

01;06;07;12

## Кинетика решеток заряда в фоторефрактивных кристаллах при наличии внешнего электрического поля

© Н.А. Гусак

Институт повышения квалификации и переподготовки кадров по новым направлениям развития техники, технологии и экономики Белорусского национального технического университета, 220107 Минск, Белоруссия

(Поступило в Редакцию 26 июня 2007 г.)

Дано корректное описание кинетики решеток заряда, возбуждаемых с помощью стоячей световой волны в фоторефрактивном кристалле при наличии внешнего электрического поля. Показано, что она подчиняется обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка, имеющему две пары комплексно сопряженных решений. Построено общее решение полученного уравнения, удовлетворяющее заданному начальному условию. Выяснен механизм осуществления колебаний заряда и удлинения времени перехода решеток в стационарное состояние, вызванный внешним полем. Установлена связь этих колебаний с волнами пространственного заряда.

PACS: 42.70.Nq

### Введение

В работе Н.В. Кухтарева [1] впервые теоретически показано, что заряд решетки, возбуждаемой неоднородным распределением освещенности в фоторефрактивном кристалле при наличии внешнего постоянного электрического поля, в процессе перехода к стационарному состоянию (или при рассасывании его после устранения неоднородного освещения) совершает временные колебания. Этот эффект казался вначале маловероятным, поскольку в [1] речь идет о влиянии на заряд не переменного, а именно постоянного во времени воздействия. Однако он получил подтверждение в работе [2]. Там приведено уравнение второго порядка для электрического поля заряда решетки, содержащее чисто мнимое слагаемое, и даны его частные решения, являющиеся при этом, комплексными.

В работе [2] также дано общее решение полученного уравнения, которое, как утверждается, и определяет кинетику заряда в зависимости от начального условия. Однако предложенное там выражение для электрического поля заряда решетки, на наш взгляд, непригодно для такой цели. Дело в том, что это выражение является комплексным, а электрическое поле суть величина действительная.

Оказалось, что можно найти адекватное описание эффекта, обнаруженного в работе [1]. Это было важно сделать, поскольку представленный в [2] результат не получил критической оценки в известном обзоре работ по кинетическим процессам в фоторефрактивных кристаллах [3].

В настоящей работе выполнено более полное и углубленное исследование кинетики решеток заряда во внешнем электрическом поле. Анализ ситуации показал, что исходная система уравнений кроме решений, учитывающихся ранее, имеет еще и другие решения. При

этом вся совокупность линейно независимых решений состоит не из двух, а из четырех решений, что позволяет получить действительное общее решение задачи о кинетике решеток, удовлетворяющее начальному условию и имеющее ясный физический смысл.

Нами выяснено, что математически корректная постановка вопроса должна базироваться на представлении о возбуждении в кристалле во внешнем электрическом поле при неоднородном световом воздействии двух решеток свободных носителей и двух решеток заряда [4]. Задача состоит в нахождении взаимозависимого поведения во времени этих четырех решеток. Такой подход, апробированный при исследовании кинетики только двух решеток, возбуждаемых в случае отсутствия электрического поля [5], позволяет получить непротиворечивую картину рассматриваемого процесса.

### Основные уравнения и их решения

Пусть внешнее постоянное электрическое поле с напряженностью  $E_0$  направлено вдоль некоторой оси  $z$  фоторефрактивного кристалла и в момент времени  $t = 0$  в кристалле создается стоячая световая волна, интенсивность которой задается выражением

$$I(z) = I_0[1 + m \cos(kz)], \quad (1)$$

где  $I_0$  — среднее значение интенсивности,  $m$  — коэффициент модуляции,  $k$  — волновое число.

Неоднородное освещение вызывает модуляцию в зоне проводимости кристалла концентрации  $N_2$  свободных носителей, которую можно описать функцией

$$N_e = N_{e0}[1 + m_1 \cos(kz)]. \quad (2)$$

Здесь  $m_1$  — зависящий от времени коэффициент модуляции концентрации электронов, а  $N_{e0}$  — среднее значение  $N_e$ .

Появление в кристалле распределения (2) вполне понятно. Однако при наличии внешнего электрического поля необходимо ввести в рассмотрение еще одно распределение

$$N_e = N_{e0} [1 + m_2 \sin(kz)], \quad (3)$$

где  $m_2$  — коэффициент модуляции концентрации электронов для второй решетки со своей зависимостью от времени. Такое распределение непосредственно не связано с распределением (1). Оно возникает в кристалле опосредованно.

Теоретической основой для исследования кинетических процессов в фоторефрактивных кристаллах является так называемая кухтаревская система уравнений, включающая в себя уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J} = 0, \quad (4)$$

уравнение Пуассона

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon}, \quad (5)$$

выражение для плотности тока

$$\mathbf{J} = e\mu N_e \mathbf{E} + \mu k_B T \nabla N_e \quad (6)$$

и кинетическое уравнение

$$\frac{\partial N^+}{\partial t} = (\beta + SI)(N - N^+) - \gamma N^+ N_e, \quad (7)$$

где  $\rho$  — плотность заряда,  $\mathbf{E}$  и  $\nabla N_e$  — векторы напряженности электрического поля и градиента концентрации электронов,  $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость среды,  $\mu$  — подвижность электронов,  $\varepsilon_0$  — электрическая постоянная,  $k_B$  — постоянная Больцмана,  $T$  — абсолютная температура среды,  $e$  — элементарный заряд,  $\beta$  — вероятность тепловой генерации свободных электронов,  $S$  — сечение оптического поглощения и  $\gamma$  — коэффициент рекомбинации. Здесь используется модель кристалла донорного типа, концентрация незаряженных и заряженных фоторефрактивных центров которого обозначена через  $N$  и  $N^+$  соответственно.

