

Обобщение функции Жуковского в применении к электрическому полю решеток, образованных наклонными металлическими лентами

© Л.Е. Щебелина

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,
194021 Санкт-Петербург, Россия

(Поступило в Редакцию 28 апреля 2008 г.)

Методом конформного отображения области, содержащей жалюзийную сетку, на область, содержащую сетку из цилиндрических прутков, получены аналитические выражения, описывающие электростатическое поле жалюзийной сетки. Данные выражения применимы для оптимизации устройств, используемых для определения параметров потоков заряженных частиц, а также для анализа эффектов, связанных с фокусировкой частиц на некоторые термоядерные мишени и сеточным удержанием плазмы.

PACS: 41.85.Ja

Введение

Заряженные решетки, состоящие из параллельных тонких пластин, наклоненных под произвольным углом α к оси (электроды типа жалюзи — рис. 1), получили широкое применение в приборах для усиления и регистрации потоков заряженных частиц, а также в некоторых источниках ионов, энергоанализаторах. При выборе оптимальных геометрических и электрических параметров решеток, а также систем из любого числа N таких решеток с заданными значениями α_i ($i = 1, 2, \dots, N$) возникает потребность в точном расчете электростатического поля вблизи пластин и между решетками. По-видимому, аналитическое решение существует только для решетки с $\alpha = 0$ [1]. Предлагаемый метод заключается в вычислении путем разложения по мультиполям ряда определенным образом подобранных полей в соответствующей при конформном отображении плоской сетки из параллельных круговых цилиндров (см. рис. 1). Поэтому метод можно применять в различных приближениях.

Расчет электростатического поля сетки, состоящей из параллельных проводящих цилиндров [2], может быть использован для определения поля решетки, состоящей из пластин. Это возможно, если известна функция, конформно отображающая внешность соответствующей решетки цилиндров безразмерного радиуса $R = r/a$ (где r — радиус цилиндра, a — полупериод решетки) на внешность решетки из пластин. При решении задачи в качестве отображающей функции используется выражение для комплексного потенциала сетки с незаряженными цилиндрами, помещенной в однородное электрическое поле, составляющее заданный угол α с ее плоскостью.

Будем считать, что пластины бесконечны в направлении, перпендикулярном плоскости рис. 1, $2l$ — ширина пластины, α_0 — угол наклона пластин к оси решетки, $2a_1$ — шаг решетки. Внешние поля создаются сплошными проводниками, находящимися на расстоянии d_1, d_2 и s_1, s_2 от решеток из цилиндров и пластин соответственно (см. рис. 1). Введем комплексные переменные z и z_1 в плоскостях x, y и x_1, y_1 как отношения $z = (x + iy)/a$ и $z_1 = (x_1 + iy_1)/a_1$. Пусть функция $z_1(z)$ устанавливает конформное соответствие между названными областями.

Комплексный потенциал поля в плоскости z_1 представим в виде

$$\Psi(z_1) = U + iV.$$

Подставим вместо z_1 его выражение через z

$$\Psi[z_1(z)] = u + iv.$$

Очевидно, что $\Psi(z) = \Psi[z_1(z)]$ будет представлять комплексный потенциал некоторого поля решетки цилиндров в плоскости z [2]. В соответствующих точках плоскостей z и z_1 имеют место равенства $U = u, V = v$, на пластинах $U = \text{const}$, следовательно, $u = \text{const}$ на цилиндрах в плоскости z . В работе [2] было показано, что комплексный потенциал результирующего поля $\Psi(z)$

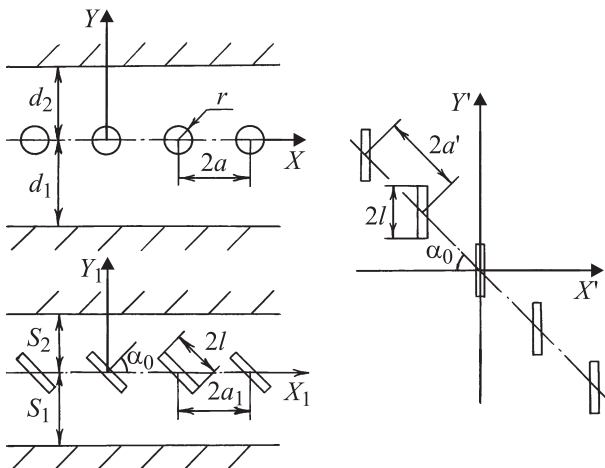


Рис. 1. Геометрия систем.

