

01;07

Моделирование тепловых процессов, вызываемых воздействием лазерного излучения на органические среды

© К.Г. Куликов

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет,
195251 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: kulikov_kg@hotmail.ru

(Поступило в Редакцию 16 октября 2007 г.)

Предложена математическая модель расчета гипертермии многослойной биологической структуры под действием лазерного излучения. Получены зависимости температурного поля от коэффициента преломления и поглощения для моделируемой биоткани (эпидермиса, верхнего слоя дермы, нижнего слоя дермы, крови и ее форменных элементов) для случая *in vivo*. Приведенные количественные оценки могут быть использованы для предсказания изменений оптических свойств моделируемой биоструктуры, обусловленных в ней различными биофизическими, биохимическими и физиологическими процессами при воздействии на ее поверхность потока неполяризованного монохроматического излучения.

PACS: 02.70.-с, 42.62.Вс

1. Введение

Лазерная терапия принадлежит к числу перспективных и динамично развивающихся направлений современной медицины. Терапевтическое воздействие лазерного излучения неразрывно связано с процессом гипертермии биоткани, что обуславливает необходимость построения модели расчета температурного поля ткани при взаимодействии с низкоинтенсивным (некоагулирующим) лазерным излучением.

Следует отметить, что существует ряд работ, в которых рассматривались вопросы математического моделирования распределения лазерного излучения в многослойной биоткани, а также сопровождающих облучение термических процессов. Большинство исследований посвящено расчету температурных полей, возникающих при облучении биоматериала низкоинтенсивным лазерным излучением в различные моменты времени [1–5]. Так, например, для нахождения распределения поглощенной энергии по глубине тканей применялись различные численные процедуры, включая метод дискретных координат [6], конечно-разностные схемы [1], метод функции Грина [3] и метод Монте-Карло [7]. Последний метод эффективен при сложной геометрии моделируемого биообразца.

Однако анализ термического эффекта лазерного облучения не может быть чисто физическим и должен включать биологические (биофизические) исследования ответной реакции организма. Таким образом, проблема теплового воздействия лазерного излучения может быть представлена как состоящая из четырех последовательно решаемых задач [8]:

- 1) описание распределения энергии лазерного излучения;
- 2) получение абсорбционных характеристик биологического материала;

- 3) анализ распределения температуры в облученной ткани;

- 4) исследование биологических (биохимических, физиологических) изменений в тканях, развивающихся в результате повышения температуры.

В нашей работе, в отличие от [1–7], построена математическая модель, которая позволяет варьировать электрофизические параметры исследуемой биологической структуры (реальная и мнимая часть показателя преломления крови и ее форменных элементов, эпидермиса, верхнего слоя дермы, нижнего слоя дермы), характерные размеры форменных элементов крови и устанавливать зависимости между ними и биологическими свойствами крови с учетом нагрева биоткани при воздействии лазерного излучения. Это позволяет проанализировать распределение температуры в зависимости от электрофизических характеристик моделируемой биологической структуры для случая *in vivo*.

В первой части настоящей статьи рассмотрена задача о рассеянии плоской электромагнитной волны на трехслойной сферической частице, моделирующей клетки крови. Во второй части разбирается усложненный вариант об отражении плоской волны с моделируемого биообразца, состоящего из двух непрерывных слоев и третьего, содержащего неоднородные включения, моделирующие клетки крови с различными показателями преломления, а также кратко рассмотрена задача об отражении гауссова пучка с произвольным поперечным сечением применительно к вышеуказанным условиям и задача определения зависимости интенсивности излучения от коэффициента преломления для системы кровеносных сосудов, находящихся в верхнем слое дермы. Построение этих частей носит вспомогательный характер. Непосредственно в третьей части решена задача нагрева кровеносного сосуда под действием лазерного излучения, падающего на наружную поверхность моделируемой биологической структуры.

2. Рассеяние плоской электромагнитной волны на трехслойной сферической частице

Специфика биологических частиц (форменных элементов крови) требует усложненной более адекватной модели сферических частиц в связи с тем, что возможно наличие ядра, цитоплазмы и плазматической мембраны, присущих исследуемому объекту [9].

Пусть r_1 — радиус ядра клетки, r_2 — радиус цитоплазмы, r_3 — радиус плазматической мембраны.

Рассмотрим рассеяние плоской электромагнитной волны на трехслойной j -сферической частице с концентрическими слоями. Следуя хорошо известной схеме, рассмотренной в [10], представим поле в виде суммы падающего и рассеянного полей, а поле внутри частицы запишем для каждого из слоев в отдельности. Затем, разложив каждое из полей в ряд по фундаментальным векторным сферическим гармоникам и воспользовавшись граничными условиями непрерывности тангенциальных компонент электрического и магнитного поля на поверхности, разделяющих слои с различными значениями электрической и магнитной проницаемости и условиями излучения на бесконечности, найдем соответствующие коэффициенты разложения a_{mn}^j, b_{mn}^j .

