_0sB_3[\nu\,\mathrm{ch}(q\delta_1)]^{-1}\,\mathrm{sh}[q(z+\delta_1)]$$
$$\times\exp(st-ikx)+k.c.\tag{19}$$

В приближении малой вязкости: $\nu\ll 1$, полученные решения (17)–(19) упрощенной задачи совпадают с точными решениями модельной задачи (11)–(13), в чем можно убедиться, проведя в (17)–(19) разложения по малому коэффициенту безразмерной вязкости ν и ограничиваясь линейными по ν членами разложений.

3с. Компоненты векторного поля скоростей течения жидкости $U^{(2)}(\mathbf{r},t)$ в придонном слое

$$U_x^{(2)}(\mathbf{r},t)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial z}=-\xi_0 B_5\,\mathrm{ch}^{-1}[q(d-\delta_2)]$$

$$\times\Big\{q\,\mathrm{ch}[q(d+z-\delta_2)]-q\,\mathrm{ch}[k(z+d)]\,\mathrm{ch}(q\delta_2)$$

$$+k\,\mathrm{sh}[k(z+q)]\,\mathrm{sh}(q\delta_2)\Big\}\exp(st-ikx)+k.c.;\qquad(20)$$

$$U_z^{(2)}(\mathbf{r},t)=\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial x}=-\xi_0 iB_5\,\mathrm{ch}^{-1}[q(d-\delta_2)]$$

$$\times\Big\{k\,\mathrm{sh}[q(d+z-\delta_2)]-q\,\mathrm{sh}[k(z+d)]\,\mathrm{ch}(q\delta_2)$$

$$+k\,\mathrm{ch}[k(z+d)]\,\mathrm{sh}(q\delta_2)\Big\}\exp(st-ikx)+k.c.\qquad(21)$$

Выражение для ротора поля скоростей имеет вид

$$\mathrm{rot}(\mathbf{U}^{(2)})_y=-\xi_0 B_5 s\nu^{-1}\{\mathrm{sh}(qz)-\mathrm{ch}(qz)$$

$$\times\,\mathrm{th}[q(-d+\delta_2)]\}\exp(st-ikx)+k.c.\qquad(22)$$

Сравнение выражений для компонент поля скоростей — (20) и (14), (21) и (15), — а также для ротора поля скоростей (22) и (16), показывает, что решения упрощенной задачи отличаются от точных решений модельной задачи лишь видом коэффициентов B_5. В приближении малой вязкости решения упрощенной задачи совпадают с точными решениями модельной задачи.

4. Оценка погрешности найденного приближенного решения (20), (21) упрощенной модельной задачи по сравнению с точным решением (3), (4) исходной задачи (1)

Чтобы оценить погрешность, допускаемую при замене точного решения (3), (4) на полученное в рамках упрощенной математической постановки решение (20), (21), на рис. 2 и 3 приведем рассчитанные при различных значениях неопределенных коэффициентов G и H относительные погрешности:

$$\eta_\chi^{(j)}=\frac{|\tilde U_\xi^{(j)}-U_\xi^{(j)}|}{U_\xi^{(j)}};\quad j-1,2;\quad \chi\in\{x;z\},$$

где $U_\xi^{(j)}(\mathbf{r},t)$ — точное решение, а $\tilde U_\chi^{(j)}(\mathbf{r},t)$ — приближенное.

Из приведенных рисунков видно, что:

1) при $G=4$ и $H=3$ относительная погрешность составляет доли процента;

2) относительная погрешность приближенного расчета горизонтальной компоненты поля скоростей η_x как