имеет вид

$$\Psi(z) = iE_0za - 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k}{k!} q_k \frac{d^k \ln \sin \pi z/2}{dz^k} + C, \quad (1)$$

где q_k — коэффициенты мультипольного разложения, E_0 — поле в отсутствие решетки, C — константа.

Соотношение между значениями полей в областях z и z_1 — имеет вид

$$\frac{d\Psi(z_1)}{dz_1} = \frac{d\Psi(z)}{dz} \frac{dz}{dz_1}.$$

Направление полей при удалении от сеток будет сохраняться, если выбрать $z_1(z)$ таким образом, чтобы $dz_1/dz \rightarrow 1$ при $z \rightarrow \infty$.

Рассматривая z в $\Psi(z)$ как функцию от z_1 , получим выражение для искомого комплексного потенциала $\Psi(z_1)$. Таким образом, задача сводится к нахождению отображающей функции $z_1(z)$ и вычислению ее производной.

Отметим, что для одиночного незаряженного цилиндра, помещенного в однородное поле E_0 , выражение $\Psi(z)$ упрощается и примет вид

$$\Psi(z) = iE_0z + iE_0 \frac{r^2}{z}.$$

Подчеркнем, что при $E_0 = 1$ это выражение есть известная функция Жуковского, устанавливающая конформное соответствие между внешностью круга и внешностью пластины [3]. Таким образом, функция $\Psi(z)$ при расчете поля решетки пластин может иметь то же значение, что и функция Жуковского при расчете поля пластины.

Построение отображающей функции

С учетом вышеизложенного и того, что пластины наклонены под углом α_0 к оси (см. рис. 1), в качестве отображающей функции используем выражение для комплексного потенциала решетки из незаряженных круговых цилиндров, находящихся во внешнем однородном электростатическом поле \hat{E}'_0 , направленном под тем же углом к оси решетки. В новой координатной плоскости x', y' ($z' = (x' + iy')/a'$, где a' — полупериод решетки в этой плоскости) получим

$$\begin{aligned} a'z'(z) = \Psi_x(z) + \Psi_y(z) &= iE'_{0y}za - E'_{0x}za \\ &- 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^{2k+1}}{(2k+1)!} \frac{d^{2k+1} \ln \sin(\pi z/2)}{dz^{2k+1}} \\ &\times (q'_{y,2k+1} - iq'_{x,2k+1}) + C_1, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\Psi_x(z)$ и $\Psi_y(z)$ — комплексные потенциалы параллельной E'_x и перпендикулярной E'_y составляющих вспомогательного при отображении комплексного поля

\hat{E}'_0 , а $q'_{x,2k+1}$ и $q'_{y,2k+1}$ — эквивалентные мультипольные заряды на цилиндрах, созданные компонентами поля E'_{0x} и E'_{0y} соответственно [2]. Здесь учтено, что из-за отсутствия заряда на цилиндре $q'_{2k} = 0$ [2].

Период полученной в плоскости x', y' решетки равен

$$a \exp(i\alpha') = \int_0^a \frac{dz'(z)}{dz} dz = aE'_0 e^{i(\pi - \alpha_0)}. \quad (3)$$

Он будет равен периоду a решетки круговых цилиндров, если положить вспомогательное поле E'_0 равным единице. Окончательно выражение для отображающей функции имеет вид

$$z_1(z) = z'(z) \exp[-i(\pi - \alpha_0)].$$

Определение мультипольных зарядов

$q'_{x,2k+1}$ и $q'_{y,2k+1}$

Мультипольные заряды должны быть выбраны так, чтобы вещественная часть полного комплексного потенциала (2) вспомогательного поля была постоянна на поверхности цилиндров. Для анализа выражения (2) вблизи поверхности цилиндров разложим входящую в него сумму, представляющую потенциал решетки $\Phi(z)$, в ряд Лорана по степеням z (см. [2]):

