

01;03

Алгоритм определения аэродинамических характеристик свободного летящего объекта по дискретным данным баллистического эксперимента. I

© С.В. Бобашев,¹ Н.П. Менде,¹ П.А. Попов,¹ В.А. Сахаров,¹ В.А. Бердников,²
В.А. Викторов,² С.И. Осеева,² Г.Д. Садчиков²

¹ Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,
194021 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: nick.mende@mail.ioffe.ru

² Российский федеральный ядерный центр —
Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики,
607190 Саров, Нижегородская область, Россия
e-mail: berdnikov@dep16.vniief.ru

(Поступило в Редакцию 8 июля 2008 г.)

Описан алгоритм решения обратной задачи динамики, предназначенной для обработки траекторных данных свободно летящего объекта, получаемых в наземном (лабораторном) эксперименте на баллистической установке с целью определения аэродинамических характеристик объекта.

PACS: 47.85.Gj, 45.40.Gj

Введение

Задача определения аэродинамических характеристик свободно летящего объекта на основе анализа дискретных данных о его траектории, зарегистрированных в эксперименте, естественным образом включает в себя решение прямой задачи описания движения по заданным характеристикам газовой среды, объекта и начальным условиям его движения.

Поскольку обратная задача динамики некорректна, это обстоятельство породило большое многообразие подходов к ее решению. Смысл этого решения в дифференцировании зависимостей координат объекта по времени или другой независимой переменной как например в работах [1,2]. В работе [2] кратко представлены различные подходы начиная от дифференцирования траекторных данных методом конечных разностей и заканчивая формальным интегрированием выбранной математической модели с неизвестными коэффициентами с последующим решением систем алгебраических уравнений. Несовершенство таких подходов состоит в основном в том, что оценить погрешности окончательных результатов невозможно либо оценки не вполне надежны.

Несмотря на то что определением аэродинамических характеристик по траекторным данным объекта специалисты занимаются многие десятилетия, разработка новых алгоритмов не перестает быть актуальной. В последнее время к решению задачи привлекаются методы теории идентификации нелинейных параметров систем, что придает разработкам качественно новый уровень [3–5].

Наиболее эффективным подходом к решению обратной задачи движения авторам настоящей работы представляется метод, изложенный в работе [1] и дополненный в [2] методами статистического оценивания значи-

мости параметров подбираемой математической модели. В [2] рассматривается строго плоское движение, в [1] сделано обобщение на случай пространственного движения с линейными аэродинамическими характеристиками и постоянной скоростью крена, однако уравнения для углов атаки и скольжения записаны приближенно.

В настоящей работе для решения задачи о движении объекта в атмосфере используется полная система динамических уравнений Эйлера, общепринятые приемы описания положения летящего объекта по отношению к Земле и вектору скорости набегающего потока, а также кинематические соотношения, вытекающие из способа задания координат объекта. Системы координат и кинематические соотношения были взяты из монографии [6].

Суть задачи в нашей постановке состоит в подборе искомых аэродинамических коэффициентов объекта таким образом, чтобы решенная с их использованием прямая задача давала результаты, наилучшим образом соответствующие траекторным данным, зарегистрированным в эксперименте. Отсюда следует, что рабочие уравнения должны позволять вычислять с использованием принятой математической модели движения значения регистрируемых в опыте координат объекта (функций отклика). Критерием качества аппроксимации зарегистрированных траекторных данных является целевая функция — остаточная сумма квадратов отклонений координат объекта, рассчитанных по принятой математической модели движения, от данных, полученных в эксперименте (в дальнейшем упомянутые отклонения будем называть невязками).

В наземном (лабораторном) эксперименте регистрируются три линейные координаты центра масс объекта в земной системе координат и три угловые координаты, определяющие пространственную ориентацию связанных с объектом осей по отношению к осям земной

системы — углы тангажа, рысканья и крена. На основе динамических уравнений Эйлера и кинематических соотношений, вытекающих из способа задания угловых координат, выведены дифференциальные уравнения, выражающие значения вторых производных по времени от названных выше шести координат объекта.