В области $r_1 \leq r \leq r_2$, где конечны обе сферические функции Бесселя, внутреннее поле запишется следующим образом:

$$E_{I_2}(j) = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n i E_{mn} [d_{mn_2}^j N_{mn}^1 + c_{mn_2}^j M_{mn}^1 + f_{mn_2}^j M_{mn}^2 + g_{mn_2}^j N_{mn}^2], \quad (1)$$

$$H_{I_2}(j) = - \frac{k_2^j}{\omega \mu_2^j} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n E_{mn} [c_{mn_2}^j N_{mn}^1 + d_{mn_2}^j M_{mn}^1 + g_{mn_2}^j M_{mn}^2 + f_{mn_2}^j N_{mn}^2]; \quad (2)$$

для области $r_2 \leq r \leq r_3$:

$$E_{I_3}(j) = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n i E_{mn} [d_{mn_3}^j N_{mn}^1 + c_{mn_3}^j M_{mn}^1 + f_{mn_3}^j M_{mn}^2 + g_{mn_3}^j N_{mn}^2], \quad (3)$$

$$H_{I_3}(j) = - \frac{k_3^j}{\omega \mu_3^j} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n E_{mn} [c_{mn_3}^j N_{mn}^1 + d_{mn_3}^j M_{mn}^1 + g_{mn_3}^j M_{mn}^2 + f_{mn_3}^j N_{mn}^2]. \quad (4)$$

В области $0 \leq r \leq r_1$, т.е. в окрестности центра шара частицы, с учетом условия конечности поля в центре

внутреннее поле частицы запишется следующим образом:

$$E_{I_1}(j) = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n i E_{mn} [d_{mn_1}^j N_{mn}^1 + c_{mn_1}^j M_{mn}^1], \quad (5)$$

$$H_{I_1}(j) = - \frac{k_1^j}{\omega \mu_1^j} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n E_{mn} [c_{mn_1}^j N_{mn}^1 + d_{mn_1}^j M_{mn}^1]. \quad (6)$$

Запишем разложение падающей волны на поверхность j -частицы по вектор-сферическим гармоникам

$$E_i(j) = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n i E_{mn} [p_{mn}^j N_{mn}^1 + q_{mn}^j M_{mn}^1], \quad (7)$$

$$H_i(j) = - \frac{k}{\omega \mu} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n E_{mn} [q_{mn}^j N_{mn}^1 + p_{mn}^j M_{mn}^1]. \quad (8)$$

Выражение для рассеянного поля на j -частицы имеет вид

$$E_s(j) = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n i E_{mn} [a_{mn}^j N_{mn}^1 + b_{mn}^j M_{mn}^1], \quad (9)$$

$$H_s(j) = \frac{k}{\omega \mu} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n E_{mn} [b_{mn}^j N_{mn}^1 + a_{mn}^j M_{mn}^1]. \quad (10)$$

Для определения коэффициентов a_{mn}^j, b_{mn}^j необходимо использовать на границе между j -частицей и окружающей средой граничное условие:

$$[E_2 - E_1] \times e_r = 0, \quad [E_3 - E_2] \times e_r = 0, \quad (11)$$

$$[H_2 - H_1] \times e_r = 0, \quad [H_3 - H_2] \times e_r = 0, \quad (12)$$

$$[E_i(j) + E_s(j) - E_I(j)] \times e_r = [H_i(j) + H_s(j) - H_I(j)] \times e_r. \quad (13)$$

Подставив разложения полей по вектор-сферическим гармоникам в граничные условия (13) и используя соотношения ортогональности для сферических гармоник, получим систему уравнений для неизвестных коэффициентов разложения. Тогда a_{mn}^j, b_{mn}^j определится следующим образом:

$$a_{mn}^j = a_n^j p_{mn}^j, \quad b_{mn}^j = b_n^j q_{mn}^j, \quad (14)$$

где

$$a_n^j = - \frac{\psi_n(n_0 x_3^j) \mu_3^j \Theta_2 - \mu_3^j n_0 \frac{\psi'_n(n_0 x_3^j)}{\psi_n(n_0 x_3^j)}}{\xi_n(n_0 x_3^j) \mu_3^j \Theta_2 - \mu_3^j n_0 \frac{\xi'_n(n_0 x_3^j)}{\xi_n(n_0 x_3^j)}}, \quad \beta = \frac{\chi'_n(m_2^j x_2^j)}{\chi_n(m_2^j x_2^j)}; \quad (15)$$

$$A_1 = \frac{\psi_n(m_2^j x_1^j) \mu_2^j m_1^j \frac{\psi'_n(m_1^j x_1^j)}{\psi_n(m_1^j x_1^j)} - \mu_1^j m_2^j \frac{\psi'_n(m_2^j x_1^j)}{\psi_n(m_2^j x_1^j)}}{\chi_n(m_2^j x_1^j) \mu_2^j m_1^j \frac{\psi'_n(m_1^j x_1^j)}{\psi_n(m_1^j x_1^j)} - \mu_1^j m_2^j \frac{\chi'_n(m_2^j x_1^j)}{\chi_n(m_2^j x_1^j)}},$$

$$\Theta_1 = \frac{\psi_n(m_2^j x_2^j) \frac{\psi'_n(m_2^j x_2^j)}{\psi_n(m_2^j x_2^j)} - A_1 \beta}{\chi_n(m_2^j x_2^j) \frac{\psi_n(m_2^j x_2^j)}{\chi_n(m_2^j x_2^j)} - A_1}$$