Подставив выражения (2) и (3) в (6) и используя (5), на основании (4) получим два уравнения для плотности заряда

$$\frac{\partial \rho_3}{\partial t} + \frac{1}{\tau_M} \rho_3 = \frac{eN_{e0}}{\tau_D} (m_1 - cm_2) \cos(kz), \quad (8)$$

$$\frac{\partial \rho_4}{\partial t} + \frac{1}{\tau_M} \rho_4 = \frac{eN_{e0}}{\tau_D} (cm_1 + m_2) \sin(kz), \quad (9)$$

где время максвелловской релаксации

$$\tau_M = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{e\mu N_{e0}}, \quad (10)$$

диффузионное время

$$\tau_D = \frac{e}{\mu k_B T k^2} \quad (11)$$

и

$$c = \frac{eE_0}{k_B T k}. \quad (12)$$

Запишем теперь уравнения для  $m_1$  и  $m_2$ . При не очень высоких значениях интенсивности света, когда можно положить  $N^+ = N_c$  [6] ( $N_c$  — концентрация неактивных акцепторов), на основании (7)–(9) имеем

$$\dot{m}_1 = B - \frac{m_1}{\tau_r} + \frac{m_3}{\tau_M} - \frac{1}{\tau_D} (m_1 - cm_2), \quad (13)$$

$$\dot{m}_2 = -\frac{m_2}{\tau_r} + \frac{m_4}{\tau_M} - \frac{1}{\tau_D} (cm_1 + m_2), \quad (14)$$

где введены обозначения

$$\dot{m}_1 = \frac{\partial m_1}{\partial t}, \quad \dot{m}_2 = \frac{\partial m_2}{\partial t}, \quad m_3 = \frac{\rho_3^{(0)}}{eN_{e0}} \quad \text{и} \quad m_4 = \frac{\rho_4^{(0)}}{eN_{e0}}, \quad (15)$$

причем  $\rho_3^{(0)}$  и  $\rho_4^{(0)}$  — амплитудные значения плотности заряда решеток, а  $\tau_r$  — время рекомбинации

$$\tau_r = \frac{1}{\gamma N_c} \quad (16)$$

и

$$B = \frac{SI_0 m(N - N_c)}{N_{e0}}. \quad (17)$$

В соответствии с (7) и (16) концентрация  $N_{e0}$  в этом приближении равна

$$N_{e0} = (\beta + SI_0)(N - N_c)\tau_r.$$

Уравнения (8) и (9) удобно представить относительно безразмерных величин  $m_3$  и  $m_4$ . Тогда они приобретают аналогичный уравнениям (13) и (14) вид

$$\dot{m}_3 = -\frac{m_3}{\tau_M} + \frac{1}{\tau_D} (m_1 - cm_2), \quad (18)$$

$$\dot{m}_4 = -\frac{m_4}{\tau_M} + \frac{1}{\tau_D} (cm_1 + m_2). \quad (19)$$

Уравнения (13), (14), (18) и (19) образуют полную систему уравнений для четырех неизвестных функций  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  и  $m_4$ . Задача состоит в нахождении их решений, удовлетворяющих при  $t = 0$  начальному условию  $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 0$ .

В стационарных условиях ( $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m}_3 = \dot{m}_4 = 0$ ) эти уравнения дают

$$m_1^c = \tau_r B, \quad m_2^c = 0, \quad m_3^c = \frac{\tau_M \tau_r}{\tau_D} B, \quad m_4^c = c \frac{\tau_M \tau_r}{\tau_D} B. \quad (20)$$

Согласно (20), предельное значение для  $m_2$  равно нулю. Однако отсюда не следует, что решетка свободных носителей, распределенная по синусоидальному закону, не возбуждается в кристалле несмотря на отсутствие ее в начале и в конце процесса.

Для нахождения решений полученных выше уравнений удобно перейти к уравнениям, содержащим только одну переменную. Они имеют следующий вид:

$$\ddot{m}_p + \frac{2}{\tau_c} \dot{m}_p + \left( \frac{1}{\tau_c^2} + \frac{2}{\tau_M \tau_r} + \frac{c^2}{\tau_D^2} \right) \dot{m}_p + \frac{2}{\tau_c \tau_M \tau_r} \dot{m}_p + \left( \frac{1}{\tau_M \tau_r} \right)^2 m_p = C_p, \quad (21)$$

где

$$\frac{1}{\tau_c} = \frac{1}{\tau_r} + \frac{1}{\tau_M} + \frac{1}{\tau_D}, \quad (22)$$

а  $p = 1, 2, 3, 4$ , причем

$$C_1 = \frac{B}{\tau_M^2 \tau_r}, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = \frac{B}{\tau_r \tau_M \tau_D} \quad \text{и} \quad C_4 = \frac{cB}{\tau_r \tau_M \tau_D}. \quad (23)$$

Эти уравнения являются уравнениями четвертого порядка, отличающимися между собой только значениями правой части.

