

01;03

Скачок химического потенциала при испарении ферми-газа

© А.А. Костиков,¹ А.В. Латышев,² А.А. Юшканов²¹ МАТИ — Российский государственный технологический университет им. К.Э. Циолковского, 121552 Москва, Россия² Московский государственный областной университет, 105005 Москва, Россия

e-mail: alkostikov@yandex.ru, avlatyshev@mail.ru, yushkanov@inbox.ru

(Поступило в Редакцию 11 декабря 2008 г. В окончательной редакции 24 июля 2008 г.)

Исследована зависимость коэффициента скачка химического потенциала от коэффициента испарения для случая, когда испаряющейся компонентой является ферми-газ. Концентрация испаряющейся компоненты предполагается много меньшей концентрации несущего газа. На основании аналитического решения задачи получено выражение скачка химического потенциала для случая, когда частота столкновений молекул испаряющейся компоненты постоянна.

PACS: 05.20.Dd, 05.30.Fk

Введение

В последнее время наблюдается растущий интерес к задачам, связанным с поведением газов в режимах, когда их квантовыми свойствами пренебречь нельзя [1]. Большой интерес вызывает также вопрос о поведении смесей этих газов. Наиболее часто рассматриваемыми „квантовыми“ газами являются ^3He и ^4He . Отметим, что ^3He — это ферми-газ, а ^4He — бозе-газ. Такое сочетание различных квантовых статистик вызывает особый интерес к их смесям [2].

Много работ посвящено также свойствам растворов этих газов [3,4]. В то же время граничные задачи для таких смесей остаются малоисследованными. К таким задачам относится задача о поведении смеси квантовых газов вблизи границы испарения. Рассмотрим наиболее часто встречающийся случай разбавленной смеси. Пусть концентрация молекул одного газа n_1 много меньше концентрации молекул другого газа n_2 : $n_1 \ll n_2$. Рассмотрим задачу об испарении первого газа в смесь газов.

Далее задачу будем рассматривать в более общей постановке, учитывая возможность и других приложений. Пусть имеется смесь двух квантовых газов. Рассматривается задача об испарении ферми-газа в эту смесь при условии, что его концентрация много меньше концентрации второй компоненты.

Постановка задачи и основные уравнения

Рассмотрим процесс испарения с плоской поверхности в бинарную газовую смесь. Предполагается, что концентрация испаряющегося компонента смеси n_1 много меньше концентрации неиспаряющегося компонента n_2 : $n_1 \ll n_2$ (случай разбавленной смеси). Отметим, что для большинства наиболее важных приложений это условие выполняется.

В квазиклассическом приближении уравнение Больцмана для бинарной газовой смеси имеет вид [5]

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v}_i \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{r}_i} = J_{ii} + J_{ij}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2. \quad (1)$$

Здесь f_i — функция распределения i -го компонента смеси, J_{ii} и J_{ij} — интегралы столкновений молекул i -го компонента между собой и с молекулами j -го компонента соответственно.

Отметим, что $J_{11} \sim n_1^2$, а $J_{12} \sim n_1 n_2$ (так как $f_i \sim n_i$). Величина $\varepsilon = n_1/n_2$ является малым параметром ($\varepsilon \ll 1$), либо $n_1 \ll n_2$. Очевидно, что $|J_{11}|/|J_{12}| \sim \varepsilon$. Поэтому в первом приближении по ε величиной J_{11} можно пренебречь по сравнению с J_{12} . Кроме того, в этом приближении по ε воздействием первого компонента на функцию распределения второго можно пренебречь. Поэтому в условиях рассматриваемой задачи функцию распределения второго компонента газовой смеси можно считать равновесной со средней скоростью $U_2 = 0$ и постоянными температурой T и концентрацией n_2 .

Величину J_{12} можно аппроксимировать кинетической моделью типа Бхатнагара–Гросса–Крука (БГК) [6,7]. Тогда с учетом (1) кинетическое уравнение для первого компонента примет вид

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{r}} = \nu_1 (f_{\text{eq}} - f), \quad (2)$$

где

$$f_{\text{eq}} = \left[1 + \exp \left(\frac{mv^2}{2kT} - \frac{\mu(\mathbf{r})}{kT} \right) \right]^{-1},$$

f_{eq} — равновесная фермиевская функция распределения для первого компонента, k — постоянная Больцмана, ν_1 — эффективная частота столкновений для молекул первого компонента, $\mu(\mathbf{r})$ — химический потенциал первого компонента, T — температура смеси, считающаяся постоянной.

Возьмем декартову систему координат с центром, на поверхности с которой происходит испарение. Ось x_1 проведем перпендикулярно поверхности. При испарении с поверхности вдали от поверхности существует постоянный градиент концентрации первого компонента

$$g_n = \left(\frac{dn}{dx_1} \right)_{x_1=\infty}.$$

Здесь

$$n(x_1) = \int f(x_1, \mathbf{v}) d\Omega, \quad d\Omega = \frac{(2s+1)d^3p}{(2\pi\hbar)^3}$$

— концентрация (числовая плотность) первого компонента, \mathbf{p} — импульс молекул первого компонента.