Будем считать, что толщина слоев H_1, H_2, H_3 является медленно меняющейся функцией переменных x и y . Обозначим отношение характерной толщины слоя к характерному продольному масштабу L через ϵ [12], тогда получим

$$H_1(x, y) = h_1(\xi_1, \xi_2)|_{\xi_1=\epsilon x, \xi_2=\epsilon y}, \quad (21)$$

$$H_2(x, y) = h_1(\xi_1, \xi_2)|_{\xi_1=\epsilon x, \xi_2=\epsilon y}, \quad (22)$$

$$H_3(x, y) = h_1(\xi_1, \xi_2)|_{\xi_1=\epsilon x, \xi_2=\epsilon y}. \quad (23)$$

Рассмотрим случай p -поляризации. Поскольку H_1, H_2, H_3 зависит от x, y , то естественно искать отраженное поле в виде волн с медленно изменяющимися амплитудами и быстро осциллирующими фазами:

$$E_1 = \exp\left(\frac{i}{\epsilon} \tau_{\text{inc}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\right) + \exp\left(\frac{i}{\epsilon} \tau_{\text{ref}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\right) A(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad (24)$$

$$E_2 = \exp\left(\frac{i}{\epsilon} \tau_{2\text{elap}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\right) B^+(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + \exp\left(\frac{i}{\epsilon} \tau_{3\text{ref}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\right) B^-(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad (25)$$

$$E_3 = \exp\left(\frac{i}{\epsilon} \tau_{3\text{elap}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\right) C^+(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + \exp\left(\frac{i}{\epsilon} \tau_{4\text{ref}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\right) C^-(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad (26)$$

$$E_4 = \exp\left(\frac{i}{\epsilon} \tau_{4\text{elap}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\right) D^+(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + \exp\left(\frac{i}{\epsilon} \tau_{5\text{ref}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\right) D^-(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + E_{4s\theta}(\xi_1, \xi_2, \xi_3). \quad (27)$$

В отличие от работы [13] выражение (27) отражает условие включения в поле E_4 рассеяния на неоднородностях (сферических частицах, моделирующих клетки крови), а именно: $E_{4s\theta}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ есть рассеянное поле на j -частице, которое будет определено ниже

$$E_5 = \exp\left(\frac{i}{\epsilon} \tau_{5\text{elap}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\right) E(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad (28)$$

где $A, B^\pm, C^\pm, D^\pm, E$ — амплитуды, которые выражаются через $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \tau_{1\text{ref}}, \tau_{2\text{elap}}, \tau_{3\text{ref}}, \tau_{3\text{elap}}, \tau_{4\text{ref}}, \tau_{5\text{ref}}, \tau_{5\text{elap}}$ — неизвестные функции своих аргументов.

Подставим поля E_1, E_2, E_3, E_4 в уравнение (19). В результате получим уравнения на амплитуды и эйконалы

$$\epsilon^2 \Delta A + i\epsilon(2\nabla A \nabla \tau_{1\text{ref}} + A \Delta \tau_{1\text{ref}}) + A(k^2 n_2^2 - \nabla \tau_{1\text{ref}}) = 0. \quad (29)$$

Аналогичным образом записываются уравнения на амплитуды B^\pm, C^\pm, D^\pm, E и эйконалы. Амплитуды $A,$

B^\pm, C^\pm, D^\pm, E ищем в виде рядов по степеням малого параметра $\epsilon x, \epsilon y$

$$A(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \epsilon x, \epsilon y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} A_{ij}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)(\epsilon x^i, \epsilon y^j). \quad (30)$$

Аналогичным образом можно записать выражение для амплитуды E

$$B(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \epsilon x, \epsilon y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} B_{ij}^+(\xi_1, \xi_2, \xi_3)(\epsilon x^i \epsilon y^j) + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} B_{ij}^-(\xi_1, \xi_2, \xi_3)(\epsilon x^i \epsilon y^j). \quad (31)$$