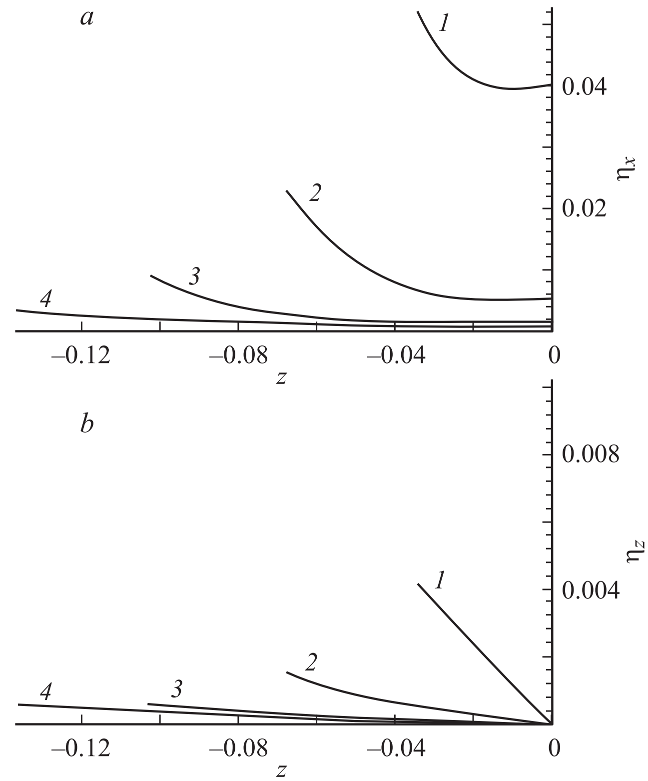

Рис. 2. Относительная погрешность горизонтальной (a) компоненты поля скоростей $U_x^{(1)}(\mathbf{r},t)$ и вертикальной (b) $U_z^{(1)}(\mathbf{r},t)$.

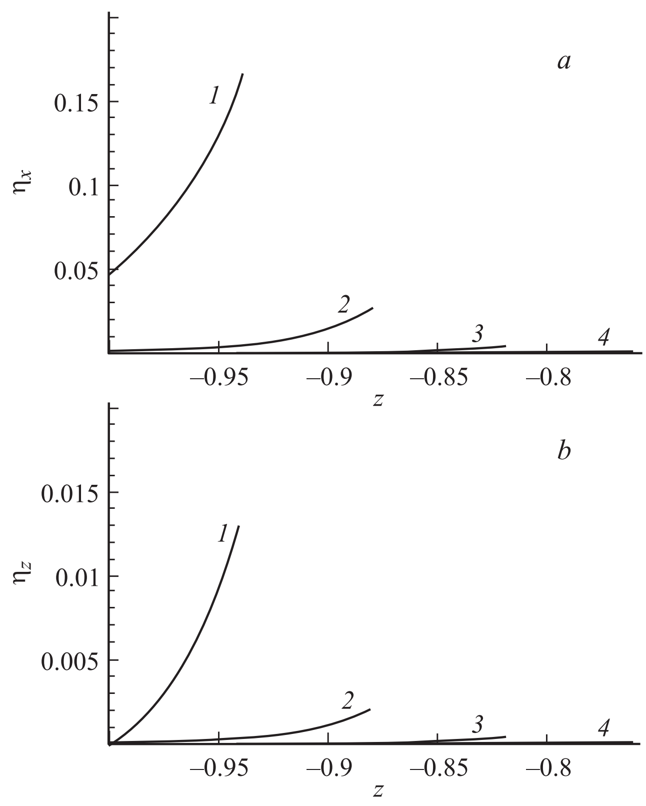

Рис. 3. То же, что на рис. 2, a, при тех же значениях физических параметров, но для поля скоростей в придонном слое $U_x^{(2)}(\mathbf{r},t)$ (a) $U_z^{(2)}(\mathbf{r},t)$ (b) для различных значений коэффициента H: *1* — 1, *2* — 2, *3* — 3, *4* — 4.

для приповерхностного, так и для придонного пограничных слоев в несколько раз превышает погрешность расчета вертикальной компоненты поля скоростей η_z. Сказанное означает, что общая погрешность расчетов вихревого движения в пограничных слоях определяется, в первую очередь, погрешностью η_x и что сами расчеты могут быть проведены с контролируемой точностью.

На рис. 4 приведены зависимости толщины приповерхностного и придонного пограничных слоев от волнового числа волны, создающей вихревое движение. Общая тенденция увеличения толщины пограничных слоев с увеличением длины волны (с уменьшением волнового числа) физически понятна. Обращают на себя внимание максимумы на кривых, относящихся как к приповерхностному, так и придонному пограничным слоям, связанных с волновым движением на сильно заряженной поверхности жидкости $W = 1.99$. Напомним, что критические для начала реализации неустойчивости свободной поверхности жидкости по отношению к давлению электрического поля значения параметра $W = W_{\text{cr}}$ и волнового числа $k = k_{\text{cr}}$ определяются соотношениями $W_{\text{cr}} = k + k^{-1}$, $k_{\text{cr}} = 1$.