Будем считать испарение слабым, т.е. предположим, что относительное изменение концентрации первого компонента на длине свободного пробега молекул l много меньше единицы:

$$|G_n| \ll 1, \quad G_n = \frac{l}{n_s} |g_n|.$$

Здесь n_s — концентрация насыщенного пара (газа) первого компонента на поверхности испарения, соответствующая температуре поверхности $T_s \equiv T$.

В этих условиях задача допускает линеаризацию. Предварительно перейдем к безразмерной скорости $\mathbf{C} = \sqrt{\beta}\mathbf{v}$, $\beta = m/(2kT)$, безразмерной координате $x = v_1\sqrt{\beta}x_1$ и безразмерному химическому потенциалу $\alpha(x) = \mu(x)/(kT)$. Теперь уравнение (2) можно записать в виде

$$C_x \frac{\partial f}{\partial x} = f_F(x, C) - f(x, \mathbf{C}). \quad (3)$$

Здесь $f_F(x, C)$ — локально равновесная фермиевская функция распределения,

$$f_F(x, C) = [1 + \exp(C^2 - \alpha(x))]^{-1}.$$

Линеаризацию задачи проведем относительно абсолютного фермиана

$$f_F^s \equiv f_F^s(C, \alpha_s) = [1 + \exp(C^2 - \alpha_s)]^{-1},$$

где α_s — значение безразмерного химического потенциала, соответствующее температуре поверхности $T \equiv T_s$ и концентрации насыщенного пара при этой температуре.

Безразмерный химический потенциал будем линеаризовать относительно величины α_s , т.е. возьмем $\alpha(x) = \alpha_s + a(x)$. Линеаризуя локально равновесную фермиевскую функцию распределения относительно f_F^s , получаем

$$f_F^s(x, C) = f_F^s(C, \alpha_s) + g(C, \alpha_s)a(x),$$

где

$$g(C, \alpha_s) = \exp(C^2 - \alpha_s)(1 + \exp(C^2 - \alpha_s))^{-2}.$$

Функцию распределения будем искать в виде

$$f(x, \mathbf{C}) = f_F^s(C, \alpha_s) + g(C, \alpha_s)h(x, C_x). \quad (4)$$

С помощью (4) уравнение (3) записывается в виде

$$C_x \frac{\partial h}{\partial x} = a(x) - h(x, C_x). \quad (5)$$

Величину безразмерного относительного отклонения химического потенциала от его значения на стенке $a(x) = \alpha(x) - \alpha_s$ найдем с помощью закона сохранения числа частиц

$$\int f(x, \mathbf{C}) d\Omega = \int f_F(x, C) d\Omega.$$

Закон сохранения числа частиц приводит к уравнению

$$\int [h(x, \mathbf{C}) - a(x)]g(C, \alpha_s)d^3C = 0,$$

откуда находим

$$a(x) = \frac{\int h(x, C_x)g(C, \alpha_s)d^3C}{\int g(C, \alpha_s)d^3C}. \quad (6)$$

Нетрудно найти, что

$$\int g(C, \alpha_s)d^3C = 4\pi g_0(\alpha_s),$$

где

$$g_0(\alpha_s) = \int_0^\infty g(C, \alpha_s)C^2 dC = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dC}{1 + \exp(C^2 - \alpha_s)}.$$

Числитель выражения (6) преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} & \int h(x, C_x)g(C, \alpha_s)d^3C \\ &= \int_{-\infty}^\infty h(x, C_x)dC_x \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{\exp(C^2 - \alpha_s)dC_y dC_z}{(1 + \exp(C^2 - \alpha_s))^2} \\ &= \int_{-\infty}^\infty f_F(C_x, \alpha_s)h(x, C_x)dC_x. \end{aligned}$$

Следовательно, согласно (6), отклонение безразмерного химического потенциала равно

$$a(x) = \frac{1}{4g_0(\alpha_s)} \int_{-\infty}^\infty f_F(\mu, \alpha_s)h(x, \mu)d\mu. \quad (7)$$

Таким образом, кинетическое уравнение (5) для задачи об испарении имеет с учетом (7) следующий вид

$$\begin{aligned} & \mu \frac{\partial h}{\partial x} + h(x, \mu) \\ &= \frac{1}{4g_0(\alpha_s)} \int_{-\infty}^\infty f_F(\mu', \alpha_s)h(x, \mu')d\mu', \quad \mu = C_x. \quad (8) \end{aligned}$$