Так же записываются выражения для амплитуд C^\pm, D^\pm . Решив уравнения (29), с учетом (30)–(31) находим эйконалы для отраженных и прошедших полей и лучевые амплитуды (в главном приближении)

$$\tau_{1\text{ref}} = k_{2x}\xi_1 + k_{2y}\xi_2 + k_{2z}\xi_3, \quad k_{2x}^2 + k_{2y}^2 + k_{2z}^2 = k^2 n_2^2; \quad (32)$$

$$\tau_{5\text{ref}} = k_{5x}\xi_1 + k_{5y}\xi_2 + k'_{5z}\xi_3, \quad k_{5x}^2 + k_{5y}^2 + k_{5z}^2 = k^2 n_5^2; \quad (33)$$

$$\tau_{5\text{elap}} = k_{5x}\xi_1 + k_{5y}\xi_2 - k_{5z}\xi_3, \quad k_{5x}^2 + k_{5y}^2 + k_{5z}^2 = k^2 n_5^2; \quad (34)$$

$$\tau_{5j} = k_{jx}\xi_1 + k_{jy}\xi_2 - k_{jz}\xi_3, \quad k_{jx}^2 + k_{jy}^2 + k_{jz}^2 = k^2 n_j^2, \quad (j = \overline{2, 4}); \quad (35)$$

$$\tau_{\text{ref}} = k_{ix}\xi_1 + k_{iy}\xi_2 + k_{iz}\xi_3, \quad k_{ix}^2 + k_{iy}^2 + k_{iz}^2 = k^2 n_i^2, \quad (i = \overline{3, 5}); \quad (36)$$

$$k_{jx} = kn_j \sin \theta \sin \phi, \quad k_{jy} = kn_j \sin \theta \cos \phi, \quad k_{jz} = kn_j n_j \cos \theta, \quad j = \overline{2, 5};$$

$$A(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \epsilon x, \epsilon y) = A_{00}(t_0) + \epsilon x [A_{10}(t_0) + \xi_3 A_{0000}(t_0)] + \epsilon y [A_{01}(t_0) + \xi_3 A_{0000}(t_0)] + \epsilon x \epsilon y [A_{11}(t_0) + \xi_3 A_{0000}(t_0)] + 0(\epsilon^2), \quad (37)$$

$$t_0 = \xi_1 + \xi_2 - \xi_3 \frac{k_{2x} k_{2y}}{k_{2z}},$$

$$A_{0000}(t_0) = -\frac{1}{2i} \frac{\partial^2 A_{00}(t_0)}{\partial t_0^2} \frac{k^2 n_2^2}{k_{2z}^3}.$$

Аналогичным образом записываются выражения и на остальные амплитуды. Более подробный вывод формул (32)–(37) можно найти в статье [13].

В основной системе координат, как показано в работе [11], выражение для рассеянного поля имеет вид

$$E_{4s} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n i E_{mn} [a_{mn} N_{mn}^3 + b_{mn} M_{mn}^3], \quad (38)$$

$$H_{4s} = \frac{k}{\omega \mu} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n E_{mn} [b_{mn} N_{mn}^3 + a_{mn} M_{mn}^3], \quad (39)$$

где

$$E_{mn} = |E_0| i^n [2n + 1] \frac{(n - m)!}{(n + m)!}, \quad (40)$$

$$a_{mn} = \sum_{l=1}^L \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{\mu=-v}^v [a_{\mu\nu}^l A_{mn}^{\mu\nu}(l, j_0) + b_{\mu\nu}^l B_{mn}^{\mu\nu}(l, j_0)], \quad (41)$$

$$b_{mn} = \sum_{l=1}^L \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{\mu=-v}^v [a_{\mu\nu}^l B_{mn}^{\mu\nu}(l, j_0) + b_{\mu\nu}^l A_{mn}^{\mu\nu}(l, j_0)], \quad (42)$$

где $A_{\mu\nu}^{mn}(l, j)$, $B_{\mu\nu}^{mn}(l, j)$ определено в [11].

Система линейных алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов a_{mn}^j , b_{mn}^j имеет следующий вид [11]:

$$a_{mn}^j = a_n^j \left[p_{mn}^{j,j} - \sum_{l \neq j} \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{\mu=-v}^v [a_{\mu\nu}^l A_{mn}^{\mu\nu}(l, j) + b_{\mu\nu}^l B_{mn}^{\mu\nu}(l, j)] \right], \quad (43)$$

$$b_{mn}^j = b_n^j \left[q_{mn}^{j,j} - \sum_{l \neq j} \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{\mu=-v}^v [a_{\mu\nu}^l B_{mn}^{\mu\nu}(l, j) + b_{\mu\nu}^l A_{mn}^{\mu\nu}(l, j)] \right], \quad (44)$$

$$n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, \quad m = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n.$$

Запишем (43)–(44) в следующем виде:

$$a^j + \sum_{l \neq j} T^{lj} a^l = p^j, \quad (45)$$

$$T^{l,j} = \begin{pmatrix} a_n^j A_{mn}^{\mu\nu}(l, j) & a_n^j B_{mn}^{\mu\nu}(l, j) \\ b_n^j B_{mn}^{\mu\nu}(l, j) & b_n^j A_{mn}^{\mu\nu}(l, j) \end{pmatrix},$$

$$p^j = (a_n^j p_{mn}^{j,j} b_n^j q_{mn}^{j,j}), \quad a^j = (a_{mn}^j b_{mn}^j),$$

где $p_{mn}^{j,j}$, $q_{mn}^{j,j}$ определено в [11], а a_n^j , b_n^j находится из выражения (14).