Если решения уравнений (21) искать в виде

$$m_p = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + m_p^c, \quad (24)$$

где  $A$  — произвольная постоянная, то неизвестная величина  $\tau$  оказывается связанной с параметрами уравнений соотношением

$$\left(\frac{1}{\tau^2} - \frac{1}{\tau_c} \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_r \tau_M}\right)^2 = -\left(\frac{c}{\tau_D}\right)^2 \frac{1}{\tau^2}.$$

Это соотношение дает для  $\tau$  два уравнения

$$\frac{1}{\tau^2} - \left(\frac{1}{\tau_c} \pm i \frac{c}{\tau_D}\right) \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_r \tau_M} = 0, \quad (25)$$

имеющие в совокупности четыре разных корня

$$\frac{1}{\tau_{1,2,3,4}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tau_c} \pm i \frac{c}{\tau_D}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{\tau_c} \pm i \frac{c}{\tau_D}\right)^2 - \frac{1}{\tau_r \tau_M}}, \quad (26)$$

два из которых были найдены ранее в работе [2].

Согласно (24), (26) и (20), решения уравнений (21), удовлетворяющие нулевым начальным условиям, можно записать в виде

$$m_p = m_p^c \left\{ 1 - \sum_{l=1}^4 a_{pl} \exp\left(-\frac{t}{\tau_l}\right) \right\},$$

$$m_2 = \sum_{l=1}^4 a_{2l} \exp\left(-\frac{t}{\tau_l}\right), \quad (27)$$

где  $a_{pl}$  и  $a_{2l}$  — некоторые постоянные, первый значок у которых указывает на номер решетки (здесь  $p = 1, 3, 4$ ), а второй — на номер корня. Эти постоянные должны подчиняться соотношениям

$$\sum_{l=1}^4 a_{pl} = 1, \quad \sum_{l=1}^4 a_{2l} = 0. \quad (28)$$

Для нахождения явного вида постоянных  $a_{pl}$  соотношений (28), связывающих между собой постоянные с разными  $l$  при одинаковых  $p$ , недостаточно. Нужно привлечь еще и соотношения между постоянными с разными  $p$ , которые получаются после подстановки

функций (27) в исходные уравнения (13), (14), (18) и (19). Они имеют вид

$$a_{2l} = -\frac{m_1^c}{c} \left[ a_{3l} \left( \frac{\tau_M}{\tau_l} - 1 \right) + a_{1l} \right],$$

$$a_{2l} = -\frac{m_1^c}{c} \left[ a_{1l} \left( \frac{\tau_D}{\tau_l} - \frac{\tau_D}{\tau_r} - 1 \right) + a_{3l} \right],$$

$$a_{2l} = cm_1^c \left[ a_{4l} \left( \frac{\tau_M}{\tau_l} - 1 \right) + a_{1l} \right],$$

$$a_{2l} \left( -\frac{\tau_D}{\tau_l} + \frac{\tau_D}{\tau_r} + 1 \right) = cm_1^c (a_{1l} - a_{4l}). \quad (29)$$

Эти соотношения означают, что справедливы равенства

$$a_{1l} = \frac{a_{3l}}{1 \pm ic} \left( 1 - \frac{\tau_m}{\tau_l} \right), \quad (30)$$

$$a_{2l} = \pm im_1^c a_{1l}, \quad (31)$$

$$a_{4l} = \mp \frac{i}{c} a_{3l}, \quad (32)$$

где верхние и нижние знаки перед  $i$  соответственно отвечают знакам перед  $i$  в (26). В них все постоянные выражены через  $a_{3l}$ . Такой вариант по сравнению с другими возможными оказался более удобным и простым для получения окончательного результата.

Все выражения (27) по своему физическому смыслу должны быть действительными, а некомплексными. Отметим одно существенное свойство корней (26). Примем для определенности, что при знаке (+) перед радикалом в (26) вычисляются  $\tau_1$  и  $\tau_3$ . Эти корни являются комплексно сопряженными  $\tau_3 = \tau_1^*$ . Корни  $\tau_2$  и  $\tau_4$  тогда определяются знаком (-) перед радикалом. Они также комплексно сопряжены  $\tau_4 = \tau_2^*$ . В соответствии со свойствами корней  $\tau_l$  постоянные  $a_{pl}$  должны удовлетворять требованию

$$a_{p3} = a_{p1}^*, \quad a_{p4} = a_{p2}^*, \quad (p = 1, 2, 3, 4). \quad (33)$$

Можно показать, что с учетом равенств (30)–(32) соотношения (28) выполняются при соблюдении следующих условий:

$$a'_{31} + a'_{32} = \frac{1}{2}, \quad (34)$$

$$\frac{a'_{31}}{\tau_1'} + \frac{a'_{32}}{\tau_2'} = \frac{a''_{31}}{\tau_1''} + \frac{a''_{32}}{\tau_2''}, \quad (35)$$

$$a''_{31} + a''_{32} = \frac{c}{2}, \quad (36)$$

$$\frac{a''_{31}}{\tau_1''} + \frac{a''_{32}}{\tau_2''} + \frac{a'_{31}}{\tau_1'} + \frac{a'_{32}}{\tau_2'} = 0, \quad (37)$$

где  $a'_{31}$ ,  $a'_{32}$  и  $a''_{31}$ ,  $a''_{32}$  — соответственно действительные и мнимые части постоянных  $a_{31} = a'_{31} + ia''_{31}$ ,  $a_{32} = a'_{32} + ia''_{32}$ , а  $\tau_1'^{-1}$ ,  $\tau_2'^{-1}$  и  $\tau_1''^{-1}$ ,  $\tau_2''^{-1}$  — аналогичные величины комплексных корней  $\tau_1^{-1} = \tau_1'^{-1} + i\tau_1''^{-1}$ ,  $\tau_2^{-1} = \tau_2'^{-1} + i\tau_2''^{-1}$ .

