01;03

Нелинейные эффекты в процессе затухания стоячей волны в газе

© О.М. Чекмарева, И.Б. Чекмарев

(Поступило в Редакцию 4 сентября 2007 г. В окончательной редакции 14 апреля 2008 г.)

На примере затухания стоячей волны малой амплитуды в неподвижном однородном газе исследуется проблема построения равномерного асимптотического приближения к решению уравнения Больцмана в предельном случае малых чисел Кнудсена ε. С помощью техники многих масштабов получено регулярное приближение справедливое до времени порядка ε^{-1}. Показано, что нелинейность кинетического уравнения приводит к нарушению монохроматичности начального возмущения и изменению характера затухания.

PACS: 51.10.+y

Известное интегродифференциальное уравнение Больцмана является фундаментальным уравнением кинетической теории газов. В случае, когда макроскопические скорости газа не превышают существенно скорости звука, безразмерное уравнение Больцмана содержит в качестве единственного характерного параметра отношение эффективной длины свободного пробега к характерной макроскопической длине (число Кнудсена). Очевидно, что малые числа Кнудсена соответствуют области гидродинамического приближения [1,2].

Наличие малого параметра открывает возможность построения асимптотических приближений с использованием аппарата теории возмущений. Основной целью является построение такого усеченного разложения, в котором уже первые несколько членов обеспечивали бы достаточно хорошее приближение к решению задачи во всей заданной области изменения независимых переменных. Говоря иначе, разложение должно быть равномерно пригодным и каждый член не должен быть более сингулярным, чем предыдущий. Поэтому при построении асимптотического разложения на каждом шаге процедуры нужно всегда проводить анализ и исключение комбинаций членов, являющихся источниками секулярного поведения.

Одним из широко известных приемов регуляризации является техника многомасштабных разложений [3,4]. Основная идея метода заключается в предположении, что конструируемое асимптотическое приближение зависит от малого параметра не только явно, но и через дополнительные масштабные переменные. Введение последних открывает возможность модификации разложения, что используется для его регуляризации. Впервые такая техника, но на основе качественной оценки источников секулярности, была применена для полного уравнения Больцмана в работе [5]. В дальнейшем авторы упомянутого исследования подвергли свой анализ существенным уточнениям [6,7].

В связи с этим значительный интерес представляет рассмотрение простейших ситуаций, допускающих наглядные аналитические решения и дающих возможность аккуратного построения асимптотического разложения. Так, в работах [8,9] для плоской волны были получены точные асимптотики с использованием техники многомасштабных разложений и линеаризованного уравнения Больцмана. Однако применение линеаризованного уравнения не позволяет выявить многих особенностей процесса релаксации.

В настоящей работе исследование затухания плоской стоячей волны в пространственно однородном неподвижном газе приводится на основе нелинейного одномерного уравнения Больцмана. Регуляризация макроскопических уравнений выполняется с помощью метода многих масштабов.

Предполагается, что в пространственно однородном неподвижном газе создано небольшое возмущение в виде одномерной стоячей волны вдоль координатной оси x. Для исследования затухания исходной неоднородности используется уравнение Больцмана. Чтобы облегчить в дальнейшем построение приближения, преобразуем уравнение к безразмерному виду. Для этого введем следующие масштабы:

$$f_s = \frac{n_s}{c_s^3}, \quad c_s^2 = \frac{kT_s}{m}, \quad L_s, \quad t_s = \frac{L_s}{c_s}.$$

Здесь n_s и T_s — плотность и температура невозмущенного газа, m — масса частицы, L_s — характерный макроскопический линейный размер. Тогда безразмерное одномерное уравнение Больцмана будет иметь вид [1,2,8]

$$\varepsilon\left(\frac{\partial f}{\partial t} + c_x \frac{\partial f}{\partial x}\right) = \int \left[f(\mathbf{c}_1')f(\mathbf{c}') - f(\mathbf{c}_1)f(\mathbf{c})\right] gbdbd\beta d\mathbf{c}_1. \tag{1}$$

Так как столкновительный интеграл в уравнении Больцмана описывает микропроцессы, а пространственные и временны́е изменения рассматриваются на макроскопических интервалах, то в безразмерном уравнении в качестве характерного параметра появляется число Кнудсена $\varepsilon = l/L_s$, где l — эффективная длина свободного пробега.