Покомпонентная запись рассеянного поля имеет вид:

$$E_{4s\theta} \sim \frac{e^{ikz}}{k'_{4z} r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n E_{mn} [-i a_{mn} \xi'_n \tau_{mn} - b_{mn} \xi'_n \pi_{mn}] \exp im\phi, \quad (46)$$

$$E_{4s\phi} \sim \frac{e^{ikz}}{k'_{4z} r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n E_{mn} [-i b_{mn} \xi'_n \tau_{mn} - a_{mn} \xi'_n \pi_{mn}] \exp im\phi, \quad (47)$$

$$\tau_{mn} = \frac{\partial}{\partial \theta} P_n^m \cos \theta, \quad \pi_{mn} = \frac{m}{\sin \theta} P_n^m \cos \theta.$$

Аналогичным образом получают выражения для магнитного поля H .

Подстановка (24)–(28) с учетом (32)–(37) и (46), (47) при условии непрерывности касательных компонент E , H и на границах раздела сред порождает рекуррентную систему уравнений. Из этой системы в основном

приближении для отраженного поля получается коэффициент отражения A_{00} с учетом рассеяния в слое, содержащем неоднородные включения.

Перейдем теперь к краткому выводу отражательных формул для гауссова пучка. Как было показано в работе [13], задача решается путем разложения полей встречных волн по плоским волнам в области среды 1 и их отражения слоем 2, обратного преобразования с последующим интегральным преобразованием Гюйгенса–Френеля для получения поля в исходном сечении. В результате получим отраженное поле на линии пучка $z'' = 0$ в системе координат, связанной с главным направлением распространения отраженной волны

$$\begin{aligned} E_{\text{ref}} = & \frac{A_{00}(\xi_1'' \sim + \xi_2'' \sim, k_{1y}, k_{1x}) \Phi(\xi_1'', \xi_2'')}{\alpha} \\ & - \frac{\epsilon x}{\alpha} \left[A_{10}(\xi_1'' \sim + \xi_2'' \sim, k_{1y}, k_{1x}) \right. \\ & + \frac{k_{13}}{kn_1} \xi_1'' A_{0000}(\xi_1'' \sim + \xi_2'' \sim, k_{1y}, k_{1x}) \left. \right] \Phi(\xi_1'', \xi_2'') \\ & - \frac{\epsilon y}{\alpha} \left[A_{01}(\xi_1'' \sim + \xi_2'' \sim, k_{1y}, k_{1x}) \right. \\ & + \frac{k_{23}}{kn_1} \xi_2'' A_{0000}(\xi_1'' \sim + \xi_2'' \sim, k_{1y}, k_{1x}) \left. \right] \Phi(\xi_1'', \xi_2'') \\ & - \frac{\epsilon x \epsilon y}{\alpha} \left[A_{11}(\xi_1'' \sim + \xi_2'' \sim, k_{1y}, k_{1x}) \right. \\ & + \frac{k_{13}}{kn_1} \xi_1'' A_{0000}(\xi_1'' \sim + \xi_2'' \sim, k_{1y}, k_{1x}) \left. \right] \Phi(\xi_1'', \xi_2'') \\ & - \frac{\epsilon x \epsilon y}{\alpha} \left[\frac{k_{23}}{kn_1} \xi_2'' A_{0000}(\xi_1'' \sim + \xi_2'' \sim, k_{1y}, k_{1x}) \right] \Phi(\xi_1'', \xi_2'') \\ & - \left[\frac{\epsilon x k_x^0}{ikn_1 \alpha} \left[\frac{\partial A_{00}(\xi_1'' \sim + \xi_2'' \sim, k_{1y}, k_{1x})}{\partial k_{1x}} \right. \right. \\ & + \left. \left. \frac{\partial A_{00}(\xi_1'' \sim + \xi_2'' \sim, k_{1y}, k_{1x})}{\partial k_{1y}} \right] \frac{\partial \Phi(\xi_1'', \xi_2'')}{\partial \xi_1''} \right] \\ & - \left[\frac{\epsilon y k_y^0}{ikn_1 \alpha} \left[\frac{\partial A_{00}(\xi_1'' \sim + \xi_2'' \sim, k_{1y}, k_{1x})}{\partial k_{1x}} \right. \right. \\ & + \left. \left. \frac{\partial A_{00}(\xi_1'' \sim + \xi_2'' \sim, k_{1y}, k_{1x})}{\partial k_{1y}} \right] \frac{\partial \Phi(\xi_1'', \xi_2'')}{\partial \xi_1''} \right] + O(\epsilon^2); \quad (48) \end{aligned}$$

$$k_x^0 = k_{11} - k_{21}, \quad k_y^0 = k_{12} - k_{22},$$

$$k_x^1 = k_{11} + k_{12}, \quad k_y^1 = k_{21} + k_{22};$$

$$\xi_1'' \sim = \xi_1'' \left(\frac{k_x^1}{kn_1} - \frac{k_{13} k_{1x} k_{1y}}{k_{1z} kn_1} \right),$$

$$\xi_2'' \sim = \xi_1'' \left(\frac{k_y^1}{kn_1} - \frac{k_{23} k_{1x} k_{1y}}{k_{1z} kn_1} \right);$$