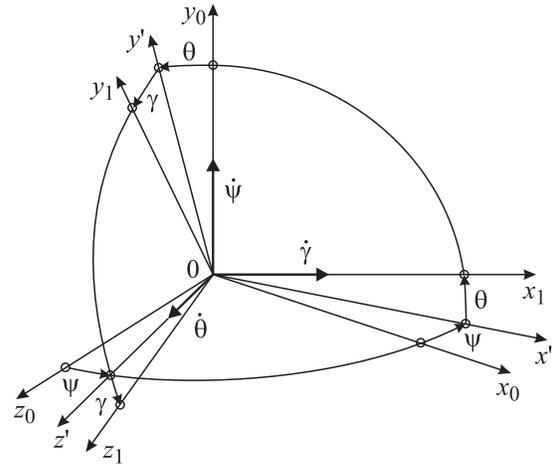
Используемый нами подход авторов [1] предполагает численное интегрирование дифференциальных уравнений движения совместно с дифференциальными уравнениями чувствительности при некотором начальном приближении функций искомых параметров. Уравнения чувствительности получают дифференцированием уравнений движения по искомым параметрам полиномиальных представлений аэродинамических коэффициентов.

Выражения для целевых функций — остаточных сумм квадратов невязок — представлены в виде линейных отрезков ряда Тейлора по искомым параметрам. Численное решение названных систем уравнений движения и чувствительности позволяет найти первые производные функций отклика, входящие в отрезки рядов, по искомым параметрам при текущем приближении этих параметров. В результате на основе условий локальных минимумов целевых функций могут быть составлены системы алгебраических уравнений, коэффициентами которых являются найденные первые производные, а неизвестными — величины поправок к искомым параметрам и к начальным условиям дифференциальных уравнений движения. Найденные поправки позволяют получить очередные приближения аэродинамических коэффициентов и начальных условий в ходе итерационного процесса. На каждом этапе итерационного процесса с помощью приемов линейного регрессионного анализа производится оценка доверительных интервалов искомым параметрам, и незначимые параметры исключаются из рассмотрения. Усложнение математической модели движения ведется до достижения ее адекватности по отношению к анализируемым экспериментальным векторным данным.

Прямая задача динамики свободного движения объекта

Системы координат

При решении задачи использованы две системы координат: неподвижная земная и связанная с телом, оси которой совпадают с главными центральными осями инерции объекта. На рисунке показано положение связанной с объектом системы координат $Ox_1y_1z_1$ по отношению к земной системе осей $Ox_0y_0z_0$. Положение объекта в пространстве относительно земной системы осей определяется шестью координатами: тремя координатами центра масс объекта x_0, y_0, z_0 и тремя углами между осями земной и связанной систем координат (углом рысканья ψ между земной осью x_0 и проекцией продольной оси объекта x_1 на горизонтальную плоскость Ox_0z_0 ; углом тангажа ϑ между продольной



Земная $Ox_0y_0z_0$ и связанная $Ox_1y_1z_1$ системы координат. Дугами соединены оси, лежащие в плоскостях.

осью объекта x_1 и горизонтальной плоскостью Ox_0z_0 ; угол крена γ , определяющим отклонение связанной оси объекта y_1 от вертикальной плоскости Ox_1y_0). Направляющие косинусы между осями двух систем приведены в [6].

Уравнения движения

Уравнения движения центра масс — суть проекции на неподвижные оси следующего векторного уравнения:

$$m \frac{d\bar{V}}{dt} = \sum \bar{F} + \bar{G}, \quad (1)$$

где m — масса объекта, \bar{V} — вектор абсолютной скорости тела по отношению к Земле, \bar{F} — вектор сил, действующих на тело, \bar{G} — вектор ускорения силы тяжести, $\bar{G} = (0, -g, 0)^T$. Проекция уравнения (1) на земные оси координат дадут три скалярных уравнения относительно координат, непосредственно измеряемых в эксперименте.

В системе координат, совмещенной с главными центральными осями инерции тела, уравнения его вращательного движения имеют вид динамических уравнений Эйлера

$$\left. \begin{aligned} J_{x_1} \dot{\omega}_{x_1} + (J_{z_1} - J_{y_1}) \omega_{y_1} \omega_{z_1} &= \sum M_{x_1}, \\ J_{y_1} \dot{\omega}_{y_1} + (J_{x_1} - J_{z_1}) \omega_{x_1} \omega_{z_1} &= \sum M_{y_1}, \\ J_{z_1} \dot{\omega}_{z_1} + (J_{y_1} - J_{x_1}) \omega_{y_1} \omega_{z_1} &= \sum M_{z_1}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где в правых частях записаны проекции всех действующих моментов внешних сил на соответствующие оси координат.

При движении тела в атмосфере составляющие аэродинамической силы и момента по осям выбранной

системы координат представляют в следующем виде

$$F_j = C_{F_j} \frac{\rho V^2}{2} S, \quad M_j = C_{M_j} \frac{\rho V^2}{2} L S,$$

где C_{F_j} и C_{M_j} — соответствующие аэродинамические коэффициенты, зависящие от формы объекта и являющиеся функциями условий его движения.

