01;03

О структуре течения, связанного с капиллярно-гравитационной волной в заряженном слое вязкой электропроводной жидкости на твердом дне

© А.И. Григорьев, Д.М. Пожарицкий, С.О. Ширяева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 20 февраля 2008 г.)

Найденные аналитические решения задачи об исследовании временно́й эволюции капиллярно-гравитационной волны в заряженном слое вязкой электропроводной жидкости на твердом доме. Показано, что вихревая компонента движения жидкости, связанного с волной, возникает не только вблизи свободной поверхности жидкости, но и у твердого дна. Отношение амплитуд вихревой компоненты поля скоростей у свободной поверхности и у твердого дна зависит от соотношения между толщиной слоя жидкости и длиной волны. Когда длина волны много больше толщины слоя жидкости, амплитуда вихревого движения возле дна превышает амплитуду вихревого движения у свободной поверхности жидкости, а вихревое движение заполняет весь объем жидкости.

PACS: 47.10.-g

Введение

Изучение физических закономерностей реализации капиллярно-гравитационного волнового движения на заряженной поверхности вязкой электропроводной жидкости конечной толщины представляет значительный интерес в связи с многочисленными техническими и технологическими приложениями (см., например, [1–4] и цитируемую там литературу).

В [5–8] на уровне вывода и анализа дисперсионного уравнения для капиллярно-гравитационных волн на заряженной свободной поверхности слоя вязкой жидкости конечной толщины в различных физических ситуациях изучено влияние жидкости и толщины слоя на закономерности развития неустойчивости свободной поверхности по отношению к поверхностному заряду. Основной результат этих работ состоит в выявлении факта зависимости от вязкой диссипации и конечности толщины слоя величины инкремента развития неустойчивости на начальной стадии ее реализации и отсутствия влияния этих факторов на критические условия реализации неустойчивости.

Бо́льшая часть нелинейных исследований волнового движения на однородно заряженной поверхности слоя вязкой жидкости выполнена в приближении „мелкой воды", когда малым параметрам задачи является отношение толщины слоя к длине волны (см., например, [8–10]). Подобное упрощение не всегда обосновано [1,3,11], и к тому же заметная часть таких работ сводится к выводу нелинейных уравнений, имеющих солитонные решения [8,9]. Только в последние годы появились работы [12,13], в которых влияние вязкости на нелинейное периодическое капиллярно-гравитационное волновое движение на свободной поверхности вязкой жидкости асимптотически корректно исследуется на основе полного уравнения Навье–Стокса, в том числе и в заряженном слое вязкой электропроводной жидкости конечной толщины [4,14,15]. Тем не менее вопрос о структуре течений (о закономерностях распределения по толщине слоя вихревой и потенциальной компонент поля скоростей), связанных с периодическим волновым движением в заряженном слое вязкой электропроводной жидкости конечной толщины, в упомянутых работах практически не затронут. Устранению этого пробела должна послужить настоящая работа.

1. Формулировка задачи

Будем решать задачу о временно́й эволюции капиллярно-гравитационных волн плоской однородно заряженной, с плотностью заряда σ, свободной поверхности вязкой несжимаемой идеально проводящей жидкости конечной глубины d. Примем, что жидкость характеризуется плотностью ρ, коэффициентом кинематической вязкости ν, коэффициентом поверхностного натяжения γ и находится в поле тяжести g и в электростатическом поле напряженностью $F_0 \equiv 4\pi\sigma$, перпендикулярном свободной поверхности жидкости. Потенциал электрического поля $\Phi_0(z)$ над невозмущенной поверхностью жидкости имеет вид $\Phi_0(z) = -4\pi\sigma z$.

Все рассмотрение проведем в прямолинейной декартовой системе координат, плоскость $z = 0$ которой совпадает с невозмущенной свободной поверхностью жидкости так, что ось z ориентирована противоположно направлению поля силы тяжести $\mathbf{n}_z \parallel -\mathbf{g}$ ($\mathbf{n}_z$ — орт оси координаты z), а ось x — по направлению движения плоской капиллярно-гравитационной волны

$\sim \exp(st - ikx)$, здесь s — комплексная частота, k — волновое число, t — время, i — мнимая единица.

Пусть функция $\xi(x,t) = \zeta_0 \exp(ikx)$ описывает виртуальную начальную деформацию плоской равновесной в поле сил тяжести поверхности жидкости, где ζ_0 много меньше длины волны и капиллярной постоянной жидкости $\alpha \equiv \sqrt{\gamma/\rho g}$. Примем также, что амплитуда $\mathbf{U}(\mathbf{r},t)$ — поля скоростей течения жидкости, вызванного волной $\zeta(x,t)$, — в безразмерных переменных, в которых $\rho = g = \gamma = 1$, имеет тот же порядок малости, что и $\zeta(x,t)$.