Формулировка граничных условий

Рассмотрим граничное условие на поверхности испарения для молекул первого компонента, учитывающее влияние свойств поверхности, путем введения коэффициента испарения q (см. [8,9]):

$$f(0, \mathbf{C}) = qf_F^s(C, \alpha_s) + (1 - q)f_F^0(C, \alpha_0), \quad C_x = 0, \quad (9)$$

где

$$f_F^0(C, \alpha_0) = [1 + \exp(C^2 - \alpha_0)]^{-1}.$$

Величина α_0 определяется из условия непротекания для молекул, отразившихся от поверхности без конденсации на ней (вероятность такого процесса равна $1 - q$)

$$(1 - q) \int C_x [f_F^0(C, \alpha_0)\theta_+(C_x) + f(0, \mathbf{C})\theta_+(-C_x)] d\Omega = 0,$$

где $\theta_+(x)$ — функция Хэвисайда, $\theta_+(x) = 1$, $x > 0$; $\theta_+(x) = 0$, $x < 0$.

Условие непротекания преобразуем, учитывая определение функции Хэвисайда к виду

$$\int_{C_x > 0} C_x f_F^0(C, \alpha_0) d^3C + \int_{C_x < 0} C_x f(0, \mathbf{C}) d^3C = 0. \quad (10)$$

Граничное условие на стенке для функции $h(x, C_x)$ выведем из условия (10). Подставим в (10) функцию (4), учитывая условие (9), а также результат следующей линеаризации:

$$\begin{aligned} f_F^0(C, \alpha_0) &= \frac{1}{1 + \exp(C^2 - \alpha_0)} \\ &= \frac{1}{1 + \exp(C^2 - \alpha_s - (\alpha_0 - \alpha_s))} \\ &= f_F^s(C, \alpha_s) + g(C, \alpha_s)(\alpha_0 - \alpha_s). \end{aligned}$$

В результате подстановки получим граничное условие на стенке

$$h(0, \mu) = (1 - q)(\alpha_0 - \alpha_s), \quad \mu > 0. \quad (11)$$

Вдали от поверхности — вне слоя Кнудсена толщиной порядка длины свободного пробега молекул — функция $h(x, C_x)$ имеет вид

$$h(x, \mu) = h_{as}(x, \mu) + o(1), \quad C_x = \mu, \quad x \rightarrow +\infty, \quad (12)$$

где

$$h_{as}(x, \mu) = A_\alpha + G_\alpha(x - \mu),$$

где G_α — градиент безразмерного химического потенциала, заданный вдали от стенки

$$G_\alpha = \left(\frac{d\alpha(x)}{dx} \right)_{x=+\infty},$$

A_α — скачок химического потенциала — неизвестная величина, которая находится из решения задачи.

Подставив функцию $h_{as}(x, \mu)$ в определение безразмерного химического потенциала (6), получим асимптотическое распределение этого потенциала

$$a_{as}(x) = A_\alpha + G_\alpha x, \quad x \rightarrow +\infty.$$

Отсюда следует, что $A_\alpha = a_{as}(0) = \alpha_{as}(0) - \alpha_s$, т.е. скачок химического потенциала определяется как разность между экстраполированным значением химического потенциала на стенке и его значением непосредственно у стенки.

Величину $\alpha_0 - \alpha_s$ найдем из условия непротекания (10). В явном виде это условие имеет вид

$$\begin{aligned} \int_{C_x > 0} C_x [f_F^s(C, \alpha_s) + g(C, \alpha_s)(\alpha_0 - \alpha_s)] d^3C \\ + \int_{C_x < 0} C_x [f_F^s(C, \alpha_s) + g(C, \alpha_s)h(0, C_x)] d^3C = 0. \end{aligned}$$

Заметим, что сумма интегралов от первого слагаемого из каждой квадратной скобки дает нуль, поэтому получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} (\alpha_0 - \alpha_s) \int_{C_x > 0} C_x g(C, \alpha_s) d^3C \\ + \int_{C_x < 0} C_x g(C, \alpha_s) h(0, C_x) d^3C = 0. \end{aligned}$$

Второй интеграл, который вычисляется по отрицательному полупространству, вычислим с помощью закона сохранения импульса (точнее, x -компоненты импульса). Для этого в правой части очевидного равенства

$$\begin{aligned} \int_{C_x < 0} C_x g(C, \alpha_s) h(0, C_x) d^3C = \int C_x g(C, \alpha_s) h(0, C_x) d^3C \\ - \int_{C_x > 0} C_x g(C, \alpha_s) h(0, C_x) d^3C \end{aligned}$$

заменяем $h(0, C_x)$ из первого интеграла на $h_{as}(0, C_x)$, а $h(0, C_x)$ из второго интеграла заменим на $(1 - q)(\alpha_0 - \alpha_s)$ из граничного условия (11). Затем, после вычисления необходимых интегралов, приходим к уравнению, из которого находим

$$\alpha_0 - \alpha_s = \frac{4g_2(\alpha_s)}{3g_1(\alpha_s)} \frac{G_\alpha}{q}. \quad (13)$$