Приведенные ниже кинематические уравнения [6] устанавливают связь между производными углов рысканья ψ , тангажа ϑ и крена γ по времени и проекциями вектора угловой скорости тела на связанные оси $\omega_{x_1}, \omega_{y_1}, \omega_{z_1}$

$$\left. \begin{aligned} \omega_{x_1} &= \frac{d\gamma}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \vartheta, \\ \omega_{y_1} &= \frac{d\psi}{dt} \cos \vartheta \cos \gamma + \frac{d\vartheta}{dt} \sin \gamma, \\ \omega_{z_1} &= -\frac{d\psi}{dt} \cos \vartheta \sin \gamma + \frac{d\vartheta}{dt} \cos \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

С учетом (3) система уравнений (2) может быть представлена в символической форме дифференциальными уравнениями второго порядка в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\vartheta}{dt^2} &= \Theta(\bar{A}, \dot{\bar{A}}, \bar{M}), \\ \frac{d^2\psi}{dt^2} &= \Psi(\bar{A}, \dot{\bar{A}}, \bar{M}), \\ \frac{d^2\gamma}{dt^2} &= \Gamma(\bar{A}, \dot{\bar{A}}, \bar{M}), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где Θ, Ψ, Γ — функции, зависящие от векторов $\bar{A} = (\vartheta, \psi, \gamma)^T$, $\dot{\bar{A}} = (\dot{\vartheta}, \dot{\psi}, \dot{\gamma})^T$ с компонентами, содержащими угловые координаты и их производные по времени, и от составляющих действующего на тело момента \bar{M} , записанных в правых частях (2).

Для сокращения записей введем векторы координат центра масс и их производных $\bar{R} = (x, y, z)^T$ и $\dot{\bar{R}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^T$.

Система уравнений (1)–(4), дополненная начальными условиями

$$\left. \begin{aligned} \bar{R}_{t=0} &= \bar{R}_0, \quad \dot{\bar{R}}_{t=0} = \dot{\bar{R}}_0, \\ \bar{A}_{t=0} &= \bar{A}_0, \quad \dot{\bar{A}}_{t=0} = \dot{\bar{A}}_0, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

позволяет описать движение модели в координатах, измеряемых в эксперименте.

Обратная задача динамики движения объекта

Способ идентификации аэродинамических коэффициентов по траекторным данным свободного полета тела

Обратная задача заключается в восстановлении сил и моментов, вызвавших зарегистрированное движение.

Следуя [2], выражения для сил моментов будем находить, минимизируя целевые функции — остаточные суммы квадратов невязок. Минимизация осуществляется выбором более подходящей математической модели, обычно путем ее усложнения. Поясним сказанное, рассмотрев некую обобщенную координату q . Ее изменение во времени описывается дифференциальным уравнением с соответствующими граничными условиями

$$\begin{aligned} \frac{d^2q(\bar{C}, t)}{dt^2} + f\left(\frac{dq(\bar{C}, t)}{dt}, q(\bar{C}, t)\right) &= 0; \\ q(\bar{C}, 0) &= q_0; \quad \frac{dq(\bar{C}, 0)}{dt} = \dot{q}_0. \end{aligned} \quad (6)$$

Целевая функция $\Phi(\bar{C})$ в методе наименьших квадратов имеет вид

$$\Phi(\bar{C}) = \sum_{i=1}^N (q_{\text{exp}}(\bar{C}, t_i) - q_{\text{cal}}(\bar{C}, t_i))^2. \quad (7)$$

Здесь \bar{C} — вектор идентифицируемых параметров, $q_{\text{exp}}(\bar{C}, t_i)$, $q_{\text{cal}}(\bar{C}, t_i)$ — суть экспериментальные и расчетные значения функции отклика соответственно в моменты времени t_i , N — число точек, в которых получены траекторные данные.

Поскольку уравнения движения нелинейны, функция $q(\bar{C}, t)$ не может быть получена в явном виде, однако ее значения $q_{\text{cal}}(\bar{C}, t_i)$ можно найти численным интегрированием соответствующего уравнения движения при некотором исходном приближении вектора \bar{C} и начальных условий движения.

Введем следующие векторные обозначения: $\tilde{q} = (q_1, q_2, q_3, \dots, q_N)^T$ — вектор измеренных значений в одном опыте;

$$\bar{q}(\bar{C}, t) = (q_1(\bar{C}, t_1), q_2(\bar{C}, t_2), q_3(\bar{C}, t_3), \dots, q_N(\bar{C}, t_N))^T$$

— вектор вычисленных по математической модели значений функций отклика в точках t_i при выбранном (текущем) приближении вектора оцениваемых параметров \bar{C} .