Обычно нас интересует эволюция гидродинамических переменных. Для этого необходимо иметь соотношения, связывающие последние с функцией распределения. Для плотности простого газа n, x-составляющей потока j и полной энергии w имеем

$$n=\int f d\mathbf{c}, \tag{2}$$

$$j=\int c_x f d\mathbf{c}, \tag{3}$$

$$w=\int \frac{c^2}{2} f d\mathbf{c}. \tag{4}$$

Пусть $u(x,t)$ — единственная отличная от нуля x-составляющая макроскопической скорости газа. Введем также гидростатическое давление $p=nT$, тогда

$$j=nu, \quad w=\frac{3}{2}p+\frac{1}{2}nu^2. \tag{5}$$

Так как в работе рассматривается случай малых чисел Кнудсена, то будем искать асимптотическое приближение к решению уравнения (1) в виде разложения по степеням числа Кнудсена

$$f=f_0+\varepsilon f_1+\varepsilon^2 f_2+\varepsilon^3 f_3+\dots \tag{6}$$

Нулевым приближением, описывающим невозмущенное состояние газа, будет глобальное максвелловское распределение

$$f_0=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\exp\left(-\frac{c^2}{2}\right). \tag{7}$$

После подстановки разложения (6) в интегралы (2)–(4) с учетом (7) получим для плотности, потока и энергии следующие разложения:

$$n=1+\varepsilon n_1+\varepsilon^2 n_2+\dots, \quad n_k=\int f_k d\mathbf{c}; \tag{8}$$

$$j=\varepsilon j_1+\varepsilon^2 j_2+\dots, \quad j_k=\int c_x f_k d\mathbf{c}; \tag{9}$$

$$w=\frac{3}{2}+\varepsilon w_1+\varepsilon^2 w_2+\dots, \quad w_k=\int \frac{c^2}{2} f_k d\mathbf{c}. \tag{10}$$

Используя первое соотношение в (5), после деления ряда (9) на (8) найдем

$$u=\varepsilon u_1+\varepsilon^2 u_2+\dots, \tag{11}$$

где введены обозначения

$$u_1=j_1, \quad u_2=j_2-n_1 j_1 \quad \text{и т.д.} \tag{12}$$

Подставив во второе соотношение в (5) ряды (8), (10), (11) и собрав члены с одинаковыми степенями ε, получим

$$p=1+\varepsilon p_1+\varepsilon^2 p_2+\dots, \tag{13}$$

где

$$p_1=\frac{2}{3}w_1, \quad p_2=\frac{2}{3}w_2-\frac{1}{3}u_1^2. \tag{14}$$

Определив температуру из уравнения состояния газа и подставив в него формулы (8) и (13), получим

$$T=\frac{p}{n}=1+\varepsilon T_1+\varepsilon^2 T_2+\dots, \tag{15}$$

$$T_1=p_1-n_1, \quad T_2=p_2-n_2-n_1T_1, \dots \tag{16}$$

Введем, следуя технике многих масштабов, вместо исходной переменной t последовательность „времен“ $t_k=\varepsilon^k t$. Тогда для производной по времени получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t_0}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t_1}+\dots \tag{17}$$

Теперь, подставив разложения (6) и (17) в уравнение Больцмана (1) и полагая, как обычно,

$$f_k=f_0\phi_k, \tag{18}$$

получим цепочку интегральных уравнений для последовательного определения функций ϕ_k

$$\begin{gathered} L\phi_1=0, \\ \frac{\partial\phi_1}{\partial t_0}+c_x\frac{\partial\phi_1}{\partial x}=L\phi_2+Q(\phi_1,\phi_1), \\ \frac{\partial\phi_1}{\partial t_1}+\frac{\partial\phi_2}{\partial t_0}+c_x\frac{\partial\phi_2}{\partial x}=L\phi_3+2Q(\phi_1,\phi_2), \end{gathered} \tag{19}$$

где

$$2Q(\phi_i,\phi_j)=\int f_0(\mathbf{c}_1)\big[\phi_i(\mathbf{c}_1')\phi_j(\mathbf{c}')+\phi_i(\mathbf{c}')\phi_j(\mathbf{c}_1') \\ -\phi_i(\mathbf{c}_1)\phi_j(\mathbf{c})-\phi_i(\mathbf{c})\phi_j(\mathbf{c}_1)\big]gbdbd\beta d\mathbf{c}_1, \tag{20}$$

$$L\phi_k=\int f_0(\mathbf{c}_1)\big[\phi_k(\mathbf{c}_1')+\phi_k(\mathbf{c}') \\ -\phi_k(\mathbf{c}_1)-\phi_k(\mathbf{c})\big]gbdbd\beta d\mathbf{c}_1. \tag{21}$$