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= 2i \sum_{k=0}^{\infty} \left[(-1)^k q'_{y,2k+1} \frac{1}{z^{2k+1}} + z^{2k+1} E'_{0y} a G_{yk} \right] \frac{1}{2k+1} \\ &+ 2 \sum_{k=0}^{\infty} \left[(-1)^k q'_{x,2k+1} \frac{1}{z^{2k+1}} + z^{2k+1} E'_{0x} a G_{xk} \right] \frac{1}{2k+1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь G_{yk} и G_{xk} — линейные комбинации мультипольных зарядов $q'_{y,2k+1}$ и $q'_{x,2k+1}$ соответственно:

$$G_{yk} = \sum_{m=1}^{\infty} A_{km} (-1)^m 2mq_{y,2m-1} / (E_{0y}a), \quad (5)$$

$$G_{xk} = \sum_{m=1}^{\infty} A_{km} (-1)^m 2mq_{x,2m-1} / (E_{0x}a), \quad (6)$$

где A_{mk} — численные коэффициенты, симметричные по индексам m и k и равные $\pi^{2(m+k)} B_{m+k} / 2(m+k)(2m)!(2k)!$, B_{m+k} — числа Бернулли.

Тогда вещественная часть полного комплексного потенциала (2), представленного в виде ряда Фурье по азимутальному углу φ на поверхности цилиндра при $z = Re^{i\varphi}$, будет иметь форму

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[\Psi_x(\operatorname{Re}^{i\varphi}) + \Psi_y(\operatorname{Re}^{i\varphi})] &= \sum_{k=0}^{\infty} u_k \cos(2k+1)\varphi \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} v_k \sin(2k+1)\varphi, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$u_k = -E'_{0x} a R \delta_{k,0} + 2 \left[(-1)^k \frac{q'_{x,2k+1}}{R^{2k+1}} + R^{2k+1} E'_{0x} a G_{x,k} \right] \frac{1}{2k+1},$$

$$v_k = -E'_{0y} a R \delta_{k,0} + 2 \left[(-1)^k \frac{q'_{y,2k+1}}{R^{2k+1}} - R^{2k+1} E'_{0y} a G_{y,k} \right] \frac{1}{2k+1}.$$

Здесь $\delta_{k,0}$ — символ Кронекера.

Равенство нулю компонент Фурье u_k и v_k обусловит постоянство потенциала на поверхности цилиндра. Это и дает систему уравнений для определения мультипольных зарядов. В работе [2] было показано, что все четные мультипольные заряды оказываются пропорциональными заряду цилиндра q_0 , а все нечетные — внешнему полю E_0 . Поэтому было удобно ввести приведенные мультипольные заряды $p_{2k} = q_{2k}/q_0$ и $p_{2k+1} = q_{2k+1}/(E_0 a)$. В нашем случае положим $p'_{y,2k+1} = q'_{y,2k+1}/(E'_{0y} a)$, $p'_{x,2k+1} = q'_{x,2k+1}/(E'_{0x} a)$ и получим следующую систему уравнений для определения этих мультипольных зарядов, созданных комплексным вспомогательным полем E' :

$$p'_{y,2k+1} = (-1)^k R^{2(k+1)} \left(\frac{\delta_{k,0}}{2} + R^{2k} G_{y,k} \right), \quad (8)$$

$$p'_{x,2k+1} = (-1)^k R^{2(k+1)} \left(\frac{\delta_{k,0}}{2} - R^{2k} G_{x,k} \right). \quad (9)$$

Решение системы (8) представлено в [2]. Поступая аналогичным образом, можно найти и решение системы (9). При этом сомножители, входящие в выражения для приведенных мультипольных зарядов, будут иметь форму рациональных дробей и обращаться в единицу при $R = 0$. Они мало отличаются друг от друга при $R \leq 0.5$, а затем их значения быстро возрастают с ростом R и увеличением индекса k . Однако наличие малого множителя типа $R^{4(k+1)}$ в выражении для мультипольных зарядов позволяет использовать в случае $R \geq 0.5$ ограниченное число мультиполей. К тому же при $E'_{0x} \rightarrow 0$, т.е. при больших α_0 , также будет $q'_{x,2k+1} \rightarrow 0$.