Можно записать

$$\tilde{q} = \bar{q}(\bar{C}, t) + \bar{\xi}, \quad (8)$$

где $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_N)^T$ — вектор невязок в точках плана эксперимента.

Теперь целевую функцию можно записать в виде

$$\Phi(\bar{C}) = \bar{\xi}^T \bar{\xi}. \quad (9)$$

Оценку искомых параметров находят из условия локального минимума целевой функции

$$\begin{aligned} \bar{C} &= \arg \min_{\bar{C}} |\bar{\xi}^T \bar{\xi}| \\ &= \arg \min_{\bar{C}} [(\tilde{q} - \bar{q}(\bar{C}, t))^T (\tilde{q} - \bar{q}(\bar{C}, t))]. \end{aligned} \quad (10)$$

Отметим, что экспериментальные значения независимой переменной предполагаются известными точно

(этот прием называют приведением ошибок выводу системы). Для относительно медленно изменяющихся координат центра масс объекта y и z , а также для углов тангажа и рысканья это допущение вполне приемлемо. Что касается продольной координаты центра масс x , то это допущение приведет к тому, что оценка дисперсии невязок x будет включать дисперсии измерений и координаты и времени. К этому вопросу вернемся позже.

Следуя [2], для минимизации нелинейной по параметрам целевой функции (7) применим метод Гаусса–Ньютона для линеаризации функции отклика в виде

$$\bar{q}(\bar{C}, t) = \bar{q}(\bar{C}_0, t) + \mathbf{P}\Delta\bar{C}. \quad (11)$$

Здесь $\Delta\bar{C} = (\Delta C_1, \Delta C_2, \Delta C_3, \dots, \Delta C_J)$; $\Delta C_j = C_j - C_{0j}$; $j = 1, 2, \dots, J$, где J — число идентифицируемых параметров.

К идентифицируемым параметрам следует добавить неизвестные начальные условия уравнения (6). Нижний индекс 0 в (11) отмечает некое начальное приближение параметров, в окрестности которого функция отклика представляется линейным отрезком ряда Тейлора. \mathbf{P} есть матрица частных производных от q по искомым параметрам, вычисленных в „точке“ \bar{C}_0 :

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} \frac{\partial q(\bar{C}, t_1)}{\partial C_1} \Big|_{\bar{C}_0} & \frac{\partial q(\bar{C}, t_1)}{\partial C_2} \Big|_{\bar{C}_0} & \dots & \frac{\partial q(\bar{C}, t_1)}{\partial C_J} \Big|_{\bar{C}_0} & \frac{\partial q(\bar{C}, t_1)}{\partial q_0} \Big|_{\bar{C}_0} & \frac{\partial q(\bar{C}, t_1)}{\partial \bar{q}_0} \Big|_{\bar{C}_0} \\ \frac{\partial q(\bar{C}, t_2)}{\partial C_1} \Big|_{\bar{C}_0} & \frac{\partial q(\bar{C}, t_2)}{\partial C_2} \Big|_{\bar{C}_0} & \dots & \frac{\partial q(\bar{C}, t_2)}{\partial C_J} \Big|_{\bar{C}_0} & \frac{\partial q(\bar{C}, t_2)}{\partial q_0} \Big|_{\bar{C}_0} & \frac{\partial q(\bar{C}, t_2)}{\partial \bar{q}_0} \Big|_{\bar{C}_0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial q(\bar{C}, t_N)}{\partial C_1} \Big|_{\bar{C}_0} & \frac{\partial q(\bar{C}, t_N)}{\partial C_2} \Big|_{\bar{C}_0} & \dots & \frac{\partial q(\bar{C}, t_N)}{\partial C_J} \Big|_{\bar{C}_0} & \frac{\partial q(\bar{C}, t_N)}{\partial q_0} \Big|_{\bar{C}_0} & \frac{\partial q(\bar{C}, t_N)}{\partial \bar{q}_0} \Big|_{\bar{C}_0} \end{matrix}. \quad (12)$$

Теперь можно записать

$$\Phi(\bar{C}) = (\tilde{q} - \bar{q}(\bar{C}_0, t) - \mathbf{P}\Delta\bar{C})^T (\tilde{q} - \bar{q}(\bar{C}_0, t) - \mathbf{P}\Delta\bar{C}). \quad (13)$$