Система уравнений электрогидродинамики вязкой жидкости, описывающая движение жидкости в анализируемой системе, имеет вид

$$\frac{dU}{dt} = -\nabla P(\mathbf{r},t) + \nu\Delta U - \nabla \mathbf{z}; \quad \nabla\cdot\mathbf{U} = 0; \quad \Delta\Phi = 0;$$

$$z = \xi: \quad \Phi = \text{const}, \ \frac{dF}{dt} = 0, \ F(x,z,t) \equiv z - \xi(x,t),$$

$$\mathbf{n}(\boldsymbol{\tau}\cdot\nabla)\mathbf{U} + \boldsymbol{\tau}\cdot(\mathbf{n}\cdot\nabla)\mathbf{U} = 0,$$

$$-P(\mathbf{r},t) + 2\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\nabla)\mathbf{U} - P_E(\mathbf{r},t) + P_\gamma(\mathbf{r},t) = 0,$$

$$z = -d: \quad \mathbf{U} = 0; \quad z\to\infty; \quad -\nabla\Phi \to E_0 e_z.$$

$$t = 0: \quad \xi(x,t) = \zeta_0\exp(ikx).$$

В выписанных выражениях $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{n}$ — орты касательной и нормали к свободной поверхности жидкости $P(\mathbf{r},t)$ и $\Phi(\mathbf{r},t) \equiv \Phi_0(z) + \phi(\mathbf{r},t)$ — поля гидродинамического давления в жидкости и электростатического (в предположении, что гидродинамические скорости много меньше скорости распространения электромагнитного сигнала) потенциала вне жидкости соответственно, $P_E(\mathbf{r},t)$ и $P_\gamma(\mathbf{r},t)$ — давления электрического поля и сил поверхностного натяжения на свободную поверхность жидкости.

Полагая безразмерную амплитуду волны много меньшей единицы, линеаризуем по ней задачу, и снося граничные условия на свободной поверхности $F(x,z,t) = 0$ на невозмущенную поверхность жидкости $z = 0$, получим

$$\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t} = -\nabla P + \nu\Delta\mathbf{U} - \nabla z; \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{U} = 0; \qquad \Delta\phi = 0; \tag{2}$$

$$z = 0: \quad -\frac{\partial\xi}{\partial t} + U_z = 0; \ \frac{\partial U_z}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial z} = 0; \ \phi = -\frac{\partial\Phi_0}{\partial z}\xi; \tag{3}$$

$$-p(\xi) + 2\nu\frac{\partial U_z}{\partial z} - p_E(\xi) + p_\gamma(\xi) = 0; \tag{4}$$

$$z = -d: \qquad \mathbf{U} = 0; \tag{5}$$

$$z\to\infty: \qquad \nabla\Phi \to -E_0\mathbf{e}_z; \tag{6}$$

$$t = 0: \qquad \xi(x,t) = \zeta_0\exp(ikx). \tag{7}$$

Здесь $p(\xi)$, $p_E(\xi)$ и $p_\gamma(\xi)$ — линейные по ξ поправки к гидродинамическому давлению, давлению электрического поля и давлению капиллярных сил, вызванные волновым движением поверхности $\xi(x,t)$; $\phi(\mathbf{r},t)$ — линейная по ξ поправка к потенциалу электростатического поля, вызванная волновым движением свободной поверхности $\xi(x,t)$.

2. Скаляризация задачи

Двумерность задачи — возмущение формы поверхности $\xi(x,t)$, поля скоростей $\mathbf{U}(\mathbf{r},t)$, давления $P(\mathbf{r},t)$ и электростатического поля $\phi(\mathbf{r},t)$ считаем не зависящими от координаты y — позволяет провести ее скаляризацию на основе теоремы Гельмгольца введением потенциала поля скоростей $\varphi(\mathbf{r},t)$ и функции тока $\psi(\mathbf{r},t)$

$$\mathbf{U}(\mathbf{r},t) = \hat{\mathbf{N}}_1\varphi(\mathbf{r},t) + \hat{\mathbf{N}}_2\psi(\mathbf{r},t), \ \hat{\mathbf{N}}_1 \equiv \nabla, \ \hat{\mathbf{N}}_2 \equiv \nabla\cdot\mathbf{n}_y, \tag{8}$$

где $\mathbf{n}_y$ — орт оси декартовой координаты y; $\hat{\mathbf{N}}_1$ и $\hat{\mathbf{N}}_2$ — векторные дифференциальные операторы, удовлетворяющие соотношениям ортогональности и условиям коммутативности с оператором Лапласа [16]. Эрмитовый оператор $\hat{\mathbf{N}}_1$ выделяет потенциальную часть движения, а антиэрмитовый $\hat{\mathbf{N}}_2$ — вихревую.