При указанных значениях $W \to W_{\text{cr}}$ и $k \to k_{\text{cr}}$ частота волны стремится к нулю, что и приводит к увеличению толщины пограничных слоев. На рис. 5 приведены зависимости толщины приповерхностного и придонного пограничных слоев от величины параметра W, рассчитанные длля двух значений волновых чисел $k = 1$ и 3, подтверждающие вышесказанное.

Расчеты показывают, что интенсивность вихревого движения (амплитуда ротора поля скоростей течения жидкости) в придонном слое снижается с увеличением толщины слоя жидкости d, и при достаточно большой толщине слоя интенсивность вихревого движения может уменьшиться до пренебрежимо малой (в рамках принятой точности расчетов) величины.

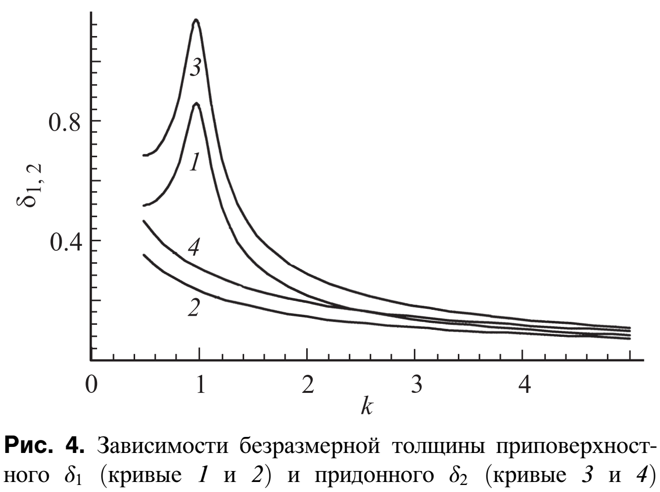

Рис. 4. Зависимости безразмерной толщины приповерхностного δ_1 (кривые *1* и *2*) и придонного δ_2 (кривые *3* и *4*) пограничных слоев от безразмерного волнового числа k, построенные при $\zeta_0 = 0.1$, $\nu = 0.002$, $d = 1$ и различных значениях параметра W: кривые *1* и *3* рассчитаны при $W = 1.99$, *2* и *4* — при $W = 0$.

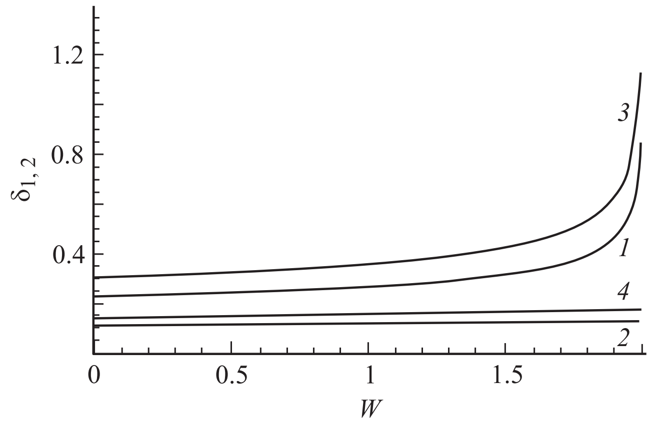

Рис. 5. Зависимости безразмерной толщины приповерхностного δ_1 (кривые *1* и *2*) и придонного δ_2 (кривые *3* и *4*) пограничных слоев от безразмерного параметра W при $d = 1$, рассчитанные для различных волновых чисел: кривые *1* и *3* при $k = 1$, *2* и *4* — при 3.

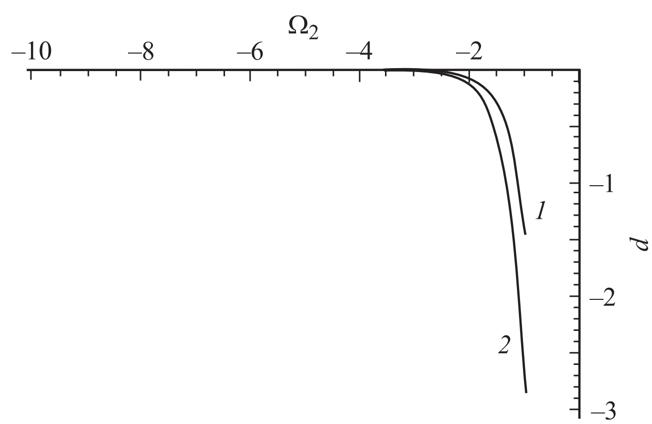

Рис. 6. Зависимости амплитуды безразмерного ротора поля скоростей течения жидкости в придонном слое Ω_2 от безразмерной толщины слоя, построенные при $\zeta_0 = 0.1$, $k = 3$, $\nu = 0.002$, $z = -d$, $t = T/2$. Кривая *1* соответствует $W = 1.99$, *2* — 0.