Выражение (13) подобно остаточной сумме квадратов для линейной регрессии [7,8]: роль матрицы значений независимых переменных (матрицы плана) выполняет матрица частных производных \mathbf{P} , а роль измеренных значений отклика играют величины невязок $\tilde{q} - \bar{q}(\bar{C}_0, t)$ в точке \bar{C}_0 . Разложением в усеченный ряд (11) задача сведена к линейной, однако в силу приближенности (11) нахождение оценок $\tilde{C} = \bar{C}_0 + \Delta\bar{C}$ не позволяет найти минимум (13) за один шаг, как это имеет место при оценке параметров линейной регрессии. Тем не менее то обстоятельство, что итерационный алгоритм Гаусса–Ньютона представляет собой последовательность линейных регрессионных задач, будет использовано в дальнейшем для оценки доверительных интервалов искоемых параметров на каждом шаге итерационного процесса.

Однако прежде необходимо найти неизвестную матрицу \mathbf{P} . С этой целью в рассмотрение вводятся так называемые уравнения чувствительности, получаемые дифференцированием уравнения движения (6) по компонентам вектора искоемых параметров \bar{C} и начальным

условиям q_0 и \bar{q}_0 . В результате дифференцирования уравнения (6) по искомым параметрам и изменения порядка дифференцирования, как это сделано в [2], с тем чтобы „внешними“ производными оказались производные по времени, будет получена система линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами относительно частных производных функции отклика по искомым параметрам, включая неизвестные начальные условия уравнения (6). Переменные коэффициенты и правые части уравнений чувствительности могут быть найдены путем численного решения уравнения движения (6) при некоторых исходных приближениях компонентов вектора \bar{C} и начальных условий движения. В результате численного решения системы уравнений чувствительности будут найдены первые производные функции отклика, что позволит найти поправки к искомым параметрам из условий локального минимума целевой функции (13). Итерации повторяются до достижения заданной точности приближения искоемых параметров.

Чтобы избежать громоздких записей, был рассмотрен простой случай, когда функция отклика единственная. В рассматриваемой задаче их шесть: три координаты центра масс и три угловые координаты, соответственно предстоит иметь дело с шестью дифференциальными уравнениями движения и шестью системами уравнений чувствительности. Алгоритм строится с частичной декомпозицией системы уравнений, предполагающей поэтапное независимое рассмотрение вращательного и поступательного движения. На каждом этапе, используя уравнения чувствительности, составленные либо по уравнениям движения центра масс, либо углового движения, подбираются *последовательно* параметры каждой из составляющих аэродинамической силы и момента.

На первых шагах подбираются коэффициенты уравнений углового движения, поскольку они определяют и собственно колебания, и движение центра масс. При этом уравнения чувствительности формируются на основе всех трех уравнений углового движения дифференцированием их лишь по параметрам искомой на данном этапе составляющей момента. Невязки вычисляются для всех трех угловых координат, поскольку каждая из составляющих момента влияет на изменение этих координат.

Некоторая особенность возникает при дифференцировании по начальным условиям трех уравнений углового движения, поскольку эти условия, естественно, различны. Поэтому при формировании матрицы вида (12) необходимо учесть, что производные каждой из функций отклика и их производных по начальным условиям двух других уравнений окажутся нулевыми. Полученная в результате матрица будет содержать число столбцов, равное числу коэффициентов в выражении рассматриваемой составляющей силы или момента, плюс шесть столбцов, полученных дифференцированием по начальным условиям либо трех уравнений движения центра

масс, либо углового движения. Число строк матрицы равно утроенному количеству точек плана эксперимента $3N$, в которых проводились измерения функций отклика.

После подбора в ходе итераций наилучшего приближения параметров одной составляющей момента производится подбор параметров другой составляющей. После подбора параметров вектора момента осуществляется подбор параметров составляющих аэродинамической силы. Этот процесс носит циклический характер и завершается по достижении желаемой точности приближения.

Поясним технику нахождения элементов матрицы частных производных на примере уравнений вращательного движения, введя следующие обозначения [1]

$$\begin{aligned} p_j &= \frac{\partial \vartheta}{\partial C_j}, & \dot{p}_j &= \frac{\partial \dot{\vartheta}}{\partial C_j}, & \ddot{p}_j &= \frac{\partial \ddot{\vartheta}}{\partial C_j}; \\ q_j &= \frac{\partial \psi}{\partial C_j}, & \dot{q}_j &= \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial C_j}, & \ddot{q}_j &= \frac{\partial \ddot{\psi}}{\partial C_j}; \\ g_j &= \frac{\partial \gamma}{\partial C_j}, & \dot{g}_j &= \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial C_j}, & \ddot{g}_j &= \frac{\partial \ddot{\gamma}}{\partial C_j}. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь точки над символами обозначают производные по времени и предполагается возможность обращения последовательности дифференцирования.