Подставив разложение (8) в уравнения (1), (2) и полагая, что собственные значения операторов $\hat{\mathbf{N}}_1\cdot\hat{\mathbf{N}}_2$ и $\hat{\mathbf{N}}_2\cdot\hat{\mathbf{N}}_1$ отличны от нуля, получим систему скалярных уравнений

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} - \nu\Delta\psi = 0; \quad \Delta\varphi = 0; \quad P(\mathbf{r},t) = -\frac{\partial\varphi}{\partial t} - z + P_0,$$

где P_0 постоянное давление в среде.

Подставим теперь (8) в гидродинамические граничные условия на свободной поверхности жидкости (3), (4) и преобразуем граничные условия для векторного поля скоростей $U(\mathbf{r},t)$ в граничные условия для скалярных функций $\varphi(\mathbf{r},t)$ и $\psi(\mathbf{r},t)$

$$z = 0: \quad \frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial x}; \quad 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0;$$

$$\phi = -\frac{\partial\Phi_0}{\partial z}\xi; \tag{9}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \xi + 2\nu\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z}\right) - p_E(\xi) + p_\gamma(\xi) = 0. \tag{10}$$

Выражения для добавок — $p_\gamma(\xi)$ — к давлению сил поверхностного натяжения и $p_E(\xi)$ — к давлению электрических сил — в линейном по ξ приближении записываются в виде [17]

$$p_\gamma(\xi) = -\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}; \quad p_E(\xi) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right).$$

Условие на дне (5) при скаляризации преобразуется в следующие выражения

$$z = -d: \quad \frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0. \tag{11}$$

Таким образом, нами получена система гидродинамических уравнений и граничных условий к ним в скаляризованном виде.

3. Вывод дисперсионного уравнения

Периодические по x ограниченные при $z = -d$ (условие (11)) и $z \to \infty$ (условие (6)) решения всей задачи естественно искать в виде [5]

$$\xi(x,t) = a\exp(st - ikx); \tag{12}$$

$$\phi(x,z,t) = (B_1\mathrm{sh}(kz) + B_2\mathrm{ch}(kz))\exp(st - ikx); \tag{13}$$

$$\psi(x,z,t) = (B_3\mathrm{sh}(qz) + B_4\mathrm{ch}(qz))\exp(st - ikx); \tag{14}$$

$$\phi(x,z,t) = aE_0\exp(-kz)\exp(st - ikx),$$

$$q = \sqrt{k^2 + (s/\nu)}, \tag{15}$$

где B_1, B_2, B_3, B_4, s в общем случае — комплексные величины.

Подставим (13), (14) в условия на дне (11) и выразим неизвестные коэффициенты B_3, B_4 через коэффициенты B_1, B_2

$$B_3 = \frac{i}{q}\big(-\mathrm{ch}(kd)\,(kB_2\mathrm{ch}(qd) + qB_1\mathrm{sh}(qd))$$

$$+\,\mathrm{sh}(kd)\,(kB_1\mathrm{ch}(qd) + qB_2\mathrm{sh}(qd))\big),$$

$$B_4 = \frac{i}{q}\big(\mathrm{sh}(kd)\,(qB_2\mathrm{ch}(qd) + kB_1\mathrm{sh}(qd))$$

$$-\,\mathrm{ch}(kd)\,(qB_1\mathrm{ch}(qd) + kB_2\mathrm{sh}(qd))\big).$$

После подстановки решений (12)−(15) в скаляризованные граничные условия на невозмущенной поверхности жидкости (9), (10) приходим к однородной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов B_1, B_2, a

$$\big(-kq + kq\mathrm{ch}(kd)\mathrm{ch}(qd) - k^2\mathrm{sh}(kd)\mathrm{sh}(qd)\big)\,B_1$$

$$+\,\big(-kq\mathrm{ch}(qd)\mathrm{sh}(kd) + k^2\mathrm{ch}(kd)\mathrm{sh}(qd)\big)\,B_2 + qsa = 0;$$

$$-\,q(k^2+q^2)\mathrm{ch}(kd)\mathrm{ch}(qd)$$

$$+\,k\,\big(2kq + (k^2+q^2)\mathrm{sh}(kd)\mathrm{sh}(qd)\big)\,B_1$$

$$+\,(k^2+q^2)\big(q\mathrm{ch}(qd)\mathrm{sh}(kd)$$

$$-\,k\mathrm{ch}(kd)\mathrm{sh}(qd)\big)B_2 = 0;$$

$$\big(2\nu k^2\mathrm{ch}(qd)\mathrm{sh}(kd) - 2\nu kq\mathrm{ch}(kd)\mathrm{sh}(qd)\big)\,B_1$$

$$+\,\big((s + 2\nu k^2) - 2\nu k^2\mathrm{ch}(kd)\mathrm{ch}(qd)$$

$$+\,2\nu kq\mathrm{sh}(kd)\mathrm{sh}(qd)\big)B_2 + \omega_0^2(k)k^{-1}a = 0,$$

$$\omega_0^2(k) \equiv k(k^2 - Wk + 1), \quad W \equiv E_0^2/4\pi.$$

Параметр ω_0^2 имеет смысл квадрата частоты капиллярно-гравитационных волн в идеальной несжимаемой однородно поверхностно заряженной электропроводной бесконечно глубокой жидкости [17–19].