Здесь

$$g_n(\alpha_s) = \int_0^\infty C^{n+2} g(C, \alpha_s) dC, \quad n = 1, 2.$$

Вычисляя первые два из этих интегралов, получим

$$g_1(\alpha_s) = \frac{1}{2} \ln(1 + e^{\alpha_s}), \quad g_2(\alpha_s) = \frac{3}{4} l(\alpha_s),$$

$$l(\alpha_s) = \int_0^\infty \ln(1 + \exp(\alpha_s - C^2)) dC.$$

Следовательно, равенство (13) может быть записано в явном виде

$$\alpha_0 - \alpha_s = \frac{2l(\alpha_s)}{\ln(1 + e^{\alpha_s})} \frac{G_\alpha}{q}.$$

Теперь граничное условие (11) выведено полностью

$$h(0, \mu) = B, \quad \mu > 0,$$

где

$$B = \frac{1 - q}{q} \frac{2l(\alpha_s)}{\ln(1 + e^{\alpha_s})} G_\alpha. \quad (14)$$

Итак, граничная задача состоит в нахождении такого решения уравнения (8), которое удовлетворяет граничным условиям (14) и (12). Далее величину α_s будем везде обозначать через α .

Коэффициент диффузии и массовая скорость

Функция

$$f_{as}(x, C) = f_F^s(X, \alpha) + g(C, \alpha)h_{as}(x, C_x),$$

где $h_{as}(x, \mu) = A_\alpha + G_\alpha(x - \mu)$, называется [7,8] функцией распределения Чепмена–Энскога.

С помощью функции $h_{as}(x, \mu)$ вычислим коэффициент диффузии D_{12} . Диффузионный поток \mathbf{i} возникает вследствие наличия в газе градиента плотности $\nabla\rho$, поэтому при малых $\nabla\rho$ имеем $\mathbf{i} = -D_{12}\nabla\rho$ [10]. Отсюда, согласно постановке задачи,

$$D_{12} = -\frac{i_x}{\rho'_x} = -\frac{m \int f_{as} v_x d\Omega}{m \int (f_{as})'_x d\Omega}.$$

Безразмерную координату x заменим здесь на размерную $x_1 = x/(\nu_1\sqrt{\beta})$ и перейдем к интегрированию по безразмерной скорости. В результате имеем

$$D_{12} = \frac{2kT}{3m\nu_1} \frac{g_2(\alpha)}{g_0(\alpha)}. \quad (15)$$

Отметим, что при $\alpha \rightarrow -\infty$ этот результат переходит в классический [9]. В самом деле, используя асимптотику

$$g_2(\alpha) = e^\alpha \frac{3\sqrt{\pi}}{8}, \quad g_0(\alpha) = e^\alpha \frac{\sqrt{\pi}}{4}, \quad \alpha \rightarrow -\infty,$$

получим известный результат

$$D_{12} = \frac{kT}{m\nu_1}.$$

Отметим, что в рассматриваемом подходе коэффициент диффузии D_{12} рассматривается в качестве эмпирической величины. Например, для смеси газов ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$ при температуре 23 К имеем [11]

$$D_{12} \simeq 10^{-3} \text{ cm}^2/\text{s}.$$

Найдем массовую скорость испаряющейся компоненты бинарного газа в направлении оси x . По определению, массовая скорость в направлении оси x равна

$$U_x = \frac{1}{N} \int f v_x d\Omega, \quad N = \int f d\Omega.$$

Вставим это выражение в определение коэффициента диффузии. Получим

$$D_{12} = \frac{\int f_{as} v_x d\Omega}{N} \frac{N}{\int (f_{as})'_x d\Omega} = -U_x \frac{N}{\int (f_{as})'_x d\Omega}.$$

Отсюда нетрудно видеть, что

$$D_{12} = U_x N \left[2\nu_1 \sqrt{\beta} \int_0^\infty g(C, \alpha) C^2 dC \right]^{-1} G_\alpha^{-1},$$

или, перейдя к безразмерной массовой скорости $W_x = \sqrt{\beta} U_x$, имеем

$$D_{12} = \frac{W_x}{G_\alpha} \frac{kT}{\nu_1 m} \frac{N}{g_0(\alpha)},$$

где

$$g_0(\alpha) = \int_0^\infty g(C, \alpha) C^2 dC.$$

Числовая плотность в линейном приближении равна:

$$\begin{aligned} N &= \int f_F(C, \alpha) d\Omega = \frac{4\pi(2s+1)m^3}{(2\pi\hbar)^3(\sqrt{\beta})^3} \int \frac{C^2 dC}{1 + \exp(C^2 - \alpha)} \\ &= \frac{2\pi(2s+1)m^3}{(2\pi\hbar)^3(\sqrt{\beta})^3} \int_0^\infty \ln(1 + \exp(C^2 - \alpha)) dC = N_0 l(\alpha), \end{aligned}$$