Полученные четыре линейно независимых уравнения позволяют найти значения  $a'_{31}$ ,  $a'_{32}$ ,  $a''_{31}$  и  $a''_{32}$ . Остальные 28 величин вычисляются в соответствии с равенствами (30)–(33).

## Обсуждение результатов

Рассмотрим вначале ситуацию, когда  $c$  — малая величина. Это позволит проследить, как при наличии электрического поля возникают решетка свободных носителей и решетка заряда, дополнительные к двум решеткам, которые возбуждаются без поля, и как соотносятся друг с другом эти две пары решеток.

При  $c \ll 1$  правую часть уравнения (35) можно положить равной нулю, поскольку, согласно уравнению (36), постоянные  $a'_{31}$  и  $a''_{32} \sim c$ , а  $\tau_1''^{-1}$  и  $\tau_2''^{-1}$ , в соответствии с (26), тоже порядка  $c$ . Это дает

$$a'_{31} = -\frac{\tau_1'}{2(\tau_2' - \tau_1')}, \quad (38)$$

$$a'_{32} = \frac{\tau_2'}{2(\tau_2' - \tau_1')}. \quad (39)$$

Видно, что действительные части постоянных  $a_{31}$  и  $a_{32}$  не зависят от  $c$ . Вычисление мнимых частей приводит к результату

$$a''_{31} = a'_{31} \left[ c - 2a'_{32} \left( \frac{\tau_1'}{\tau_1''} - \frac{\tau_2'}{\tau_2''} \right) \right], \quad (40)$$

$$a''_{32} = a'_{32} \left[ c + 2a'_{31} \left( \frac{\tau_1'}{\tau_1''} - \frac{\tau_2'}{\tau_2''} \right) \right], \quad (41)$$

согласно которому они пропорциональны  $c$ .

Выражение для коэффициента  $m_3$ , характеризующего решетку заряда, распределенную в кристалле по косинусоидальному закону, с учетом соотношений (33) имеет вид

$$m_3 = m_3^c \left\{ 1 - 2 \left[ \left( a'_{31} \cos \frac{t}{\tau_1''} + a''_{31} \sin \frac{t}{\tau_1''} \right) \exp \left( -\frac{t}{\tau_1'} \right) + \left( a'_{32} \cos \frac{t}{\tau_2''} + a''_{32} \sin \frac{t}{\tau_2''} \right) \exp \left( -\frac{t}{\tau_1'} \right) \right] \right\}. \quad (42)$$

Это выражение при малых  $t$  в рассматриваемом приближении пропорционально квадрату времени

$$m_3 \simeq m_3^c \frac{t^2}{2\tau_1' \tau_2'}. \quad (42')$$

Отсюда видно, что коэффициент  $m_3$  на начальной стадии застройки решетки не зависит от электрического поля и ведет себя точно так, как и в случае отсутствия его [5].

Запишем теперь выражение для коэффициента  $m_4$ , характеризующего вторую решетку заряда. Решение (27) при  $p = 4$  на основании равенства (32) можно представить в виде

$$m_4 = m_4^c \left\{ 1 - \frac{2}{c} \left[ \left( a''_{31} \cos \frac{t}{\tau_1''} - a'_{31} \sin \frac{t}{\tau_1''} \right) \exp \left( -\frac{t}{\tau_1'} \right) + \left( a''_{32} \cos \frac{t}{\tau_2''} - a'_{32} \sin \frac{t}{\tau_2''} \right) \exp \left( -\frac{t}{\tau_1'} \right) \right] \right\}. \quad (43)$$

Это выражение при малых  $t$  также пропорционально квадрату времени

$$m_4 \simeq m_4^c \left[ 1 + \frac{1}{c} \left( \frac{\tau_1'}{\tau_1''} + \frac{\tau_2'}{\tau_2''} \right) \right] \frac{t^2}{2\tau_1' \tau_2'}. \quad (43')$$

По форме оно отличается от выражения (42') лишь дополнительным множителем, не зависящим от  $c$ . Весь коэффициент  $m_4$ , согласно (20), пропорционален величине электрического поля и при  $E_0 = 0$  он исчезает.

В соответствии с равенствами (30) и (31) выражения для коэффициентов модуляции двух решеток свободных носителей имеют вид

$$m_1 = m_1^c \left\{ 1 - 2 \left[ \left( a'_{31} \left( 1 - \frac{\tau_M}{\tau_1'} \right) \cos \frac{t}{\tau_1''} + a''_{11} \sin \frac{t}{\tau_1''} \right) \times \exp \left( -\frac{t}{\tau_1'} \right) + \left( a'_{32} \left( 1 - \frac{\tau_M}{\tau_2'} \right) \cos \frac{t}{\tau_2''} + a''_{12} \sin \frac{t}{\tau_2''} \right) \exp \left( -\frac{t}{\tau_2'} \right) \right] \right\}, \quad (44)$$

$$m_2 = 2m_1^c \left\{ \left[ -a''_{11} + \cos \frac{t}{\tau_1''} + a'_{31} \left( 1 - \frac{\tau_M}{\tau_1'} \right) \sin \frac{t}{\tau_1''} \right] \times \exp \left( -\frac{t}{\tau_1'} \right) + \left[ -a''_{12} \cos \frac{t}{\tau_2''} + a'_{32} \left( 1 - \frac{\tau_M}{\tau_2'} \right) \sin \frac{t}{\tau_2''} \right] \exp \left( -\frac{t}{\tau_2'} \right) \right\}, \quad (45)$$