$$\begin{aligned} \alpha &= (a_{11}^2 + a_{22}a_{12} + a_{13}^2)(a_{11}a_{21} + a_{22}^2 + a_{13}a_{23}) \\ &+ (a_{21}a_{11} + a_{22}^2 + a_{23}a_{13})(a_{21}^2 + a_{12}a_{22} + a_{23}^2); \quad (49) \\ k_{11} &= kn_1a_{11}, \quad k_{12} = kn_1a_{12}, \quad k_{13} = kn_1a_{13}, \\ k_{21} &= kn_1a_{21}, \quad k_{22} = kn_1a_{22}, \quad k_{23} = kn_1a_{23}; \\ a_{11} &= \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \cos \theta \sin \psi, \\ a_{12} &= -\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \cos \theta \sin \psi; \\ a_{13} &= \sin \theta \sin \psi, \quad a_{21} = \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \theta \cos \psi, \\ a_{33} &= \cos \theta, \quad a_{31} = \sin \varphi \sin \theta; \\ a_{22} &= -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \theta \cos \psi, \\ a_{23} &= -\sin \varphi \cos \psi, \quad a_{32} = \cos \varphi \sin \theta. \end{aligned}$$

Определим зависимость интенсивности отраженного поля от электрофизических характеристик для слоя с неоднородными включениями.

Интенсивность излучения определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} I &= |E_{\perp}|^2 + |E_{\parallel}|^2, \quad (50) \\ E_{\perp} &= \cos(\theta)E_z + \sin(\theta)E_x, \\ E_{\parallel} &= \sin(\theta)E_z - \cos(\theta)E_x, \quad (51) \end{aligned}$$

где E_x, E_z даются известными выражениями, которые соответствуют системе уравнений Максвелла (18) в декартовой системе координат, а поле для E дается выражением (48).

Таким образом, на данном этапе нами рассмотрен наиболее усложненный вариант об отражении плоской волны от слоя, состоящего из двух непрерывных слоев, и третьего, содержащего неоднородные включения с различными показателями преломления, а также кратко рассмотрена задача об отражении гауссова пучка с произвольным поперечным сечением применительно к вышеуказанным условиям. Выражение (50) определяет явную зависимость интенсивности отраженного поля, освещаемого лазерным пучком, от показателей преломления моделируемой биоткани: крови ее форменных элементов, эпидермиса, верхнего слоя дермы, нижнего слоя дермы.

4. Математическая модель нагрева биологических тканей под воздействием лазерного излучения

Предлагается математическая модель нагрева кровеносного сосуда под действием лазерного излучения, падающего на наружную поверхность кожи.

В математической модели используются размерные переменные. Рассматриваемая модель биоткани представляет собой многослойную полубесконечную биологическую среду. Лазерное излучение, падающее на поверхность кожи, поглощается слоями моделируемой биоткани (эпидермисом, дермой), а также гемоглобином крови, вызывая рост температуры в подкожных слоях и

внутри сосудов. В общем случае моделирование тепловых процессов в биоткани требует решения трехмерного уравнения вида [1]

$$(c\rho)^{-1} \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T(x, y, z, t)) - Q(x, y, m_{\tau}^j, x_{\tau}^j) = \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (52)$$

где c — удельная теплоемкость, ρ — плотность, λ — коэффициент теплопроводности, $m_{\tau}^j = N_{\tau}^j/n_0$, N_{τ}^j — комплексный показатель преломления j -частицы для τ концентрического слоя, n_0 — показатель преломления окружающей среды, $x_{\tau}^j = ka_{\tau}^j$, $j = \overline{1 \dots N}$, $\tau = \overline{1, 3}$, где a_{τ}^j — радиус j -частицы с τ концентрическим слоем, $T(x, y, z, t)$ — искомое распределение температуры, $Q(x, y, m_{\tau}^j, x_{\tau}^j)$ — найденное на этапе решения оптической задачи распределение объемной плотности мощности тепловых нагрузок в биоткани, обусловленных поглощением в биоткани. При этом $Q(x, y, m_{\tau}^j, x_{\tau}^j)$ определяется следующим образом:

$$Q(x, y, m_{\tau}^j, x_{\tau}^j) = \mu \int_{4\pi} I(x, y, m_{\tau}^j, x_{\tau}^j) d\Omega, \quad (53)$$

где $I(x, y, m_{\tau}^j, x_{\tau}^j)$ — есть интенсивность, которая определена выражением (50), μ — коэффициент поглощения среды, $d\Omega$ — телесный угол.

Взаимодействие наружной поверхности кожи с окружающей средой (конвекция) в линеаризованном виде может быть описано граничными условиями 3-го рода [1]:

$$\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} - A(T - T_0) \right) \Big|_{z=0} = 0, \quad (54)$$

где A — приведенный коэффициент теплоотдачи, T_0 — начальная температура

$$T|_{t=0, z=0} = 34^{\circ}, \quad T|_{t=0, z=h_1(x, y)} = 37^{\circ}. \quad (55)$$

Выражение (55) означает, что температура изменяется по глубине от 34 до 37° [5].