Продифференцируем (4) по искомым параметрам C_j , определяющим вектор момента \bar{M} , и с учетом принятых обозначений получим систему, состоящую из $3N$ дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \ddot{p}_j &= \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \dot{\vartheta}} + \frac{\partial \bar{M}}{\partial \dot{\vartheta}} \right) \dot{p}_j + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \bar{M}}{\partial \vartheta} \right) p_j + B_{\vartheta} \frac{\partial \bar{M}}{\partial C_j}, \\ \ddot{q}_j &= \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \dot{\psi}} + \frac{\partial \bar{M}}{\partial \dot{\psi}} \right) \dot{q}_j + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \psi} + \frac{\partial \bar{M}}{\partial \psi} \right) q_j + B_{\psi} \frac{\partial \bar{M}}{\partial C_j}, \\ \ddot{g}_j &= \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{\gamma}} + \frac{\partial \bar{M}}{\partial \dot{\gamma}} \right) \dot{g}_j + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \gamma} + \frac{\partial \bar{M}}{\partial \gamma} \right) g_j + B_{\gamma} \frac{\partial \bar{M}}{\partial C_j}, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где j — текущий индекс параметров, определяющих вектор \bar{M} ; B_{ϑ} , B_{ψ} , B_{γ} — множители, зависящие от параметров газовой среды и объекта, текущих значений вектора скорости, а также углов, определяющих направление скорости объекта по отношению к оси тела.

К числу искоемых параметров, как уже было сказано, следует отнести также начальные условия к уравнениям движения (5). Таким образом, к системе (15) следует добавить еще шесть уравнений чувствительности для начальных условий, при дифференцировании по которым третьи члены в правых частях (15) оказываются нулями.

Система (15), состоящая из $3N + 6$ дифференциальных уравнений, интегрируется при начальных условиях, получаемых дифференцированием по искомым параметрам начальных условий к уравнениям движения (5). Для уравнений чувствительности, полученных дифференци-

рованием по параметрам составляющих аэродинамического момента, начальные условия записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} p_j(0) &= 0, & \dot{p}_j(0) &= 0; \\ q_j(0) &= 0, & \dot{q}_j(0) &= 0; \\ g_j(0) &= 0, & \dot{g}_j(0) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

а при дифференцировании по начальным условиям движения в виде

$$\left. \begin{aligned} p_{\dot{\vartheta}_0}(0) &= 1, & \dot{p}_{\dot{\vartheta}_0}(0) &= 0, & p_{\ddot{\vartheta}_0}(0) &= 0, & \dot{p}_{\ddot{\vartheta}_0}(0) &= 1; \\ q_{\dot{\psi}_0}(0) &= 1, & \dot{q}_{\dot{\psi}_0}(0) &= 0, & q_{\ddot{\psi}_0}(0) &= 0, & \dot{q}_{\ddot{\psi}_0}(0) &= 1; \\ g_{\dot{\gamma}_0}(0) &= 1, & \dot{g}_{\dot{\gamma}_0}(0) &= 0, & g_{\ddot{\gamma}_0}(0) &= 0, & \dot{g}_{\ddot{\gamma}_0}(0) &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Для уравнений движения центра масс уравнения чувствительности строятся по той же схеме, с тем отличием, что в этом случае в правой части системы уравнений вида (15) будут отсутствовать вторые слагаемые, поскольку уравнения движения центра масс не содержат линейных координат в явном виде.

Изложенный выше алгоритм восстановления аэродинамических сил и моментов по данным траекторных измерений реализован в виде программного продукта, с помощью которого проводилось его (алгоритма) тестирование.

Представление составляющих аэродинамической силы и момента

В рамках предлагаемого алгоритма рассматриваются зависимости аэродинамической силы и момента от углов атаки и скольжения, определяющих положение объекта по отношению к вектору его скорости, от составляющих угловой скорости объекта относительно связанных осей и от числа Маха. Углы атаки α и скольжения β определяются через проекции скорости объекта на оси связанной системы координат следующим образом:

$$\alpha = -\arctg(V_{y1}/V_{x1}), \quad \beta = \arctg(V_{z1}/V_{x1}).$$

Искомые функции составляющих аэродинамической силы и аэродинамического момента в связанных осях представим в виде степенных зависимостей от углов атаки и скольжения (разложение в окрестности нулевых значений углов) и числа Маха (разложение в окрестности некоторого реального его значения в рассматриваемом опыте) с учетом их свойств четности или нечетности.