где

$$N_0 = \frac{2\pi(2s+1)m^3}{(2\pi\hbar)^3(\sqrt{\beta})^3}.$$

Таким образом, имеем

$$D_{12} = \frac{W_x}{G_\alpha} \frac{kTN_0}{\nu_1 m} \frac{l(\alpha)}{g_0(\alpha)},$$

откуда массовая скорость равна

$$W_x = \frac{\nu_1 m}{kTN_0} D_{12} \frac{g_0(\alpha)}{l(\alpha)} G_\alpha.$$

Решение задачи

Решение уравнения (8) будем искать в виде

$$h_\eta(x, \mu) = \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) \Phi(\eta, \mu),$$

$$\frac{1}{4g_0(\alpha)} \int_{-\infty}^\infty f_F(\mu, \alpha) \Phi(\eta, \mu) d\mu = 1,$$

где η — спектральный параметр, или параметр разделения.

С помощью этих равенств из уравнения (8) получим характеристическое уравнение $(\eta - \mu)\Phi(\eta, \mu) = \eta$. При $\eta \in (-\infty, \infty)$ отсюда находим собственные функции характеристического уравнения

$$\Phi(\eta, \mu) = \eta P \frac{1}{\eta - \mu} + \frac{4g_0(\alpha)}{f_F(\eta, \alpha)} \lambda(\eta) \delta(\eta - \mu).$$

Здесь символ Px^{-1} означает главное значение интеграла от x^{-1} , $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, $\lambda(z)$ — дисперсионная функция задачи,

$$\lambda(\eta) = 1 + \frac{\eta}{4g_0(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_F(\mu, \alpha) d\mu}{\mu - \eta}.$$

Решение задачи (8), (12) и (14) будем искать в виде разложения

$$h(x, \mu) = A_\alpha + G_\alpha(x - \mu) + \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) \Phi(\eta, \mu) A(\eta) d\eta, \quad (16)$$

где $A(\eta)$ — неизвестная функция (коэффициент непрерывного спектра), а A_α — неизвестная постоянная (коэффициент дискретного спектра). Коэффициенты A_α и G_α , как увидим ниже, связаны линейным соотношением

$$A_\alpha = C(\alpha, q) G_\alpha, \quad (17)$$

в котором функция $C(\alpha, q)$ — коэффициент скачка хипотенциала.

Найдем коэффициенты дискретного и непрерывного спектров. Подстановка собственных функций в разложение (16), а разложения (16) — в граничное условие (14), приводит к сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши

$$B = A_\alpha - G_\alpha \mu + \int_0^{\infty} \frac{\eta A(\eta) d\eta}{\eta - \mu} + \frac{4g_0(\alpha)}{f_F(\mu, \alpha)} \lambda(\mu) A(\mu) = 0, \quad \mu > 0.$$

Введем вспомогательную функцию

$$M(z) = \int_0^1 \frac{\eta A(\eta) d\eta}{\eta - z},$$

граничные значения которой на положительной полуоси сверху и снизу связаны формулами Сохоцкого

$$M^+(\mu) = M^-(\mu) = 2\pi i \mu A(\mu), \quad \mu > 0, \quad (18)$$

$$\frac{1}{2} [M^+(\mu) + M^-(\mu)] = M(\mu), \quad M(\mu) = \int_0^1 \frac{\eta A(\eta) d\eta}{\eta - z},$$

а последний интеграл понимается как особый в смысле главного значения по Коши.

С помощью граничных значений функций $\lambda(z)$ и $M(z)$ сверху и снизу на разрезе $(0, \infty)$ сведем сингулярное уравнение к краевой задаче Римана

$$\lambda^+(\mu) [M^+(\mu) + A_\alpha - G_\alpha \mu - B] = \lambda^-(\mu) [M^-(\mu) + A_\alpha - G_\alpha \mu - B], \quad \mu > 0.$$

Рассмотрим соответствующую однородную краевую задачу

$$\frac{X^+(\mu)}{X^-(\mu)} = \frac{\lambda^+(\mu)}{\lambda^-(\mu)}, \quad \mu > 0.$$

Ее решение [12] имеет вид

$$X(z) = \frac{1}{z} \exp V(z), \quad V(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\xi(\tau, \alpha) d\tau}{\tau - z},$$

где

$$\xi(\tau, \alpha) = \text{arccctg} \frac{4g_0(\alpha) \lambda(\tau)}{\pi \tau f_F(\tau, \alpha)} - \pi.$$