На границе $z = h_i(x, y)$ сопряжения i -го слоя с $(i + 1)$ -м слоем кожи выполняются условия непрерывности теплового потока и температуры

$$\left(\lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial z} - \lambda_{(i+1)} \frac{\partial T_{(i+1)}}{\partial z} \right) \Big|_{z=h_i(x, y)} = 0, \quad (56)$$

$$(T_i - T_{(i+1)}) \Big|_{z=h_i(x, y)} = 0, \quad (57)$$

где $h_i(x, y)$ определяется выражением (17).

В результате решения системы уравнений (52)–(57) получим:

а) распределение температуры по слоям вдоль направления распространения лазерного излучения (ось z);

б) зависимость температуры от оптических характеристик биоткани, что позволит исследовать влияние температурного поля на электрофизические параметры моделируемой биологической структуры для случая *in vivo*.

Известно, что решение задачи (52) существует и единственно [14–15].

Дальнейшее исследование и анализ приведенных зависимостей будем проводить численными методами.

5. Численные расчеты с модельной средой. Выводы

Для численного решения системы уравнений (52)–(57) строится неявная итерационная схема на пространственно-временной сетке, а граничные условия для температуры заменяются их конечно-разностными аналогами [16].

Рассмотрим модельную среду, изображенную на рис. 1, она имеет следующие параметры [17]: характерная толщина слоев $d_2 = 65 \cdot 10^{-6} \text{ m}$, $d_3 = 565 \cdot 10^{-6} \text{ m}$, $d_4 = 90 \cdot 10^{-6} \text{ m}$, коэффициент теплопроводности ($\text{W/m} \cdot \text{K}$), удельная теплоемкость ($\text{J/g} \cdot \text{K}$), плотность $\times 10^{-3} \text{ (kg/m}^3\text{)}$ соответственно составила [1]: для первого слоя — 0.498, 3.2, 1; для второго слоя — 0.266, 3.3.7, 1.6; для третьего слоя — 0.530, 3.6, 1; для четвертого слоя — 0.266, 3.7, 1.6; коэффициент теплоотдачи $0.009 \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$. Произвольно задаваемые константы $a_1 = -0.0024$, $b_1 = 0.02$, $a_2 = 0.021$, $b_2 = 0.030$, $a_3 = 0.041$, $b_3 = 0.051$, $c_1 = c_2 = c_3 = 10^{-2}$. Значения параметров $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, c_1, c_2, c_3$ подобраны для границы раздела каждого слоя таким образом, чтобы форма поверхности наиболее соответствовала форме границы раздела соответствующего слоя в структуре нормальной кожи человека, длина волны $\lambda = 0.63 \mu\text{m}$ (центр линии гелий–неонового лазера). Расчеты проводились для двуслойных частиц, моделирующих эритроциты. Количество частиц в моделируемом слое принималось равным десяти.

На рис. 2 представлено распределение температуры, зависящей от времени нагрева, в направлении падающего излучения (ось z) для многослойной поглощающей и рассеивающей свет среды, моделирующей кожу человека и ее компоненты при различных коэффициентах преломления. Из рисунка видно, что верхний слой моделируемой биоткани (эпидермис) заметно нагревается. Это связано, видимо, с тем, что в поверхностном слое свет при заданной длине волны сильно поглощается в основном меланином.

Также можно сделать вывод, что уже на десятой секунде непрерывного воздействия лазера температура на поверхности превышает приблизительно 45°C (см. рис. 2, *b*) и, возможно, наступает некроз тканей или термический ожог. Таким образом, модель позволяет оценить термическое действие на биоткань и выбрать оптимальное время воздействия, чтобы происходило равномерное и длительное нагревание ткани, путем исключения негативных реакций и определить ожидаемые границы зон деструкции и некротизации тканей.

Следует отметить, что построенная математическая модель достаточно устойчива и чувствительна к изме-