Следуя общепринятому приему, будем рассматривать коэффициенты составляющих аэродинамической силы и момента как произведение соответствующей „производной“ (определяемой делением, а не дифференцированием) на угол атаки или рысканья, а также на величину изменения числа Маха в рассматриваемом опыте. Сами производные будем представлять полиномами по

угловым аргументам и числу Маха. Поэтому, например, производную коэффициента составляющей статической нормальной силы по углу атаки, действующую в плоскости x_1y_1 , выразим следующим образом:

$$C_{n_y}^{\alpha}(\alpha, M) = \sum_{i=1}^I C_{n_y, 2i-2}^{\alpha, \alpha} \alpha^{2i-2} + \sum_{j=1}^J C_{n_y, j}^{\alpha, M} (M - M_*)^j, \quad (18)$$

где первая сумма в правой части выражает зависимость производной коэффициента составляющей статической подъемной силы от угла атаки α , а вторая сумма определяет ее зависимость от числа Маха, M_* — некоторое значение числа Маха, относительно которого наиболее удобно (в смысле упрощения зависимости) представить полиномиальное разложение. Смысл двойных индексов поясним ниже.

Для демпфирующей составляющей производной коэффициента нормальной силы примем аналогичную формулу с той разницей, что производную будем в дальнейшем умножать на соответствующую угловую скорость. Так, для коэффициента демпфирующей составляющей силы, действующей в плоскости x_1y_1 , запишем

$$C_{n_y}^{\omega_z} = \sum_{k=1}^K C_{n_y, 2k-2}^{\omega_z, \alpha} \alpha^{2k-2} + \sum_{l=1}^L C_{n_y, l}^{\omega_z, M} (M - M_*)^l. \quad (19)$$

Одиночный верхний индекс в левых частях (18) и (19) и первый из двойных верхних индексов у коэффициентов полиномиальных представлений относят коэффициент либо к представлению статической аэродинамической силы, как в (18), либо к демпфирующей составляющей, как в (19). Второй верхний индекс указывает, к какой зависимости — от угла или числа Маха — относится коэффициент. Такая индексация позволит в дальнейшем для обозначения коэффициентов полиномиальных представлений любых аэродинамических коэффициентов использовать один и тот же символ C с соответствующими индексами.

Итак, аэродинамические коэффициенты будем считать функциями углов атаки α , скольжения β , угловых скоростей относительно связанных осей и числа Маха M .¹ Так, коэффициент составляющей нормальной силы в плоскости x_1y_1 в условленных обозначениях можно представить в виде

$$C_{n_y}(\alpha, \omega_{z_1}, M) = (C_{n_y}^{\alpha, \alpha}(\alpha) + C_{n_y}^{\alpha, M}(M))\alpha + (C_{n_y}^{\omega_z, \alpha}(\alpha) + C_{n_y}^{\omega_z, M}(M)) \frac{\omega_{z_1} L}{V}, \quad (20)$$

¹ На короткой трассе зависимость от числа Рейнольдса выявить трудно, однако, имея в виду возможность обработки опытов с моделями одинаковой формы при разных давлениях среды, отметим, что и эту зависимость можно изучить, однако здесь не будем усложнять выражения зависимостей аэродинамических коэффициентов от числа Рейнольдса.

а коэффициент боковой силы имеет вид

$$C_{n_z}(\beta, \omega_{y_1}, M) = (C_{n_z}^{\beta, \beta}(\beta) + C_{n_z}^{\beta, M}(M))\beta + (C_{n_z}^{\omega_y, \beta}(\beta) + C_{n_z}^{\omega_y, M}(M)) \frac{\omega_{y_1} L}{V}. \quad (21)$$

В (20) и (21) сомножители в виде дроби — это безразмерные угловые скорости объекта относительно поперечных связанных осей, полученные умножением размерных угловых скоростей ω_{z_1} и ω_{y_1} на длину объекта L и делением на линейную скорость V в земной системе координат. В ряде случаев такая запись вместо обозначений ω_{y_1} , ω_{z_1} понадобится при получении уравнений чувствительности, поскольку составляющие угловой скорости и скорость V придется дифференцировать по искомым параметрам как зависимости от угловых и линейных координат и их производных по времени.

Для тела вращения производные коэффициентов (18) и (19) одинаковы.