С помощью однородной задачи неоднородную сведем к задаче определения аналитической функции по ее нулевому скачку на разрезе

$$X^+(\mu) [M^+(\mu) + A_\alpha - G_\alpha \mu - B] = X^-(\mu) [M^-(\mu) + A_\alpha - G_\alpha \mu - B], \quad \mu > 0.$$

Решение этой задачи имеет вид

$$M(z) = -A_\alpha + G_\alpha z + B - \frac{G_\alpha}{X(z)}.$$

Из условия $M(\infty) = 0$ находим величину скачка безразмерного химического потенциала

$$A_\alpha = V_1(\alpha) G_\alpha + B,$$

где

$$V_1(\alpha) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \xi(\tau, \alpha) d\tau. \quad (19)$$

Коэффициент непрерывного спектра $A(\eta)$ найдем, если подставим решение краевой задачи в равенство (18)

$$A(\eta) = -\frac{G_\alpha}{2\pi i \eta} \left[\frac{1}{X^+(\eta)} - \frac{1}{X^-(\eta)} \right] = \frac{\sin \xi(\eta)}{\pi \eta X(\eta)} G_\alpha.$$

Таким образом, неизвестные коэффициенты разложения (16) найдены. Это означает, что функция распределения испаряющегося компонента полностью построена и представляется в виде

$$\frac{h(x, \mu)}{G_\alpha} = C(\alpha, q) + x - \mu + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) \frac{\Phi(\eta, \mu)}{\eta X(\eta)} \sin \xi(\eta) d\eta.$$

Отсюда, используя методы контурного интегрирования, на границе $x = 0$ получаем

$$\frac{h(0, \mu)}{G_\alpha} = B - \frac{\cos \xi(\mu)}{X(\mu)} (1 - \theta_+(\mu)), \quad -\infty < \mu < +\infty.$$

Из последней формулы видно, что при $\mu > 0$ функция распределения отраженных от стенки молекул в точности удовлетворяет граничному условию (14).

Скачок и профиль химпотенциала

Сравним равенства (17) и (19), с использованием второго из равенств (14) находим коэффициент безразмерного химпотенциала

$$C(\alpha, q) = V_1(\alpha) + \frac{1-q}{q} \frac{2l(\alpha)}{\ln(1+e^\alpha)}. \quad (20)$$

На рис. 1 представлена зависимость коэффициента $C(\alpha, q)$ от величины химического потенциала, кривые 1, 2, 3, 4 отвечают значениям коэффициента испарения $q = 0.2, 0.3, 0.5, 0.7$ соответственно. На рис. 2 приведена зависимость этого коэффициента от величины коэффициента испарения, кривые 1, 2, 3 отвечают значениям безразмерного химпотенциала $\alpha = 0, -3, 3$ соответственно.

Равенство (17) представляет собой величину скачка безразмерного химпотенциала. Перейдя в (17) к размерным величинам, получим величину скачка химического потенциала квантового ферми-газа

$$\delta\mu(0) = C(\alpha, q)l \left(\frac{d\mu(x_1)}{dx_1} \right)_{x_1=+\infty},$$

где $l = 1/(v_1\sqrt{\beta})$ — длина свободного пробега молекул.

Частоту столкновений v_1 выразим, согласно (15). Тогда скачок химического потенциала (в размерных величинах) вычисляется по формуле

$$\delta\mu(0) = K(\alpha, q)l\sqrt{\frac{m}{2kT}} D_{12} \left(\frac{d\mu(x_1)}{dx_1} \right)_{x_1=+\infty},$$

где $K(\alpha, q)$ — коэффициент скачка химического потенциала, причем

$$K(\alpha, q) = \frac{3g_0(\alpha)}{g_2(\alpha)} \left[V_1(\alpha) - \frac{1-q}{q} \frac{2l(\alpha)}{\ln(1+e^\alpha)} \right].$$

Отметим, что в пределе большой температуры, когда квантовыми свойствами газа можно пренебречь, полученный результат (20) переходит в ранее известный для классического газа результат для скачка концентрации [13]

$$C(-\infty, q) = 1.0162 + \sqrt{\pi} \frac{1-q}{q}.$$

Распределение химпотенциала в полупространстве $x \geq 0$ (называемое профилем химического потенциала)

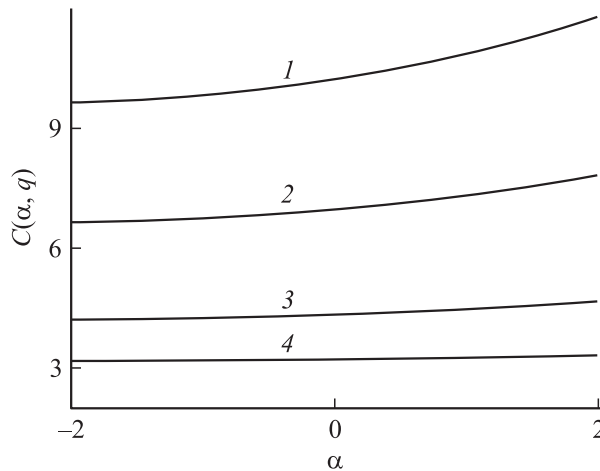


Рис. 1.