Интегральные уравнения (19) в общем случае имеют вид

$$L\phi_k=g_k, \tag{22}$$

необходимым и достаточным условием разрешимости которых являются условия ортогональности

$$\int \psi_r f_0 g_k d\mathbf{c}=0, \tag{23}$$

где $\psi_0=1$, $(\psi_1,\psi_2,\psi_3)=c_i$, $\psi_4=c^2$ — пять инвариантов упругих столкновений. Для каждого рассматриваемого приближения ϕ_k находятся с точностью до линейной комбинации инвариантов столкновений

$$\omega_k=\alpha_k+\beta_{ki}c_i+\gamma_k c^2, \tag{24}$$

$$L\omega_k=0.$$

Пять свободных параметров α_k, β_{ki} и γ_k могут зависеть от координаты x и переменных $t_0, t_1, \dots$ и определяются дифференциальными уравнениями, вытекающими из условий ортогональности (23) для следующего шага. Поскольку соотношения (8)–(16) можно использовать для выражения α_k, β_{ki} и γ_k через макроскопические коэффициенты n_k, p_k, j_k, u_k, T_k, то условия разрешимости можно записать и относительно этих величин.

Пусть макроскопическое состояние газа в начальный момент определяется соотношениями

$$n = 1, \quad p = 1, \quad u = \varepsilon \sin x. \tag{25}$$

Отсюда для коэффициентов первого приближения следуют начальные условия

$$n_1 = 0, \quad p_1 = 0, \quad u_1 = \sin x. \tag{26}$$

Поскольку первое интегральное уравнение в (19) однородное, то ϕ_1 имеет вид

$$\phi_1 = \omega_1 = \alpha_1 + \beta_{1i} c_i + \gamma_1 c^2$$

или, используя (8)–(16),

$$\phi_1 = n_1 + \left(\frac{c^2}{2} - \frac{3}{2}\right) T_1 + u_1 c_x. \tag{27}$$

Перейдем к следующему приближению. Здесь из условий разрешимости (23) получим линеаризованные уравнения Эйлера

$$\frac{\partial n_1}{\partial t_0} + \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial t_0} + \frac{\partial p_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p_1}{\partial t_0} + \frac{5}{3}\frac{\partial u_1}{\partial x} = 0. \tag{28}$$

Из второго и третьего уравнений системы (28) следует, что u_1 и p_1 можно выразить через одну и ту же функцию φ_1 как

$$u_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \quad p_1 = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_0}, \tag{29}$$

которая должна удовлетворять однородному волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_0^2} - \frac{5}{3}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} = 0. \tag{30}$$

Кроме того, из первого и третьего выражений в (28) получим условие адиабатичности

$$\frac{\partial s_1}{\partial t_0} = 0, \quad s_1 = n_1 - \frac{3}{2} T_1. \tag{31}$$

Удовлетворяющее начальным условиям (28) решение уравнений (28)–(31) имеет следующий вид:

$$\begin{gathered} \varphi_1 = -C(t_1, \ldots) \cos x \cos a_0 t_0, \\ u_1 = C(t_1, \ldots) \sin x \cos a_0 t_0, \\ p_1(x, t_0) = -a_0 C(t_1, \ldots) \cos x \sin a_0 t_0, \\ s_1 = 0, \quad p_1 = \frac{5}{2} T_1, \quad a_0^2 = \frac{5}{3}, \quad C(0) = 1, \end{gathered} \tag{32}$$

где $C(t_1, \ldots)$ — функция медленных времен. Таким образом, решение уравнений (28) определяется с точностью до произвольного множителя в виде неизвестной функции медленных времен.