где

$$a''_{11} = -a'_{31} \left[ 2a'_{32} \left( \frac{\tau_1'}{\tau_1''} - \frac{\tau_2'}{\tau_2''} \right) \left( 1 - \frac{\tau_M}{\tau_1'} \right) + \frac{\tau_M}{\tau_1''} \right], \quad (46)$$

$$a''_{12} = -a'_{32} \left[ 2a'_{31} \left( \frac{\tau_1'}{\tau_1''} - \frac{\tau_2'}{\tau_2''} \right) \left( 1 - \frac{\tau_M}{\tau_2'} \right) - \frac{\tau_M}{\tau_2''} \right]. \quad (47)$$

При малых значениях  $t$  отсюда имеем

$$m_1 \simeq m_1^c \frac{\tau_M t}{\tau_1' \tau_2'}, \quad (44')$$

$$m_2 \simeq m_1^c \left( \frac{\tau_1'}{\tau_1''} + \frac{\tau_2'}{\tau_2''} \right) \frac{\tau_M t}{\tau_1' \tau_2'}. \quad (45')$$

Видно, что коэффициент модуляции  $m_1$  не зависит от  $c$  и ведет себя точно так, как и в случае отсутствия внешнего поля [5]. Что касается выражения для  $m_2$ , то оно отличается от  $m_1$  дополнительным множителем, который растет линейно с ростом электрического поля.

Применительно к кристаллам, у которых времена  $\tau_M$ ,  $\tau_r$  и  $\tau_D$  численно сильно различаются между собой, общие выражения (42)–(45) допускают существенные упрощения и возможность их более углубленного анализа. Согласно (26), имеем

$$\tau_1' = \tau_c, \quad \tau_1'' = \frac{\tau_D}{\tau_c} \frac{\tau_1'}{c};$$

$$\tau_2' = \frac{\tau_r \tau_M}{\tau_c} \left( 1 + c^2 \frac{\tau_c^2}{\tau_D^2} \right), \quad \tau_2'' = -\frac{\tau_D}{\tau_c} \frac{\tau_2'}{c}, \quad (48)$$

где  $\tau_c$  примерно совпадает с наименьшим из указанных времен. В этом случае  $\tau_2' \gg \tau_1'$ . По истечении очень короткого интервала времени  $\Delta t \sim \tau_c$  от начала процесса

застройка всех решеток описывается практически только слагаемыми, содержащими  $\tau_2'$ . Время  $\tau_2'$  фактически и определяет время застройки решеток. Оно больше соответствующего времени в отсутствие электрического поля в  $\alpha$  раз, при этом

$$\alpha = \left(1 + c^2 \frac{\tau_c^2}{\tau_D^2}\right). \quad (49)$$

Параметр  $\alpha$  численно определяет эффект невязимности, заключающийся в различии по длительности рассматриваемого прямого и обратного процесса, совершающегося после устранения неоднородного светового возбуждения и внешнего электрического поля. Электрическое поле удлиняет время перехода решетки в стационарное состояние.

Из (49) видно, что при заданной величине электрического поля эффект невязимности достигает максимально возможного значения в кристалле, для которого  $\tau_c = \tau_D$ . В кристаллах, где  $\tau_c = \tau_M$  либо  $\tau_c = \tau_r$ , этот эффект может быть мал даже при больших полях. В случае  $\tau_c = \tau_D$  достигает также минимального значения отношение периода осциллирующих функций ко времени застройки решеток.

Далее будем рассматривать именно эту ситуацию. Изложенное ниже применимо, например, к часто используемому кристаллу силикосилленита (BSO), имеющему следующие значения параметров:  $N = 10^{25} \text{ м}^{-3}$ ,  $N_c = 0.95 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}$ ,  $\beta = 1 \text{ с}^{-1}$ ,  $S = 1.06 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\gamma = 1.65 \cdot 10^{-17} \text{ м}^3/\text{с}$ ,  $\varepsilon \sim 10$ ,  $\mu = 10^{-4} \text{ м}^2/\text{Vs}$  [7]. Для данного кристалла при  $k = 2\pi \cdot 10^6 \text{ м}^{-1}$ ,  $I_0 \simeq 10^4 \text{ W}/\text{м}^2$  и комнатной температуре находим  $\tau_D \sim 10^{-8} \text{ с}$ ,  $\tau_M \sim 10^{-7} \text{ с}$  и  $\tau_r \sim 10^{-5} \text{ с}$ . В этом случае в системе уравнений (34)–(37) с большой точностью можно полагать

$$a'_{31} = a''_{31} = a''_{11} = a''_{12} = 0, \quad a'_{32} = \frac{1}{2}, \quad a''_{32} = \frac{c}{2}, \quad (50)$$