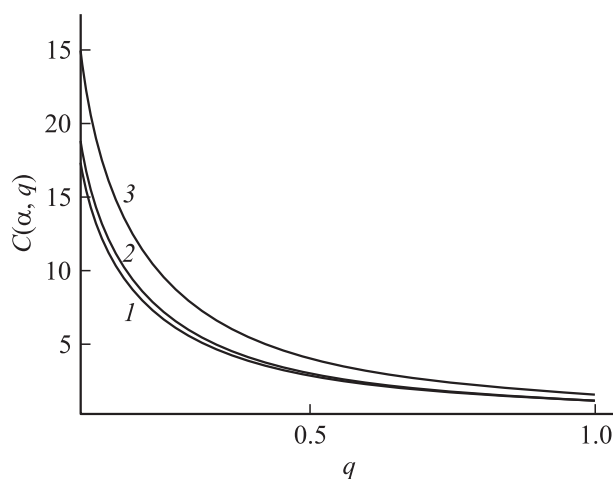


Рис. 2.

дается равенством (7). Подставив разложение функции распределения (16) в (7), найдем, что профиль химического потенциала строится по формуле

$$\frac{a(x)}{G_\alpha} = C(\alpha, q) + x + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x}{\eta} - V(\eta)\right) \sin \xi(\eta) d\eta.$$

Скачок и профиль концентрации

Профиль концентрации газа $N(x)$ в полупространстве $x \geq 0$ дается равенством

$$N(x) = N_s + n(x),$$

где

$$N_s = \int f_F(C, \alpha) d\Omega, \quad n(x) = \int h(x, C_x) g(C, \alpha) d\Omega.$$

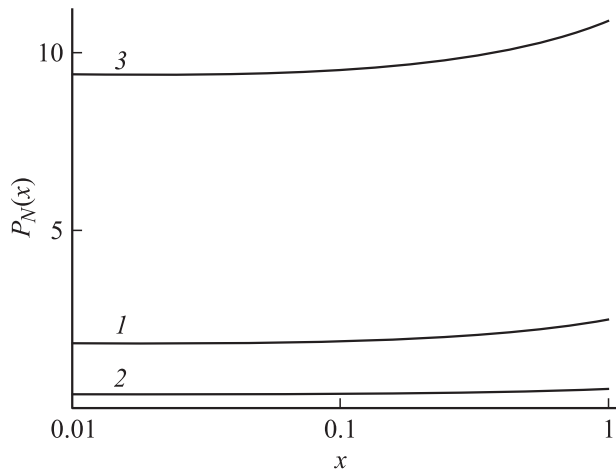


Рис. 3.

Нетрудно вычислить, что $N_s = N_0 l(\alpha)$, где

$$N_0 = \frac{2\pi(2s+1)m^3}{(2\pi\hbar)^3(\sqrt{\beta})^3},$$

а отклонение концентрации от концентрации насыщенного пара $n(x)$ дается равенством

$$n(x) = P_N(x)G_N, \quad (22)$$

где

$$P_N(x) = \left[C(\alpha, q) + x + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x}{\eta} - V(\eta)\right) \sin \xi(\eta) \right] g_0(\alpha),$$

где $P_N(x)$ — коэффициент профиля концентрации, G_N — величина градиента концентрации (по безразмерной координате),

$$G_N = \left(\frac{dN}{dx} \right)_{x=+\infty}.$$

Типичные профили распределения концентрации в слое Кнудсена даются на рис. 3, кривые 1, 2, 3 отвечают значениям безразмерного химического потенциала $\alpha = -2, 0, 2$. При постоянной концентрации газа с понижением температуры химический потенциал растет [14], причем $\alpha \rightarrow +\infty$ при $T \rightarrow 0$, а при $T \rightarrow \infty$ реализуется случай $\alpha \rightarrow -\infty$. Поэтому построенные для больших значений α графики соответствуют меньшей эффективной температуре газа.

Из равенств (21) и (22) вытекает, что профили химпотенциала и концентрации пропорциональны с точностью до соответствующих градиентов. Кроме того, нетрудно видеть, что градиенты химпотенциала и концентрации пропорциональны с коэффициентом N_0 : $G_N = N_0 G_\alpha$. Последнее равенство означает, что градиент химического

потенциала есть градиент логарифма концентрации

$$G_\alpha = \left(\frac{d \ln N}{dx} \right)_{x=+\infty}.$$

Нетрудно найти, что связь между отклонениями концентрации и химического потенциала от соответствующих значений у стенки дается равенством

$$\frac{n(x)}{N_0} = g_0(\alpha) a(x). \quad (23)$$

Из соотношения (23) при $x = 0$ находим величину скачка концентрации

$$n_{as}(0) = N_0 g_0(\alpha) a_{as}(0) = C(\alpha, q) g_0(\alpha) G_N = C_N(\alpha, q) G_N, \quad (24)$$

где $C_N(\alpha, q) = C(\alpha, q) g_0(\alpha)$ — коэффициент скачка концентрации.