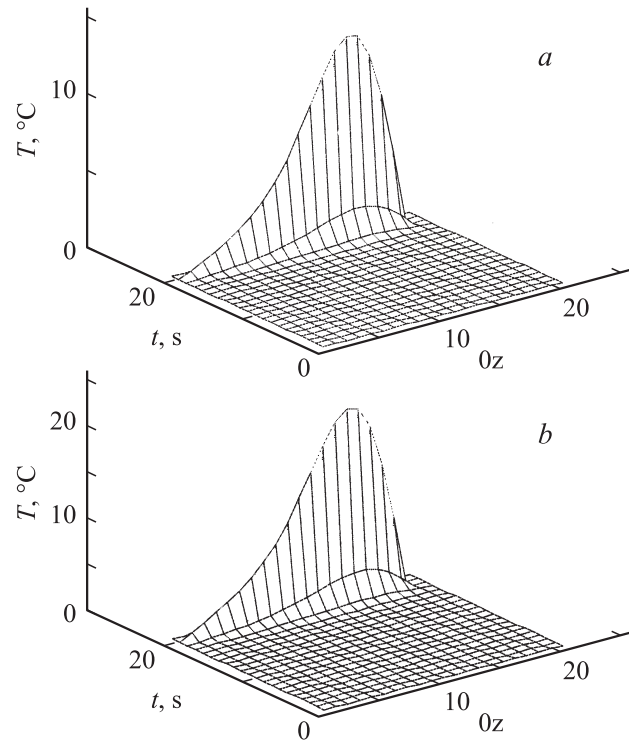


Рис. 2. Пространственное распределение температуры в направлении падающего излучения в зависимости от времени t в окрестности линии $0.63 \mu\text{m}$ гелий-неонового лазера. В начальный момент времени $t = 0$ температура среды равна 34°C . Время воздействия лазера 15 s. Параметры среды: действительное значение коэффициента преломления цитоплазмы биологической частицы: a — 1.35, b — 1.45, мнимое значение коэффициента преломления цитоплазмы биологической частицы 0.000 01, действительное значение коэффициента преломления плазматической мембраны биологической частицы: a — 1.23, b — 1.43, мнимое значение коэффициента преломления плазматической мембраны биологической частицы 0.000 01, радиус цитоплазмы биологической частицы $3 \mu\text{m}$, радиус плазматической мембраны биологической частицы: a — 2, b — $2.3 \mu\text{m}$. b — действительное значение коэффициента преломления плазматической мембраны биологической частицы 1.43, мнимое значение коэффициента преломления плазматической мембраны биологической частицы 0.000 01, радиус цитоплазмы биологической частицы $3 \mu\text{m}$, радиус плазматической мембраны биологической частицы $2.3 \mu\text{m}$.

нению коэффициентов преломления моделируемой биоткани и ее компонентов при воздействии на нее потока неполяризованного монохроматического излучения.

Интересно отметить эффект, который был получен в результате модельного эксперимента, состоящий в выявлении линейной зависимости между распределением температурного поля падающего излучения от коэффициентов преломления для моделируемой биоткани, что позволяет использовать построенную модель для предсказания изменений электрофизических свойств моделируемой биоструктуры при воздействии на нее лазерного излучения для случая *in vivo*.

Таким образом, модель позволяет варьировать на одной установке состав биологических объектов, их электрофизические параметры, теплофизические характеристики, характерную толщину слоев, а также характерные размеры исследуемой биологической структуры различного строения с целью анализа биофизических процессов, связанных с термическим воздействием лазера на верхние слои кожи.

Моделирование такого рода позволяет не только находить предварительные параметры поля лазерного излучения, но и выявлять и изучать эффекты ответных реакций на лазерное воздействие при различных уровнях организации живой материи.

В целом, результаты моделирования тепловых полей лазерного излучения могут быть использованы для обработки методов лазерной термотерапии и биостимуляции, могут служить основой математического обеспечения экспериментального определения оптических и теплофизических параметров

Список литературы

- [1] Щербаков Ю.Н., Якунин А.Н., Ярославский И.В., Тучин В.В. // Опт. и спектр. 1994. Т. 76. № 5. С. 845–850.
- [2] Щербаков Ю.Н., Якунин А.Н., Ярославский И.В., Тучин В.В. // Опт. и спектр. 1994. Т. 76. № 5. С. 851–857.
- [3] Loze M.K., Wright C.D. // Appl. Optics. 1998. Vol. 37. N. 28. P. 6822.
- [4] Сетейкин А.Ю., Гершевич М.М., Еришов И.А. // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 1. С. 100–104.
- [5] Сетейкин А.Ю., Красников И.В. // Оптический журнал. 2006. Т. 73. № 3. С. 31–34.
- [6] Motamedi M., Rastegar S., Le Carpentier G.L., Welch A.J. // Appl. Optics. 1989. Vol. 28. N 2. P. 2230.
- [7] Меглинский И.В. // Квант. электрон. 2001. Т. 31. № 12. С. 1101.
- [8] Плетнев С.Д. Лазеры в клинической медицине. М.: Медицина, 1996. 427 с.
- [9] Грин Н., Стаут У., Тейлор Д. Биология / Пер. с англ. М.: Мир, 1996. Т. 3. 376 с.
- [10] Борен К., Хафман Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами / Пер. с англ. З.И. Фейзулина, А.Г. Виноградова, Л.А. Персяна. М., 1986.
- [11] Куликов К.Г., Радин А.М. // Опт. и спектр. 2002. Т. 92. № 2. С. 228–236.
- [12] Молотков Л.А. Исследование распространения волн в пористых и трещиноватых средах на основе эффективных моделей Био и слоистых сред. СПб: Наука, 2001. 348 с.
- [13] Куликов К.Г., Радин А.М. // Опт. и спектр. 2004. Т. 96. № 3. С. 522–534.
- [14] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
- [15] Ладыженская О.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
- [16] Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. 616 с.
- [17] Тучин В.В. Лазеры и волоконная оптика в биомедицинских исследованиях. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1998. 383 с.