Несколько иначе дело обстоит с тангенциальной составляющей C_t в связанной системе координат. Она зависит одновременно от углов атаки и скольжения. Представим ее в виде четных функций от углов атаки и скольжения, полагая, что зависимость от составляющих угловой скорости можно пренебречь, а зависимость от числа Маха следует представить функцией общего вида

$$C_t(\alpha, \beta, M) = \sum_{q=0}^Q C_{t_q}^M (M - M_*)^q + \sum_{s=2}^S C_{t_{2s-2}}^{\alpha} \alpha^{2s-2} + \sum_{r=2}^R C_{t_{2r-2}}^{\beta} \beta^{2r-2}. \quad (22)$$

Коэффициенты составляющих аэродинамических моментов относительно поперечных связанных осей запишем по аналогии с выражениями (20) и (21):

$$C_{m_y}(\beta, \omega_{y_1}, M) = (C_{m_y}^{\beta, \beta}(\beta) + C_{m_y}^{\beta, M}(M))\beta + (C_{m_y}^{\omega_y, \beta}(\beta) - C_{m_y}^{\omega_y, M}(M)) \frac{\omega_{y_1} L}{V}. \quad (23)$$

$$C_{m_z}(\alpha, \omega_{z_1}, M) = (C_{m_z}^{\alpha, \alpha}(\alpha) + C_{m_z}^{\alpha, M}(M))\alpha + (C_{m_z}^{\omega_z, \alpha}(\alpha) - C_{m_z}^{\omega_z, M}(M)) \frac{\omega_{z_1} L}{V}. \quad (24)$$

Для тела вращения оба коэффициента момента одинаковы. В случае отсутствия плоскостной симметрии в выражениях (18), (19), (22) и представлениях составляющих коэффициента момента в (23), (24) зависимости от углов атаки и рысканья придется представить выражениями общего вида (четность-нечетность будет отсутствовать).

Момент относительно продольной оси объекта в отсутствие органов управления, сообщающих вращение относительно этой оси, содержит только коэффициент,

учитывающий трение (сопротивление вращению), если объекту была сообщена значительная начальная угловая скорость (например, с целью стабилизации вращением). Угловая скорость относительно продольной оси, вызванная только гироскопическими эффектами за счет колебаний относительно поперечных осей без заданной начальной скорости вращения относительно продольной оси, невелика, и момент трения окажется незначительным. Примем выражение для коэффициента составляющей момента относительно продольной оси в виде

$$C_{m_x} = C_{m_x}^{\omega_x} \frac{\omega_{x1} L}{V}. \quad (25)$$

Коэффициенты $C_k^{i,j}$ в правых частях выражений (20)–(24) будем представлять в виде степенных полиномов от углов атаки, скольжения и числа Маха.

При выборе подходящей математической модели для аппроксимации экспериментальных данных весьма важным является вопрос о степени приближения этих данных математической моделью в процессе ее усложнения. Приемы оценивания значимости вновь вводимых параметров аэродинамических сил и моментов, а также адекватности математической модели будут рассмотрены в следующей части статьи.

Список литературы

- [1] *Charman G.T., Kirk D.B.* // AIAA J. 1970. N 4. P. 753–758.
- [2] *Менде Н.П.* Обратная задача нелинейной баллистики. I. Плоское движение. Препринт ФТИ РАН № 1326. Л., 1989. 44 с. (Mende N.P. // Gas Dynamics / Ed. by Yu.I. Koptev. Nova Science Publishers, Inc. (printed in the USA), 1992. P. 325–356).
- [3] *Викторов В.А., Садчиков Г.Д.* // Сб. матер. III научн. конф. Волжского регионального центра РА РАН „Современные методы проектирования и отработки ракетно-артиллерийского вооружения“. Саров, 2003. Т. I. С. 214–221.
- [4] *Осеева С.И., Викторов В.А., Неймаиш Л.М., Садчиков Г.Д., Фатеев Ю.А.* // Там же. С. 242–250.
- [5] *Бобашев С.В., Менде Н.П., Подласкин А.Б., Сахаров В.А., Бердников В.А., Викторов В.А., Осеева С.И., Садчиков Г.Д.* // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 10. С. 18–28.
- [6] *Лебедев А.А., Чернобровкин Л.С.* Динамика полета беспилотных летательных аппаратов. М.: Оборонгиз, 1962. 549 с.
- [7] *Ермаков С.М., Жиглявский А.А.* Математическая теория оптимального эксперимента. Уч. пос. М.: Наука, 1987. 320 с.
- [8] *Хартман К., Лецкий Э., Шеффер В.* и др. Планирование экспериментов в исследовании технологических процессов / Под ред. Э.К. Лецкого. М.: Мир, 1977. 552 с. (Hartmann K., Lezki E., Schäfer W.) et al. Versuchsplanung and auswertung in der Stoffwitschaft. Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, 1974).