Поведение коэффициента скачка концентрации из (24) отражено на рис. 4 и 5. На рис. 4 представлена зависимость коэффициента скачка концентрации от величины химического потенциала α , кривые 1, 2, 3, 4 отвечают значениям коэффициента аккомодации $q = 0.2, 0.3, 0.5, 0.7$.

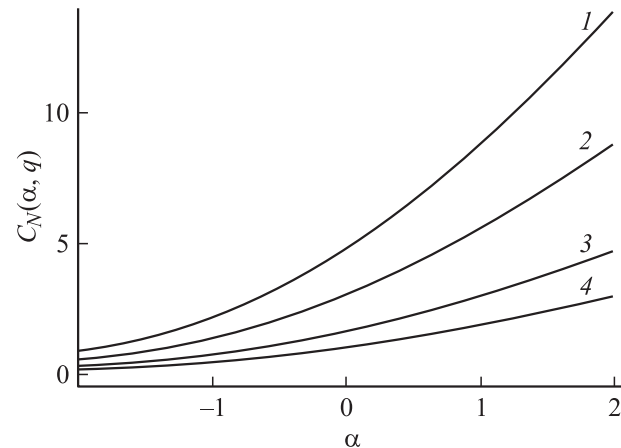


Рис. 4.

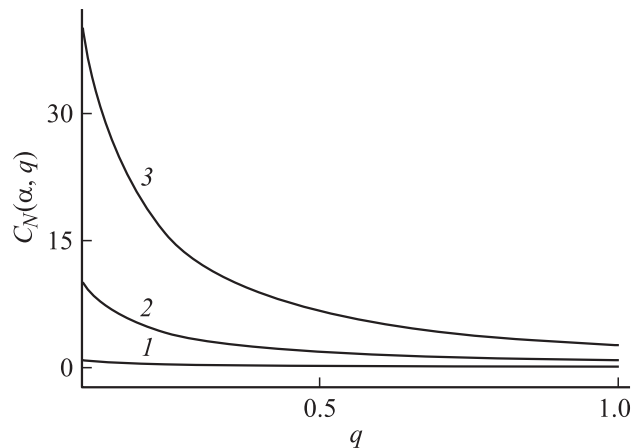


Рис. 5.

На рис. 5 изображена зависимость коэффициента скачка концентрации от величины коэффициента аккомодации, кривые 1, 2, 3 отвечают значениям безразмерного химического потенциал $a = -3, 0, 3$.

Заключение

В работе аналитически решена задача об испарении одной из компонент бинарного газа. Испаряющейся компонентой является ферми-газ. Исследована зависимость коэффициента скачка химического потенциала от коэффициента испарения и величины химического потенциала. На основании аналитического решения задачи получено явное представление функции распределения, выражения скачка химического потенциала и распределения химического потенциала в полупространстве (профиль химического потенциала). Показано также, что скачок концентрации ферми-газа и его распределение в полупространстве пропорциональны скачку и распределению потенциала.

Список литературы

- [1] Levin K., Qijin Chen. Finite Temperature Effects in Ultracold Fermi Gases. Archiv: cond-mat/0610006.
- [2] Modugno G. Fermi-Bose mixture with tunable interactions. Archiv: cond-mat/0702277.
- [3] Diallo S.O. Condensate fraction and atomic kinetic energy of liquid ^3He – ^4He mixtures. Archiv: cond-mat/0609529.
- [4] Халатников И.М. Введение в теорию сверхтекучести. М.: Наука, 1995. 160 с.
- [5] Силин В.П. Введение в кинетическую теорию газов. М.: Наука, 1971. 332 с.
- [6] Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978. 495 с.
- [7] Ферцигер Дж., Капер Г. Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1976. 554 с.
- [8] Козырев А.В., Ситников А.Г. // УФН. 2001. Т. 171. № 78. С. 765–774.
- [9] Хирс Д., Паунд Г. Испарение и конденсация. М.: Металлургия, 1966. 196 с.
- [10] Ландау Д.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
- [11] Григорьев И.С., Мейлихов Е.З. Физические величины. Справочник. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.
- [12] Латышев А.В., Юшканов А.А. Аналитическое решение граничных задач кинетической теории. М.: Изд-во МГОУ, 2004. 286 с.
- [13] Латышев А.В., Юшканов А.А. // Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30. Вып. 24. С. 12–19.
- [14] Ландау Д.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. Ч. 1. М.: Наука, 1976. 584 с.