Безразмерный параметр W, называемый параметром Тонкса−Френкеля, характеризует устойчивость плоской равновесной в поле сил тяжести и поле капиллярных сил однородно заряженной свободной поверхности электропроводной жидкости по отношению к отрицательному давлению электрического поля [20]. Критические условия реализации неустойчивости имеют вид $W = k + k^{-1}$, $k = 1$ и не зависят от вязкости жидкости [5,20,21]. Когда заряд на свободной поверхности жидкости настолько велик, что $W = 2$, волна с $k = 1$ претерпевает неустойчивость, и на поверхности жидкости появляются эмиссионные выступы, называемые конусами Тейлора, с вершин которых начинается сброс избыточного заряда путем эмиссии высокодисперсных сильно заряженных струй жидкости и капелек [22,23]. Таким образом, поверхностная плотность заряда, при которой $W = 2$, является максимально возможной.

Данная система имеет нетривиальное решение тогда, и только тогда, когда ее определитель равен нулю, что и дает дисперсионное уравнение относительно $q \equiv \sqrt{k^2 + (s+\nu)}$

$$4qk^2(k^2+q^2) + \big(k^2+q^2\big)^2\big(k\mathrm{sh}(kd)\mathrm{sh}(qd)$$

$$-\,q\mathrm{ch}(kd)\mathrm{ch}(qd)\big) + 4qk^3\big(q\mathrm{sh}(kd)\mathrm{sh}(qd)$$

$$-\,k\mathrm{ch}(kd)\mathrm{ch}(qd)\big) - \omega_0^2(k)\nu^2\big(q\mathrm{sh}(kd)\mathrm{ch}(qd)$$

$$-\,k\mathrm{ch}(kd)\mathrm{sh}(qd)\big) = 0. \tag{16}$$

При $\nu \ll 1$, когда $q \gg k$, дисперсионное уравнение (16) в линейном приближении по безразмерной вязкости ν может быть переписано в существенно более простом виде относительно комплексной частоты s:

$$s^2 + 4\nu k^2 s + \omega_0^2(k)\mathrm{th}(kd) = 0, \tag{17}$$

а его решения в том же приближении легко выписываются

$$s^{(1,2)} = \eta \pm i\omega$$

$$\equiv -2\nu k^2 \pm \sqrt{(2\nu k^2)^2 - \omega_0^2(k)\mathrm{th}(kd)}. \tag{18}$$

Здесь ω — частота капиллярно-гравитационной волны в заряженном слое вязкой электропроводной жидкости конечной толщины.

4. Запись решений задачи

Найдя решения дисперсионного уравнения, можно записать решение всей задачи, удовлетворяющее начальному условию (7):

$$\xi(x,t) = \xi_0\exp(st - ikx) + \text{к.с.}; \tag{19}$$

$$\phi(x,z,t) = \xi_0\,(B_1\mathrm{sh}(kz) + B_2\mathrm{ch}(kz))\exp(st - ikx) + \text{к.с.};$$

$$B_1 = (s + 2\nu k^2)/k;$$

$$B_2 = \frac{\left((s+2\nu k^2)\left(k\mathrm{sh}(kd)\mathrm{sh}(qd)-q\mathrm{ch}(kd)\mathrm{ch}(qd)\right)+2\nu k^2 q\right)}{k\left(k\mathrm{ch}(kd)\mathrm{sh}(qd)-q\mathrm{sh}(kd)\mathrm{ch}(qd)\right)};$$

$$\psi(x,z,t)=\xi_0\left(B_3\mathrm{sh}(qz)+B_4\mathrm{ch}(qz)\right)\exp(st-ikx)+\text{к.с.};$$

$$B_3 = i\frac{\left((s+2\nu k^2)-2\nu k\left(k\mathrm{ch}(kd)\mathrm{ch}(qd)-q\mathrm{sh}(kd)\mathrm{sh}(qd)\right)\right)}{\left(k\mathrm{ch}(kd)\mathrm{sh}(qd)-q\mathrm{sh}(kd)\mathrm{ch}(qd)\right)};$$

$$B_4=-2i\nu k;$$

$$\phi(x,z,t)=\xi_0 E_0\exp(-kz)\cos(st-ikx)+\text{к.с.}$$

Аббревиатура к.с. означает „комплексно сопряженные“ слагаемые.