Рассчитав численные значения мультипольных зарядов, можно считать, что функция $z_1(z)$, отображающая плоскость с решеткой кругов на плоскость с решеткой пластин, построена. Приведем также в октупольном приближении формулы для составляющих отображающую функцию потенциалов $\Psi_x(z)$ и $\Psi_y(z)$:

$$\Psi_y(\xi, \eta) = \sin \alpha_0 \left\{ \left[-\frac{a}{\pi} \eta + \pi p'_{y,1} t - \frac{\pi^3}{12} p'_{y,3} t(1 + 3f^2 - t^2) \right] + i \left[\frac{a}{\pi} \xi + \pi p'_{y,1} f - \frac{\pi^3}{12} p'_{y,3} f(1 + f^2 - 3t^2) \right] \right\}, \quad (10)$$

$$\Psi_x(\xi, \eta) = \cos \alpha_0 \left\{ \left[-\frac{a}{\pi} \xi + \pi p'_{x,1} f - \frac{\pi^3}{12} p'_{x,3} f(1 + f^2 - 3t^2) \right] - i \left[\frac{a}{\pi} \eta + \pi p'_{x,1} t - \frac{\pi^3}{12} p'_{x,3} t(1 + 3f^2 - t^2) \right] \right\}. \quad (11)$$

Здесь безразмерные переменные $\xi = \pi x/a$ и $\eta = \pi y/a$ входят в комплексы

$$t = \frac{\operatorname{sh} \eta}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi} \quad \text{и} \quad f = \frac{\sin \xi}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi}.$$

Связь геометрических параметров систем с решеткой цилиндров и решеткой пластин

Определим безразмерный радиус $R = r/a$, соответствующий при конформном отображении определенной безразмерной длине пластины $L = l/a$. Длина пластины находится из условия

$$\frac{dz'(z)}{dz} = 0. \quad (12)$$

Это условие указывает на то, что точкам „схода“ эквипотенциали $u_0 = 0$ с поверхности цилиндра в плоскости x, y соответствуют кромки пластин в плоскости x', y' . Такие точки во вспомогательном поле существуют всегда и расположены на диаметре, перпендикулярном направлению поля. Обозначим через φ_0 полярный угол одной из таких точек, тогда второму краю пластины будет соответствовать угол $\varphi_0 + \pi$. В этих точках на поверхности цилиндра электрическое поле равно нулю, следовательно, условие (12) дает равенство нулю производной мнимой части потенциала по углу φ

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} [\operatorname{Im}(\Psi_y + \Psi_x)] = 0. \quad (13)$$

Тогда с помощью формулы (4) получим уравнение для нахождения φ_0 :

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{R^{2j+1}} [q'_{y,2j+1} \sin(2j+1)\varphi_0 + q'_{x,2j+1} \cos(2j+1)\varphi_0] = 0, \quad (14)$$

и длина пластины есть разница

$$2l = \operatorname{Im} \Big|_{\varphi_0} (\Psi_y + \Psi_x) - \operatorname{Im} \Big|_{\varphi_0 + \pi} (\Psi_y + \Psi_x). \quad (15)$$

На рис. 2 приведена зависимость длины пластины L от R , рассчитанная с учетом всех мультиполей до q'_5 для углов наклона пластин $0, 45, 90^\circ$. Если ограничиться дипольным приближением и учесть, что для равенства

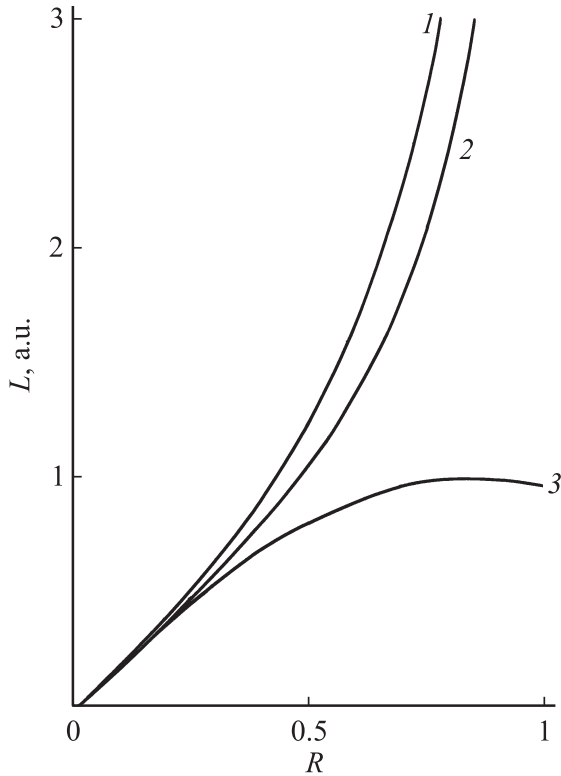


Рис. 2. Зависимость относительной длины пластины L от безразмерного радиуса R . 1 — $\alpha_0 = 0$, 2 — 45° , 3 — 90° .