поэтому выражения для коэффициентов  $m_p$  приобретают простую форму

$$m_s = m_s^c \left\{ 1 - \left( \cos \frac{ct}{\tau_2'} - c \sin \frac{ct}{\tau_2'} \right) \exp\left(-\frac{t}{\tau_2'}\right) \right\}, \quad (51)$$

$$m_4 = m_4^c \left\{ 1 - \left( \cos \frac{ct}{\tau_2'} + \frac{1}{c} \sin \frac{ct}{\tau_2'} \right) \exp\left(-\frac{t}{\tau_2'}\right) \right\}, \quad (52)$$

$$m_1 = m_1^c \left\{ 1 - \cos \frac{ct}{\tau_2'} \exp\left(-\frac{t}{\tau_2'}\right) \right\}, \quad (53)$$

$$m_2 = -m_1^c \sin \frac{ct}{\tau_2'} \exp\left(-\frac{t}{\tau_2'}\right). \quad (54)$$

При достаточно больших значениях  $c$  множители перед экспонентами успевают совершить несколько колебаний за время  $t \sim \tau_2'$ . Если при  $c = 1$  колебания функций  $m_p$  еще только намечаются, то уже при  $c = \pi$  можно говорить о двух таких колебаниях, которые и видны на рис. 1, где под  $m_p'$  понимаются следующие величины:  $m_1' = \frac{m_1}{m_1^c}$ ,  $m_2' = \frac{m_2}{m_1^c}$ ,  $m_3' = \frac{m_3}{m_3^c}$ ,  $m_4' = \frac{m_4}{m_3^c}$ . Все представленные здесь

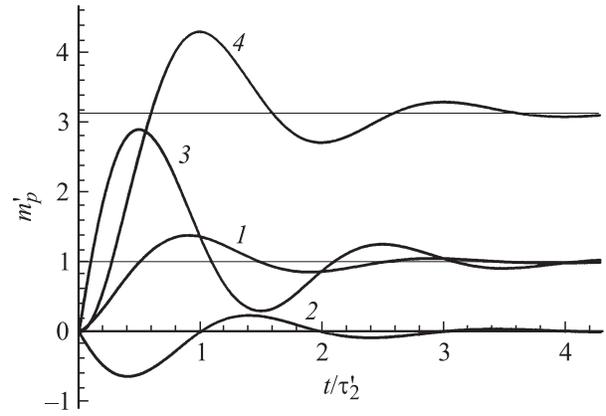


Рис. 1. Поведение коэффициентов  $m_p$  в процессе перехода решеток свободных носителей и заряда в стационарное состояние при  $c = \pi$ . Номера кривых соответствуют значениям индекса  $p$ .

кривые при  $t > 4\tau_2'$  практически сливаются со своими асимптотами.

Выясним причину колебаний коэффициентов  $m_p$ . Видно, что кривые 1 и 3, отражающие процесс формирования решеток, принимают значения, превышающие единицу. При этом кривая 3 пересекает асимптоту раньше кривой 1. Встает вопрос, каким образом внешнее электрическое поле увеличивает заряд решетки, которая возникает при наличии неоднородного освещения в кристалле и без этого поля?

Обратимся к рис. 2, где изображен в произвольном масштабе один пространственный период решетки 1 свободных носителей, описывающейся вторым слагаемым выражения (2). Максимум этой кривой расположен в

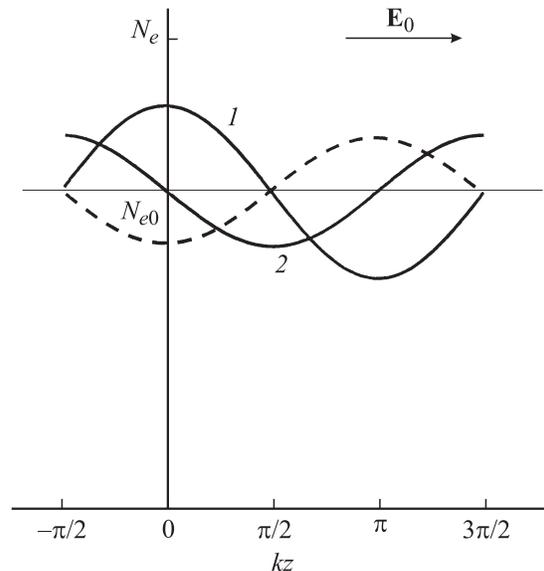


Рис. 2. Взаимное расположение решеток свободных носителей 1 и 2, соответствующее произвольному моменту времени из интервала  $0 < t < \tau_2'$ .

точке  $z = 0$  (здесь находится также максимум заряда решетки 3). Кривая под номером 2 относится ко второй решетке свободных носителей. При указанной на рисунке ориентации внешнего поля  $\mathbf{E}_0$  в точке  $z = \frac{\pi}{2k}$  располагается минимум этой кривой и максимум распределения объемного заряда решетки 4. Такое заключение следует непосредственно из анализа выражения (6). Кривая 2 оказывается сдвинутой влево на четверть периода относительно кривой 1.