Выпишем теперь компоненты вектора $\mathbf{U}(x,z,t)$ — поля скоростей течения жидкости, связанного с волной (19)

$$\begin{aligned}U_x(x,z,t)&=\frac{\partial\phi}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial z}\\&=-\xi_0 i\Big(kB_1\left(\mathrm{sh}(kz)+\mathrm{sh}(kd)\mathrm{ch}[q(z+d)]\right)\\&+kB_2\left(\mathrm{ch}(kz)-\mathrm{ch}(kd)\mathrm{ch}[q(z+d)]\right)\\&+q\left(B_2\mathrm{sh}(kd)-B_1\mathrm{ch}(kd)\right)\mathrm{sh}[q(z+d)]\Big)\\&\times\exp(st-ikx)+\text{к.с.},\end{aligned}\tag{20}$$

$$\begin{aligned}U_z(x,z,t)&=\frac{\partial\phi}{\partial z}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\\&=\xi_0 kq^{-1}\Big(qB_1\left(\mathrm{ch}(kz)-\mathrm{ch}(kd)\mathrm{ch}[q(z+d)]\right)\\&+qB_2\left(\mathrm{sh}(kz)+\mathrm{sh}(kd)\mathrm{ch}[q(z+d)]\right)\\&-k\left(B_2\mathrm{ch}(kd)-B_1\mathrm{sh}(kd)\right)\mathrm{sh}[q(z+d)]\Big)\\&\times\exp(st-ikx)+\text{к.с.}\end{aligned}\tag{21}$$

Видно, что при $z=-d$ обе компоненты поля скоростей обращаются в нуль, как и должно быть для вязкой жидкости. При предельном переходе $d\to\infty$ выражения для потенциала поля скоростей, функции тока и компонент поля скоростей превращаются в соответствующие решения, для бесконечно глубокой вязкой жидкости с однородно заряженной свободной поверхностью [18].

Интересно отметить, что математические процедуры аналитического расчета волнового движения в бесконечно глубокой вязкой жидкости [18,19] и в слое вязкой жидкости конечной глубины заметно различаются. Так, для бесконечно глубокой жидкости можно сначала найти чисто потенциальную часть решения и лишь потом вводить функцию тока и исследовать влияние вязкой диссипации на закономерности волнового движения, как это проделано в [19]. Для случая слоя вязкой жидкости конечной глубины такое разделение невозможно из-за условия обращения в нуль полной скорости на твердом дне (5) (в скаляризованном виде (8)), которому необходимо удовлетворять аддитивный комбинацией пространственных производных от потенциала поля скоростей и функции тока (8). В случае бесконечно глубокой жидкости пространственные производные от потенциала поля скоростей и от функции тока при $z\to-\infty$ обращаются в нуль независимо друг от друга [19].

Имея в виду исследование вихревой компоненты поля скоростей, связанного с волновым движением в слое вязкой жидкости конечной толщины, выпишем выражение для ротора поля скоростей

$$\begin{aligned}\nabla\times\mathbf{U}&=\big\{-\xi_0 is\nu^{-1}q^{-1}\\&\times\Big(q\left(B_1\mathrm{ch}(kd)-B_2\mathrm{sh}(kd)\right)\mathrm{ch}[q(z+d)]\\&+k\left(B_2\mathrm{ch}(kd)-B_1\mathrm{sh}(kd)\right)\mathrm{sh}[q(z+d)]\Big)\\&\times\exp(st-ikx)+\text{к.с.}\big\}\mathbf{n}_y.\end{aligned}\tag{22}$$

Несложно видеть, что вихри, связанные с волновым движением в анализируемой ситуации являются плоскими, реализуются в плоскости X0Z.

5. Анализ полученных результатов

На рис. 1 и 2 приведены зависимости амплитудных значений поля скоростей $U_x(z,t)$ и $U_z(z,t)$ от безразмерной глубины, рассчитанные в различные моменты времени для двух безразмерных значений толщины слоя

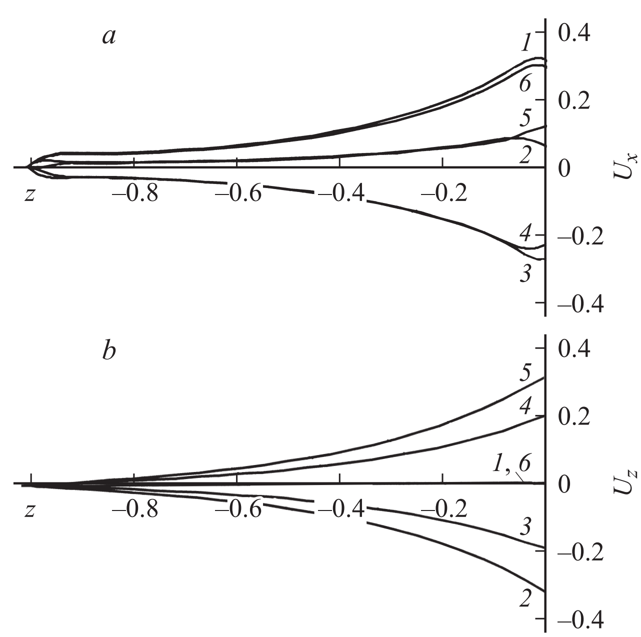

Рис. 1. Зависимости от глубины амплитудных значений проекций поля скоростей течения жидкости, рассчитанные при $d=1$, $\nu=0.02$, $W=1.99$, $k=3$ в различные моменты времени, измеренного в долях периода волны: *1* — $t=0$; *2* — $T/5$; *3* — $2T/5$; *4* — $3T/5$; *5* — $4T/5$; *6* — T. *a* — $U_x=U_x(z,t)$; *b* — $U_z=U_z(z,t)$.