периодов решеток принято $E_{0y} = \sin \alpha_0$ и $E_{0x} = \cos \alpha_0$, из (10) и (11) можно получить

$$L = R \sin(\alpha_0 - \varphi_0) + \frac{\pi R^2}{2(\operatorname{ch} \eta_0 - \cos \xi_0)} \left[\frac{\sin \alpha_0 \sin \xi_0}{1 + \frac{\pi^2 R^2}{12}} - \frac{\cos \alpha_0 \operatorname{sh} \eta_0}{1 - \frac{\pi^2 R^2}{12}} \right], \quad (16)$$

где

$$\varphi_0 = -\operatorname{arctg} \left[\operatorname{ctg} \alpha_0 \frac{1 + \frac{\pi^2 R^2}{12}}{1 - \frac{\pi^2 R^2}{12}} \right],$$

$$\xi_0 = \pi R \cos \varphi_0, \quad \eta_0 = \pi R \sin \varphi_0.$$

Для практически интересных случаев это выражение дает хорошие результаты.

Отметим, что в случае вспомогательного поля, перпендикулярного плоскости решетки ($\alpha_0 = \pi/2$, $\varphi_0 = 0$), в плоскости z_1 получим плоскую решетку пластин. Такое поле отображает круг с R , изменяющимся от 0 до 1, на отрезок длиной $2R > L > R$. Если поле параллельно плоскости решетки ($\alpha_0 = 0$, $\varphi_0 = \pi/2$), то при отображении получим пластины, перпендикулярные оси решетки с $L \geq 2R$.

Определим теперь связь между расстояниями от сетки до внешних электродов d_1 и d_2 в плоскости z с соответствующими величинами s_1 и s_2 в плоскости z_1 в случае, когда эти расстояния в несколько раз превышают период сетки $2a$. В этом случае из формул (10) и (11)

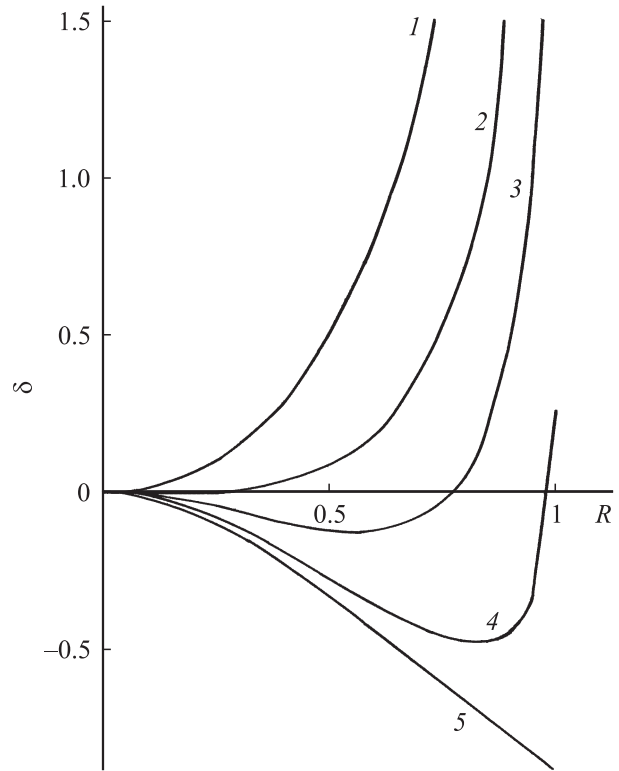


Рис. 3. Зависимости $\delta(R)$ при различных углах наклона пластин. 1 — $\alpha_0 = 0$, 2 — 45° , 3 — 60° , 4 — 75° , 5 — 90° .