Метод многомасштабных разложений организован так, что для определения этой функции и уточнения решения необходимо исследовать следующее приближение. Однако прежде завершим рассмотрение второго приближения. Возвращаясь ко второму уравнению в (19), подставим в него ϕ_1 в виде (27) и исключим с помощью (28) производные по времени. В результате получим следующее интегральное уравнение для ϕ_2:

$$\left(\frac{c^2}{2} - \frac{5}{2}\right) c_x \frac{\partial T_1}{\partial x} + \left(c_x^2 - \frac{c^2}{3}\right) \frac{\partial u_x}{\partial x} = L\phi_2 + Q(\phi_1, \phi_1). \tag{33}$$

Поскольку ϕ_1 является инвариантом столкновений, то

$$\phi_1(\mathbf{c}_1') + \phi_1(\mathbf{c}') = \phi_1(\mathbf{c}_1) + \phi_1(\mathbf{c}),$$

$$\begin{aligned} &\phi_1^2(\mathbf{c}_1') + \phi_1^2(\mathbf{c}') - \phi_1^2(\mathbf{c}_1) - \phi_1^2(\mathbf{c}) \\ &\qquad = 2\phi_1(\mathbf{c}_1)\phi_1(\mathbf{c}) - 2\phi_1(\mathbf{c}_1')\phi_1(\mathbf{c}'). \end{aligned}$$

Тогда, подставив это выражение в (20), получим

$$2Q(\phi_1, \phi_1) = -L\phi_1^2. \tag{34}$$

Следовательно, решение уравнения (33) можно представить в виде суммы

$$\phi_2 = \omega_2 + h_2 + \frac{1}{2}\omega_1^2,$$

$$h_2 = -A_x \frac{\partial T_1}{\partial x_i} - B_{xx}\frac{\partial u_1}{\partial x}. \tag{35}$$

Как обычно, подстановка ϕ_2 в (33) приводит к интегральным уравнениям для функций A_x и B_{xx} [1]. В целях простоты в дальнейшем будем использовать их приближенные выражения

$$B_{xx} = \mu\left(c_x^2 - \frac{c^2}{3}\right), \quad A_x = \frac{2}{5}\lambda\left(\frac{c^2}{2} - \frac{5}{2}\right) c_x, \quad \lambda = \frac{15}{4}\mu. \tag{36}$$

Здесь μ и λ — коэффициенты сдвиговой вязкости и теплопроводности.

Как отмечалось выше, функция ω_2 может быть выражена через коэффициенты n_2, w_2, j_2. Вычислив условия ортогональности (23) для третьего уравнения в (19), получим для них дифференциальные уравнения

$$\frac{\partial n_1}{\partial t_1} + \frac{\partial n_2}{\partial t_0} + \frac{\partial j_2}{\partial x} = 0. \tag{37}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t_1} + \frac{\partial j_2}{\partial t_0} + \frac{\partial}{\partial x}\int f_0 c_x^2 \phi_2 d\mathbf{c} = 0, \tag{38}$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial t_1} + \frac{\partial w_2}{\partial t_0} + \frac{\partial}{\partial x}\int f_0 c_x \frac{c^2}{2}\phi_2 d\mathbf{c} = 0. \tag{39}$$

Уравнения (38) и (39) удобнее переписать следующим образом:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t_1}+\frac{\partial j_2}{\partial t_0}+\frac{2}{3}\frac{\partial w_2}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\int f_0\left(c_x^2-\frac{c^2}{3}\right)\phi_2 d\mathbf{c}=0,$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial t_1}+\frac{\partial w_2}{\partial t_0}+\frac{5}{2}\frac{\partial j_2}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\int f_0 c_x\left(\frac{c^2}{2}-\frac{5}{2}\right)\phi_2 d\mathbf{c}=0. \tag{40}$$

Интегралы, входящие в правые части этих уравнений, легко вычисляются. Так как

$$\int f_0\left(c_x^2-\frac{c^2}{3}\right)\omega_2 d\mathbf{c}=0$$

и

$$\int f_0 c_x\left(\frac{c^2}{2}-\frac{5}{2}\right)\omega_2 d\mathbf{c}=0,$$

то

$$\int f_0 c_x\left(\frac{c^2}{2}-\frac{5}{2}\right)\phi_2 d\mathbf{c}$$

$$=\int f_0 c_x\left(\frac{c^2}{2}-\frac{5}{2}\right)\left(h_2+\frac{1}{2}\omega_1^2\right)d\mathbf{c}$$

$$=-\frac{15}{4}\mu\frac{\partial}{\partial x}T_1+\frac{5}{2}u_1T_1,$$

$$\int f_0\left(c_x^2-\frac{c^2}{3}\right)\phi_2 d\mathbf{c}$$

$$=\int f_0\left(c_x^2-\frac{c^2}{3}\right)\left(h_2+\frac{1}{2}\omega_1^2\right)d\mathbf{c}$$

$$=-\frac{4}{3}\mu\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{1}{2}\int f_0 c_x^2\left(c_x^2-\frac{c^2}{3}\right)u_1^2 d\mathbf{c}$$

$$=-\frac{4}{3}\mu\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{2}{3}u_1^2.$$