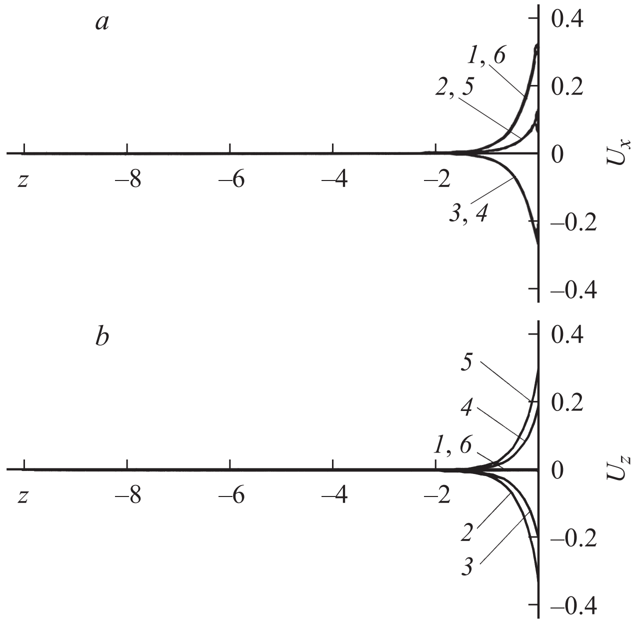

Рис. 2. Те же зависимости, что на рис. 1, рассчитанные при $d = 10$.

электропроводной маловязкой заряженной жидкости на твердом дне.

Из приведенных рисунков видно, что, когда толщина слоя жидкости сравнима с длиной волны, течение жидкости, связанное с волной, охватывает весь объем жидкости. Если толщина слоя много больше длины волны, то все течение, связанное с волной, сосредоточивается в приповерхностном слое жидкости глубиной порядка длины волны.

Отметим, что в принятом обезразмеривании характерным масштабом длины является капиллярная постоянная жидкости: $\alpha \equiv \sqrt{\gamma/\rho g}$ (например, для воды — $\alpha \approx 0.26$ cm). Это означает, что приведенные рисунки иллюстрируют характеристики поля скоростей течения жидкости, связанного с капиллярно-гравитационной волной с волновым числом $k = 3$, имеющей безразмерную длину $\lambda \equiv 2\pi/k \approx 2.1$ (с размерным эквивалентом для воды $\lambda \approx 0.55$ cm), бегущую в слое жидкости толщиной $d = 1$ и 10 (для воды $d = 0.26$ и 2.6 cm). Расчеты, проведенные при вязкости, в десять раз большей, при прочих равных условиях показывают, что все обсуждаемые зависимости сохраняют свой качественный вид, только более отчетливо проявляется вязкое затухание амплитуд и снижается амплитудное значение обеих компонент поля скоростей уже в начальный момент времени.

Графики, приведенные на рис. 1 и 2, рассчитаны при наличии поверхностного заряда, весьма близкого к предельному в смысле реализации неустойчивости Тонкса–Френкеля при $W = 1.99$. Расчеты показывают, что при уменьшении поверхностного заряда отмеченные общие характеристики поля скоростей сохраняются, но амплитудные значения обеих проекций поля скоростей увеличиваются (при $W = 0$) — примерно в полтора раза. Увеличение длины волны при прочих равных условиях приводит к снижению амплитудных значений компонент поля скоростей при сохранении остальных особенностей течения.

На рис. 3, *a, b* приведены зависимости амплитудных значений абсолютной величины ротора поля скоростей течения жидкости, от безразмерной глубины, рассчитанные в различные моменты времени для двух ($d = 1$ и 10) безразмерных значений толщины слоя вязкой электропроводной заряженной жидкости на твердом дне. Для ситуации, рассмотренной на рис. 3, *b* (так же, как и на рис. 4, *b*), иллюстрируемая зависимость приведена лишь для приповерхностной части слоя, где амплитуда ротора максимальна. Наиболее физически значимым фактом в приведенных зависимостях является наличие вихревого движения на дне, порождаемого волной, бегущей по свободной поверхности жидкости в ситуации, когда толщина слоя сравнима с длиной волны.