На рис. 6 приведены зависимости модуля безразмерного ротора поля скоростей в придонном слое от безразмерной толщины слоя. Расчеты показывают (можно видеть из рис. 6, если прилегающие к оси части графиков привести в более мелком масштабе), что когда толщина слоя жидкости превышает примерно полторыдве длины волны (в зависимости от амплитуды волны и плотности поверхностного заряда) амплитуда ротора поля скоростей течения вязкой жидкости у твердого дна сравнивается с относительной погрешностью расчетов в рамках модели пограничного слоя при $H = 3$: порядка десятой доли процента. Это означает, что в слоях вязкой жидкости с толщиной $d > 2\lambda$ движение жидкости у твердого дна в рамках обозначенной точности расчета полностью определяется потенциальной компонентой течения (ранее об этом феномене для волн на незаряженной поверхности жидкости при выполнении существенно более мягкого условия $d > 0.5\lambda$ сообщалось в [11], но без указания на допускаемую при этом погрешность, хотя она для указанного соотношения между толщиной слоя и длиной волны, согласно рис. 5, будет не меньше двух процентов). Интенсивность вихревого движения в приповерхностном слое от толщины слоя практически не зависит.

Другой предельный случай соответствует малым значениям толщины слоев вязкой жидкости, когда приповерхностный и придонный пограничные слои перекрываются, а вихревое движение заполняет весь объем жидкости. Такая ситуация, согласно рис. 4, реализуется при $W = 1.99$ и $d = 1$ для волн с волновыми числами из диапазона $k \in \{0.5-1.5\}$. С увеличением вязкости жидкости значения толщины приповерхностного и придонного пограничных слоев увеличиваются примерно $\sim \sqrt{\nu}$, и при $\nu = 0.02$ в слое с $d = 1$ будут перекрываться пограничные слои из диапазона $k < 3$ даже при отсутствии заряда на поверхности жидкости (при $W = 0$). Иными словами, в этой ситуации приходим к приближению тонкой пленки вязкой жидкости, детально разобранному ранее [11]. Здесь следует отметить, что принятое при расчетах значение безразмерной вязкости $\nu = 0.002$ в размерных переменных примерно соответствует кинематической вязкости воды.

Заключение

Теория пограничного слоя, связанного с волновым движением на свободной поверхности жидкости, может быть использована для расчета волнового движения конечной амплитуды в слоях вязкой жидкости конечной толщины. В ситуации, когда толщина слоя превышает длину волны более чем в два раза, с контролируемой точностью движение жидкости у дна можно считать безвихревым. Если это условие не выполняется, то необходимо учитывать рассеяние энергии волны в двух пограничных слоях: у свободной поверхности жидкости и у твердого дна. Если толщина слоя жидкости не превышает двух десятых от длины волны, приповерхностный и придонный пограничные слои перекрываются, и приходим к приближению тонкой пленки вязкой жидкости.

Работа выполнена в рамках тематического плана НИР вуза 2008 года и при поддержке гранта РФФИ № 06-01-00066-а.

Список литературы

[1] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2007. Т. 77. Вып. 8. С. 19–28.
[2] *Longuet-Higgins M.S.* // Royal. Soc. London. Trans. Ser. A. 1953. Vol. 245. N 903. P. 535–581.
[3] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Коромыслов В.А., Белоножко Д.Ф.* // ЖТФ. 1997. Т. 67. Вып. 8. С. 27–33.
[4] *Левич В.Г.* Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.
[5] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.
[6] *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 712 с.
[7] *Френкель Я.И.* // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. № 4. С. 348–350.
[8] *Игнатьев А.И., Григорьев О.А., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 1992. Т. 62. Вып. 9. С. 12–21.
[9] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Белоножко Д.Ф., Климов А.В.* // ЭОМ. 2004. № 4. С. 34–40.
[10] *Климов А.В., Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 10. С. 9–18.
[11] *Саночкин Ю.В.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 5. С. 24–29.