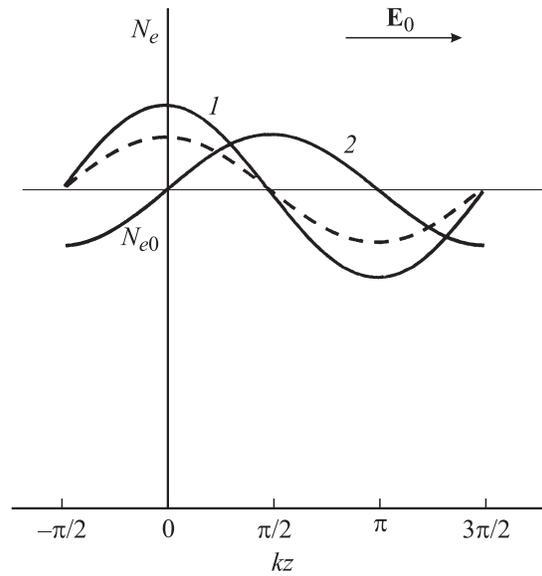
Появление решетки 2 автоматически вызывает возникновение дополнительных решеток свободных носителей (штриховая кривая) и объемного заряда. Однако эти решетки уже не имеют самостоятельного значения, поскольку они пространственно совпадают с решетками 1 и 3. Дополнительная решетка свободных носителей, находясь с противофазе с решеткой 1, приводит к уменьшению концентрации  $N_e$  в решетке 1. В то же время дополнительная решетка объемного заряда, будучи в фазе с решеткой 3, вызывает увеличение концентрации заряда в решетке 3.

То же имеет место и при изменении направления внешнего электрического поля на противоположное. В этом случае решетка 2 сдвигается вправо на четверть периода относительно решетки 1. Однако результатом и такого сдвига является по-прежнему уменьшение амплитуды решетки 1 и увеличение амплитуды решетки 3.

Следовательно, можно утверждать, что в рассматриваемой системе внешнее электрическое поле осуществляет обратную связь. С помощью решетки 1 оно направляет положительный сигнал для решетки 3 и одновременно отрицательный сигнал для самой решетки 1. На качественном уровне понятна причина первого пересечения кривой 3 (рис. 1) своей асимптоты. Положительная обратная связь, действующая на начальной стадии формирования решетки 3, обеспечивает усиление результирующей характеристики по сравнению с той характеристикой, которая проявляется в случае отсутствия внешнего поля. Усиление продолжается до тех пор, пока кривая 2 не достигнет своего минимума. Затем обратная связь начинает ослабевать. Однако вплоть до момента времени  $t = \tau'_2$  она остается положительной. Несмотря на это кривая 3, пройдя через максимум, начинает спадать. Причиной такого поведения кривой 3, как и усиления выходного сигнала для решетки 1 в условиях действия для нее отрицательной обратной связи, является следующее.

По мере роста заряда в решетке 3 увеличивается также концентрация свободных носителей в решетке 1 за счет их генерации в неоднородном электрическом поле. Это поле осуществляет положительную обратную связь для решетки 1 и одновременно отрицательную обратную связь для решетки 3. Внутреннее электрическое поле оказывает на решетки 1 и 3 воздействие, противоположное воздействию внешнего поля.

Из рис. 1 видно, что для моментов времени из интервала  $\tau'_2 < t < 2\tau'_2$  коэффициент  $m_2$  становится положительным. Взаимное расположение решеток 1 и 2



**Рис. 3.** Взаимное расположение решеток свободных носителей 1 и 2, соответствующее произвольному моменту времени из интервала  $\tau'_2 < t < 2\tau'_2$ .

теперь оказывается таким, как представлено на рис. 3. В данном случае на решетке 2 поле  $\mathbf{E}_0$  порождает дополнительную решетку свободных носителей (штриховая линия), совпадающую по фазе с решеткой 1, и одновременно решетку заряда, противоположную по фазе с решеткой 3. Можно сказать, что в рассматриваемом интервале времени внешнее поле осуществляет отрицательную обратную связь уже для решетки заряда 3 и положительную обратную связь — для решетки 1. Отрицательная обратная связь приводит к значительному ослаблению коэффициента  $m_3$ . В то же время положительная обратная связь, создаваемая полем  $\mathbf{E}_0$  для решетки 1, на этой стадии процесса не только не вызывает рост  $N_e$ , а наоборот, позволяет коэффициенту  $m_1$  уменьшаться. Причина такого парадоксального на первый взгляд поведения  $m_1$  состоит в том, что в решетке 1 остается лишь концентрация электронов, которая соответствует уменьшающемуся неоднородному электрическому полю решетки 3. Избыточные свободные носители устраняются диффузией или оседают на ионизированных фоторефрактивных центрах.

Выше выяснено, что возникновение решетки 2 нарушает синхронность в эволюции решеток 1 и 3, имеющую место в отсутствие внешнего поля. Это вызывается различием характера обратной связи для заряда и свободных носителей. Важно отметить при этом, что наличие отрицательной обратной связи сопровождается замедлением всего переходного процесса в системе, приводящим к эффекту невзаимности.

Поясним теперь причину колебаний самого коэффициента  $m_2$ . Если бы решетка 2 формировалась только с помощью внешнего поля, то концентрация  $N_e$ , например

в точке  $z = \frac{\pi}{2k}$  (см. рис. 2), монотонно спадала бы за счет роста  $N_e$  в точке  $= 0$ . Однако кривая 2 (см. рис. 1), пройдя через минимум, достигает затем горизонтальной оси, поскольку в интервале времени  $0 < t < \tau_2'$  имеет место непрерывное увеличение концентрации свободных носителей из-за роста концентрации заряда в решетке 4. В момент времени  $t = \tau_2'$  в формировании решетки 2 вклад от внутреннего поля решетки 4 компенсирует вклад от поля  $E_0$  и пространственный заряд решетки 4 выступает лишь в форме связанного на фоторефрактивных центрах заряда, как в стационарном состоянии. Но на этом процесс не останавливается, так как затем начинает спадать кривая 4 из-за падения кривой 1. Поскольку это возможно только благодаря дальнейшей генерации свободных носителей в неоднородном поле решетки 4, то и реализуется участок кривой 2, выступающей над осью времени.