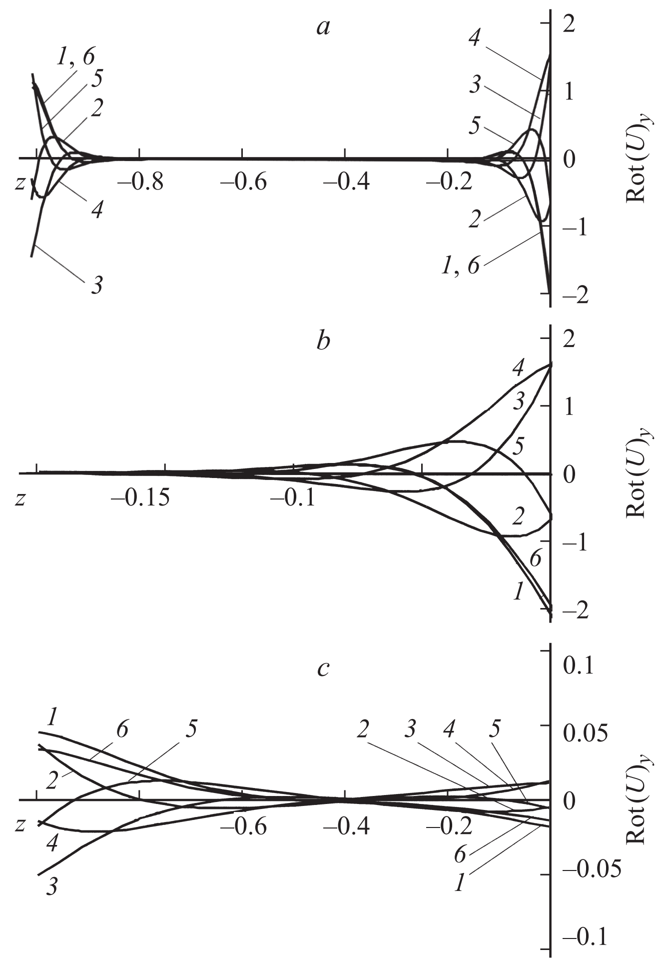

Рис. 3. Зависимости от глубины амплитудных значений абсолютной величины ротора поля скоростей течении жидкости, рассчитанные при $\nu = 0.002$, $k = 3$, $W = 1.99$ в различные моменты времени, измеренного в полях периода волны: *1* — 0; *2* — $T/5$; *3* — $2T/5$, *4* — $3T/5$; *5* — $4T/5$; *6* — T. *a* — $d = 1$; *b* — 10; *c* — $d = 1$; $k = 1$.

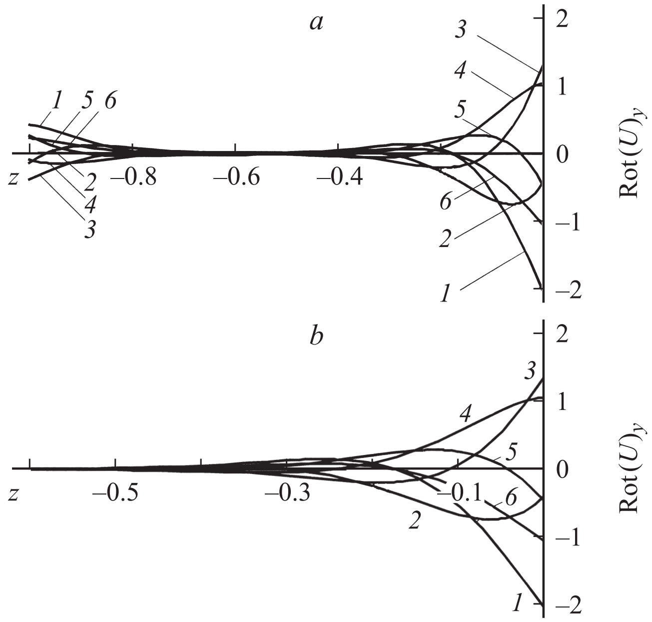

Рис. 4. Те же зависимости, что на рис. 3, *a, b*, рассчитанные при $\nu = 0.02$.

При малой вязкости ($\nu = 0.002$) вихревое течение сосредоточено вблизи свободной поверхности жидкости, по которой бежит капиллярно-гравитационная волна, и вблизи дна. Толщина слоев, занятых вихревым движением, у свободной поверхности и вблизи дна примерно одинакова и составляет около двух десятых капиллярной постоянной жидкости. Увеличение вязкости в десять раз (см. рис. 4) приводит к незначительному снижению амплитуды вихревого движения и к значительному увеличению (примерно в два раза) толщины слоев жидкости у свободной поверхности и у дна, охваченных вихревым движением.