получим следующую асимптотическую связь координат возле внешних электродов

$$x_1 + iy_1 = -\frac{1}{2} \pi a \sin 2\alpha_0 (p'_{x,1} + p'_{y,1}) \operatorname{sign} y + i[y + \pi a (p'_{x,1} \cos^2 \alpha_0 - p'_{y,1} \sin^2 \alpha_0) \operatorname{sign} y]. \quad (17)$$

Это означает, что расстояния от сеток до внешних электродов связаны следующими соотношениями:

$$s_1 = d_1 + \delta, \quad (18)$$

$$s_2 = d_2 + \delta,$$

где обозначено

$$\delta = \pi (p'_{x,1} \cos^2 \alpha_0 - p'_{y,1} \sin^2 \alpha_0) a.$$

График зависимостей $\delta(R)$ для разных углов наклона пластин приведен на рис. 3.

Поле решетки пластин

Найдем зависимость между компонентами электрического поля E_x и E_y в плоскости x, y и E_{1x} и E_{1y} в плоскости x_1, y_1 . Для этого воспользуемся соотношени-

ем между значениями полей (см. Введение), что дает

$$E_{1x} - iE_{1y} = \frac{E_x - iE_y}{dz'/dz} [-\exp(-i\alpha_0)], \quad (19)$$

где производная отображающей функции $z'(z)$ дает величину, сопряженную вспомогательному полю $\hat{E}' = E'_x + iE'_y$ (на большом расстоянии от решетки эта величина равна $\hat{E}'_0 = E_{0x} + iE_{0y}$). Из (19) следует, что напряженность искомого поля можно найти по формуле

$$E_1 \exp(-i\alpha_1) = \frac{E}{E'} \exp[-i(\alpha + \alpha_0 - \alpha')], \quad (20)$$

где $\alpha, \alpha_1, \alpha'$ — аргументы комплексных величин $\hat{E}, \hat{E}_1, \hat{E}'$ соответственно.

Вследствие выполнения граничных условий на бесконечности и на поверхности пластины и того, что $E_0 = E_{01}$, связь параметров q_0 и E_0 с потенциалами электродов для жалюзийной решетки сохраняется в том же виде, в каком приведена в (2) для решетки цилиндров.

Заключение

Полученные результаты, в сочетании с представленными в [4], могут быть использованы для описания прохождения заряженных частиц через набор сетчатых электродов нескольких конфигураций, а также технических устройств, в которых имеет место такое прохождение. Одним из таких устройств является энергетический анализатор, тормозящее поле которого создается решеткой с плоскими электродами, перпендикулярными ее плоскости. Отметим, что максимальные значения порога запираения Δu_m вдоль оси x равны у сеток с соответствующими при конформном отображении R и L . Так, геометрически прозрачной сетке с $L = 1$ соответствует $R = 0.426$.

Полученные результаты также могут быть использованы для оптимизации фокусировки частиц на термоядерные мишени в некоторых сценариях инициирования микровзрывов (см., например, [5,6]) и некоторых установок с удержанием плазмы электрическими полями (см., например, [7–10] и библиографию в этих работах).

Список литературы

- [1] Смайт В. Электростатика и электродинамика. М.: ИЛ, 1954.
- [2] Константинов О.В., Насибуллаев Ш.К., Щебелина Л.Е. // ЖТФ. 1982. Т. 52. Вып. 12. С. 2345–2352.
- [3] Лойцманский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978.
- [4] Щебелина Л.Е. // ЖТФ. 2007. Т. 77. Вып. 1. С. 141–142.
- [5] Perkins L.J., Orth C.D., Tabak M. // Nucl. Fusion. 2004. Vol. 44. P. 1097–1117.
- [6] Shmatov M.L. // JBIS. 2005. Vol. 58. P. 74–81.
- [7] Гончаров Г.А. // УФН. 2001. Т. 171. С. 894–901.

- [8] Nebel R.A., Strange S., Park J. et al. // Phys. Plasmas. 2005. Vol. 12. P. 012 701.
- [9] Shchebelina L.E. // Book of Abstracts of IFSA 2007. 5th Int. Conf. on Inertial Fusion Sciences and Applications. Kobe, Japan. September 9–14, 2007. P. 290.
- [10] Shchebelina L.E. // Abstracts of PLASMA 2007. Int. Conf. on Research and Applications of Plasma, Greifswald, Germany. October 16–19, 2007. P. 40.