Результаты данной работы позволяют под другим углом зрения посмотреть на так называемые волны пространственного заряда [8,9].

Запишем выражение для  $\rho = \rho_3 + \rho_4$ , задающее распределение суммарной плотности заряда в кристалле. На основании (15), (51) и (52) имеем

$$\rho = eN_{e0}m_3^c \frac{1}{\cos v} \times \left\{ \cos(kz - v) - \cos\left(kz - \frac{ct}{\tau_2'} - v\right) \exp\left(-\frac{t}{\tau_2'}\right) \right\}, \quad (55)$$

где  $v = \arctg c$ .

Приведем также аналогичное выражение для распределения концентрации электронов

$$N_{e1} = N_{e0} [m_1 \cos(kz) + m_2 \sin(kz)],$$

обусловленного решетками 1 и 2. В соответствии с (2), (3), (53) и (54) находим

$$N_{e1} = N_{e0}m_1^c \left\{ \cos(kz) - \cos\left(kz - \frac{ct}{\tau_2'}\right) \exp\left(-\frac{t}{\tau_2'}\right) \right\}. \quad (56)$$

Отсюда видно, что коэффициенты перед экспонентами приобрели форму выражения для плоской волны. Следовательно, результирующие картины и заряда, и свободных носителей, зародившиеся в кристалле при наличии внешнего электрического поля после включения неоднородного светового возбуждения, в процессе перехода к стационарному состоянию совершают перемещение вдоль оси  $z$ . Это перемещение, обусловленное несинхронностью колебания коэффициентов  $m_p$ , за время  $t = \tau_2'$  равно

$$\Delta z = \frac{c}{k}. \quad (57)$$

При малых полях оно меньше длины волны возбуждающего света, только при  $c \gg 1$  величина  $\Delta z$  может быть значительной.

Поскольку выражения (55) и (56) пропорциональны  $I_0$ , то ясно, что волны пространственного заряда

могут возбуждаться лишь в прямом процессе создания решеток заряда и обратном процессе их затухания после устранения неоднородного светового воздействия.

## Заключение

В работе дано корректное описание кинетики решеток заряда, возбуждаемых с помощью стоячей световой волны в фоторефрактивном кристалле при наличии внешнего постоянного электрического поля. Показано, что она подчиняется обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка, которое имеет две пары комплексно сопряженных решений. Эти частные решения позволяют построить общее вещественное решение для действительной физической величины, удовлетворяющее начальному условию.

Рассматриваемая задача занимает особое место в ряду различных электродинамических задач. Обычно, из соображений удобства, используется комплексная форма записи для переменных физических величин, хотя реальное значение имеет только либо действительная, либо мнимая часть комплексного решения. В данном случае ни действительная, ни мнимая части функции (24) по отдельности не удовлетворяют уравнению (21). Поэтому физическое решение задачи для такой ситуации должно строиться в виде суперпозиции полного набора частных комплексных решений.

В работе найдены все функции, описывающие поведение каждой решетки из двух пар возбуждаемых решеток. При этом одна пара включает в себя решетку свободных носителей и решетку заряда, которые пространственно задаются возбуждающей световой волной. Вторая пара, инициируемая внешним электрическим полем, состоит из аналогичных решеток, сдвинутых в кристалле на четверть периода относительно первых. Указанные четыре функции являются взаимозависимыми. Коэффициенты разложения по частным решениям каждой из них определяются однозначно через начальные условия для всех четырех решеток.

В работе прослежено, как произвольная решетка в своей эволюции испытывает влияние остальных решеток. Проведенный анализ позволил прояснить механизм осуществления колебаний заряда и свободных носителей при наличии в кристалле внешнего постоянного электрического поля. Выяснено, что это поле осуществляет в системе обратную связь, особый характер которой нарушает синхронность застройки решеток, соблюдающуюся в случае отсутствия внешнего поля, и вызывает замедление процесса развития всех решеток проявляющиеся в эффекте невзаимности.

В работе показано, что несинхронность колебания заряда в двух его пространственно закрепленных решетках приводит к продольному перемещению картины распределения суммарного заряда. Такое поведение характерно и для свободных носителей.

Автор благодарен А.Б. Зимину и Н.С. Петрову за обсуждение результатов работы и ценные замечания.

## Список литературы

- [1] *Кухмарев Н.В.* // Письма в ЖТФ. 1976. Вып. 24. С. 1114–1118.
- [2] *Valley G.C.* // IEEE J. Quant. Elect. 1983. QE-19. N 11. P. 1637–1645.
- [3] *Buse K.* // Appl. Phys. B. 1997. Vol. 74. P. 273–291.
- [4] *Гусак Н.А.* // Докл. НАН Беларуси. 2007. Т. 51. №1. С. 40–45.
- [5] *Гусак Н.А.* // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 2. С. 96–101.
- [6] *Гусак Н.А., Петров Н.С.* // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 5. С. 131–133.
- [7] *Johansen P.M.* // IEEE J. Quant. 1989. Vol. 25. P. 530–539.
- [8] *Refregier Ph., Solumar L., Rajbenbach H., Huignard J.P.* // J. Appl. Phys. 1985. Vol. 58. P. 45–57.
- [9] *Stepanov S.I., Petrov M.V.* // Opt. Commun. 1985. Vol. 53. P. 292–295.