Когда при $\nu = 0.002$ безразмерная толщина слоя увеличивается с $d = 1$ до 10, волна с $\lambda \approx 2$ вихревого движения на дне слоя уже не генерирует, и оно концентрируется в приповерхностном слое жидкости, толщина которого примерно равна двум десятым капиллярной постоянной. Как видно из рис. 3, *b*, на указанной глубине интенсивность вихревого движения убывает до нуля.

При уменьшении поверхностной плотности электрического заряда и при прочих равных условиях увеличиваются амплитудные значения ротора вихревого течения жидкости у свободной поверхности и у дна слоя, причем при $W = 0$ амплитуда вихревого движения у дна становится равной амплитуде ротора вихревого движения у поверхности.

Увеличение длины волны приводит в случае сильно заряженной поверхности жидкости ($W = 1.99$) к тому, что при $\lambda = 2\pi$ вихревое движение заполняет весь объем жидкости, а амплитуда ротора вихревого движения у дна слоя становится в два раза больше амплитуды ротора вихревого движения у свободной поверхности (см. рис. 3, *c*). При $W = 0$ и прочих равных условиях для $\lambda = 2\pi$ амплитуда ротора вихревого движения у дна слоя становится примерно на порядок величины больше амплитуды ротора вихревого движения у свободной поверхности.

Из рис. 4, *a* видно, что при указанной вязкости вихревое движение заполняет практически весь объем жидкости. Сравнение рис. 3, *b* и рис. 4, *b* показывает, что толщина слоя у свободной поверхности жидкости, в котором реализуется вихревое движение жидкости, связанное с волной, бегущей по поверхности, при указанном увеличении вязкости выросло примерно в три раза. Остальные характеристики течения, зависящие от вязкости, ведут себя предсказуемо: вязкое затухание увеличивается, амплитудные значения вихрей снижаются, но незначительно.

Заключение

При распространении капиллярно-гравитационной волны по свободной поверхности слоя вязкой жидкости на твердом дне с толщиной слоя, меньшей длины волны, поле скоростей течения жидкости, связанного с волной, имеет сложную структуру: вихревое движение концентрируется в малой окрестности свободной поверхности и в малой окрестности твердого дна, потенциальное же течение заполняет весь объем жидкости. В ситуации, когда длина волны много больше толщины слоя жидкости, вихревое движение порождаемое поверхностной волной заполняет весь ее объем, причем интенсивность вихревого движения у твердого дна может значительно превышать таковую у свободной поверхности жидкости. Наличие электрического заряда на свободной поверхности электропроводной жидкости приводит к снижению интенсивности вихревого движения жидкости.

Работа выполнена в рамках тематического плана НИР вуза 2008 г. и при поддержке гранта РФФИ № 06-01-00066-а.

Список литературы

[1] *Бояджиев Х., Бешков В.* Массоперенос в движущихся пленках жидкости. М.: Мир, 1988. 137 с.
[2] *Курочкина С.А., Белоножко Д.Ф., Григорьев А.Н.* // Электронная обработка материалов. 2003. № 3. С. 26–36.
[3] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И., Климов А.В.* и др. // Электронная обработка материалов. 2004. № 4. С. 66–78.
[4] *Григорьев А.И., Климов А.В., Черникова С.В., Присяжнюк А.В.* Параметрические и нелинейные волны на заряженной поверхности жидкости. Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 2007. 170 с.
[5] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Коромыслов В.А., Белоножко Д.Ф.* // ЖТФ. 1997. Т. 67. Вып. 8. С 27–33.
[6] *Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 1997. Т. 67. Вып. 9. С. 8–13.
[7] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И., Муничев М.И., Ширяева С.О.* // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22. Вып. 10. С. 84–89.

[8] *Gonzalez A., Castellanos A.* // Phys. Rev. E. 1994. Vol. 49. N 4. P. 2935–2940.
[9] *Gonzalez A., Castellanos A.* // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 53. N 4. P. 3573–3578.
[10] *Жакин А.* // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 3. С. 94–102.
[11] *Крылов В.С., Воротилин В.П., Левич В.Г.* // ТОХТ. 1969. Т. 3. № 4. С. 499–507.
[12] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28. Вып. 19. С. 1–9.
[13] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 4. С. 28–37.
[14] *Климов А.В., Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 10. С. 9–18.
[15] *Климов А.В., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2008. Т. 78. Вып. 4. С. 10–18.
[16] *Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2007. Т. 77. Вып. 2. С. 31–40.
[17] *Френкель Я.И.* // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. № 4. С. 348–350.
[18] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2008. Т. 78. Вып. 3. С. 21–28.
[19] *Левич В.Г.* Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.
[20] *Френкель Я.И.* // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. № 4. С. 348–350.
[21] *Григорьев А.И., Григорьев О.А., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 1992. Т. 62. Вып. 9. С. 12–21.
[22] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Белоножко Д.Ф., Климов А.В.* // ЭОМ. 2004. № 4. С. 34–40.
[23] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Белоножко Д.Ф., Климов А.В.* // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 2. С. 19–25.