Заменив в (40) с помощью соотношения (14) w_2 на p_2 и учитывая, что

$$\frac{5}{3}\frac{\partial}{\partial x}u_1T_1=-\frac{\partial}{\partial t_0}\frac{u_1^2}{3}-\frac{5}{4}\frac{\partial T_1^2}{\partial t_0},$$

получим систему уравнений для p_2 и j_2

$$\frac{\partial u_1}{\partial t_1}+\frac{\partial j_2}{\partial t_0}+\frac{\partial p_2}{\partial x}-\frac{4}{3}\mu\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial u_1^2}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t_1}+\frac{\partial p_2}{\partial t_0}+\frac{5}{3}\frac{\partial j_2}{\partial x}-\frac{5}{2}\mu\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}-\frac{5}{4}\frac{\partial T_1^2}{\partial t_0}=0. \tag{41}$$

Как и в первом приближении, удобно ввести потенциал функции j_2

$$j_2=\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}. \tag{42}$$

Тогда из первого уравнения (41) получим равенство

$$p_2=-\frac{\partial\varphi_2}{\partial t_0}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1}+\frac{4}{3}\mu\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}-u_1^2, \tag{43}$$

связывающее p_2 с φ_2. Подставив его во второе уравнение в (41), получим неоднородное волновое уравнение для φ_2

$$\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t_0^2}-\frac{5}{3}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2}$$

$$=-\frac{\partial}{\partial t_0}\left(2\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1}-\frac{7}{3}\mu\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}\right)-\frac{\partial}{\partial t_0}\left(u_1^2+\frac{5}{4}T_1^2\right). \tag{44}$$

Члены в первой скобке в правой части являются решением уравнения (30), идентичного однородной форме (44), и в данной ситуации формально играющие роль резонансной вынуждающей силы. Как следствие, это уравнение имеет растущее частное решение

$$\varphi_2^*=-t_0\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1}-\frac{7}{6}\mu\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}\right).$$

Чтобы избежать появления в решении эффекта ложного резонанса, необходимо так выбрать зависимость φ_1 от t_1, чтобы φ_2^* обращалось в нуль, т.е. необходимо ввести условие

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1}-\frac{7}{6}\mu\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}=0. \tag{45}$$

Заметим, что секулярная комбинация неоднородных членов имеет точно такой же вид, как и в линейном случае [8]. Соотношение (45) позволяет теперь определить зависимость функции $C(t_1,\ldots)$ в (32) от медленного времени t_1. Действительно, подставив φ_1 в (45), получим уравнение

$$\frac{\partial C}{\partial t_1}+\frac{7}{6}\mu C=0, \tag{46}$$

решение которого, удовлетворяющее приведенному в (32) начальному условию, будет

$$C(t_1,\ldots)=\exp\left(-\frac{7}{6}\mu t_1\right). \tag{47}$$

Заметим, что декремент затухания в (47) зависит как от коэффициента вязкости, так и от коэффициента теплопроводности, что соответствует результату, приведенному в монографии [10], но отличается от адиабатического приближения работы [6]. Возвращаясь к конкретному случаю стоячей волны, после подстановки в (44) решений (32) и (45) для u_1 и p_1 находим

$$\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t_0^2}-\frac{5}{3}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2}=\frac{1}{3}C^2a_0(1-2\cos 2x)\sin 2a_0t_0. \tag{48}$$

Уравнение (48) имеет частное решение

$$\overline{\varphi_2}=\frac{1}{6}C^2t_0\cos 2x\cos 2a_0t_0-\frac{1}{20}C^2a_0\sin 2a_0t_0. \tag{49}$$

Учитывая, что вся информация о начальном состоянии содержалась в первых членах разложения (7) и (26), то для второго приближения начальные условия будут $j_2 = 0$ и $p_2 = 0$.

Тогда, как следует из (42), (43) и (45), при $t = 0$ имеем

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_0} = \frac{1}{6}\mu \cos x - \frac{1}{2}(1 - \cos 2x). \tag{50}$$

Легко проверить, что удовлетворяющее первому начальному условию в (50) полное решение уравнения (48) будет

$$\varphi_2 = D_1 \cos x \sin a_0 t_0 + D_2 \cos 2x \sin 2a_0 t_0 + D_3 t_0 + \frac{1}{6} C^2 t_0 \cos 2x \cos 2a_0 t_0 - \frac{1}{20} C^2 a_0 \sin 2a_0 t_0, \tag{51}$$

где $D_1(t_1, \ldots)$, $D_2(t_1, \ldots)$ и $D_3(t_1, \ldots)$ — новые функции медленных времен, задача определения которых относится уже к следующему приближению. На данном этапе аналогично предыдущему второму приближению возможно только вычисление их начальных значений с помощью второго условия (50)

$$D_1(0) = \frac{1}{10}\mu a_0, \quad D_2(0) = \frac{1}{10} a_0, \quad D_3(0) = -\frac{1}{3}. \tag{52}$$

Далее, используя (42) и (51), находим

$$j_2 = -D_1 \sin x \sin a_0 t_0 - 2D_2 \sin 2x \sin 2a_0 t_0 - \frac{1}{3} C^2 t_0 \sin 2x \cos 2a_0 t_0. \tag{53}$$

Поскольку $u_2 = j_2 - n_1 u_1$, то из (53) с учетом решения (32) найдем

$$u_2 = -D_1 \sin x \sin a_0 t_0 - 2D_2 \sin 2x \sin 2a_0 t_0 + C^2 \left(\frac{3}{20} a_0 \sin 2a_0 t_0 - \frac{1}{3} t_0 \cos 2a_0 t_0 \right) \sin 2x. \tag{54}$$

Наконец, используя (11) и подставив в него найденные выражения для u_1 и u_2, получим асимптотическое приближение для скорости затухающих колебаний газа, справедливое до времени порядка ε^{-1}

$$u = \varepsilon \exp\left(-\frac{7}{6}\varepsilon\mu t\right) \Big[\sin x \cos a_0 t - \frac{\varepsilon t}{3} \exp\left(-\frac{7}{6}\varepsilon\mu t\right) \sin 2x \cos 2a_0 t\Big] + \varepsilon^2 \frac{3}{20} a_0 \exp\left(-\frac{7}{3}\varepsilon\mu t\right) \sin 2x \sin 2a_0 t - \varepsilon^2 (D_1 \sin x \sin a_0 t + 2D_2 \sin 2x \sin 2a_0 t) + O(\varepsilon^3). \tag{55}$$

Таким образом, нелинейные эффекты проявляются уже в членах главного порядка. К ним относятся нарушение монохроматичности исходного колебания, двойное увеличение декремента затухания и изменения самого характера процесса релаксации. Еще раз отметим, что определение функций $D_1(t_1)$ и $D_2(t_1)$ входит в задачу уже следующего приближения.

Заключение

Рассмотрение относительно простых модельных задач позволяет наглядно сравнить результаты применения различных методов, помогает лучше разобраться в более сложных случаях. Классическое разложение Гильберта является асимптотическим только на ограниченном интервале времени. Многомасштабная техника позволяет преодолеть эту трудность и расширить область применения разложения Гильберта на всю область диссипации даже в рассмотренном выше нелинейном случае. При этом оказывается, что в отличие от линеаризованного уравнения Больцмана в рассматриваемой нелинейной постановке в неоднородной части уравнений (41), вытекающих из условий разрешимости, можно выделить комбинацию „плохих“ членов, которые являются причиной секулярного поведения разложения и должны быть устранены, и остающуюся группу затухающих „хороших“ членов. В результате система уравнений остается неоднородной и имеет нетривиальное решение даже и при нулевых начальных условиях.

Список литературы

[1] *Коган М.Н.* Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.

[2] *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978. 495 с.

[3] *Найфэ А.Х.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.

[4] *Smith D.* Singular-perturbation Theory. L.: Cambridge Univ. Press, 1985. 500 p.

[5] *Мак-Кьюн Дж., Морзе Т., Сэндри Г.* // Некоторые вопросы кинетической теории газов. М.: Мир, 1965. С. 226–245.

[6] *Morse T.* // Phys. Fluids. 1964. Vol. 7. N 10. P. 1691–1695.

[7] *Klimas A., Ramnath R.V., Sandri G.* // J. Math. Anal. Appl. 1970. Vol. 32. P. 482–504.

[8] *Чекмарев И.Б., Чекмарева О.М.* // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 4. С. 159–165.

[9] *Чекмарев И.Б., Чекмарева О.М.* // Изв. РАН. МЖГ. 2006. № 4. С. 196–203.

[10] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.