01;03

Точная явная барометрическая формула для теплого изотермического ферми-газа

© А.А. Дубинова

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
Нижний Новгород, Россия
e-mail: anndub@gmail.com

(Поступило в Редакцию 19 ноября 2007 г.)

Получена точная явная барометрическая формула для теплого изотермического ферми-газа в однородном потенциальном поле.

PACS: 03.75.Ss

Введение

Барометрическая формула, или формула экспоненциальной атмосферы, известная еще со времен Лапласа,

$$n(x) = n_0 \exp\left(-\frac{mgx}{kT_0}\right) \tag{1}$$

связывает концентрацию n изотермического ($T = T_0 = \mathrm{const}$) идеального газа на некоторой высоте x и при данной температуре T_0 с его концентрацией n_0 на нулевой высоте $x = 0$, где m — масса частиц газа, g — ускорение свободного падения (ускорение гравитационного поля), k — постоянная Больцмана. Таким образом, силовое поле может иметь любую природу, лишь бы только оно было потенциальным.

На практике достаточно знать зависимость концентрации от потенциальной энергии в силовом поле. В этом случае барометрическая формула (1) принимает вид известного распределения Больцмана для газа с уравнением состояния $p = nkT_0$ и фиксированной температурой. Вывод формулы (1) приведен во множестве учебников по физике (см., например, [1,2]). В статье [3] содержатся интересные исторические факты, связанные с барометрической формулой (1), и представлены четыре различных способа ее вывода: гидростатический, кинетический, стохастический и статистический. Там же приведены некоторые ее обобщения: для идеального изотермического газа в неоднородном гравитационном поле и для идеального газа в однородном гравитационном поле, но с заданным градиентом температуры. В [4] получена барометрическая формула для идеального изотермического газа в центрально-симметричном силовом поле.

Известны и другие обобщения барометрической формулы (1). Например, в работах [5,6] для описания плазменных процессов оперируют адиабатической барометрической формулой. Барометрическая формула для молярной концентрации газа Ван-дер-Ваальса получена в дифференциальной форме и проанализирована в [7]. Барометрическая формула для холодного ферми-газа приведена в [8–10] (в [10] — упражнение 10 к гл. 2; здесь же приведена приближенная барометрическая формула для теплого ферми-газа в виде первого члена разложения). Упомянутые обобщения (1) сведены в таблице.

Однако точная барометрическая формула для теплого ферми-газа до настоящего времени была неизвестна. Целью настоящей работы является получение точной явной барометрической формулы для теплого изотермического ферми-газа. Для решения поставленной задачи воспользуемся способом, отличным от рассмотренных в [3], который можно назвать газостатическим.

Вывод барометрической формулы

Рассмотрим уравнение газодинамики элементарного объема газа

$$m\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\,\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{1}{n}\,\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}, \tag{2}$$

где v — скорость движения элементарного объема, t — время. Когда в газе установится барометрическое равновесие, движение газа (конвективное, но не тепловое!) прекращается, и левая часть уравнения (2) исчезает:

$$\frac{1}{n}\,\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{3}$$

Легко проверить, что если явные уравнения состояния из 3-го столбца таблицы подставить в уравнение (3) и затем решить его с начальным условием $u = 0$ при $n = n_0$, то можно получить соответствующие барометрические формулы, приведенные в 4-м столбце таблицы.

Уравнение состояния теплового ферми-газа хорошо известно. Оно имеет вид неявной, параметрически заданной функции и содержит интегралы Ферми–Дирака, которые ранее считались „не берущимися“:

$$n(\mu, T) = \frac{(2m)^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\varepsilon}\,d\varepsilon}{\exp\frac{\varepsilon-\mu}{kT} + 1}, \tag{4}$$

$$p(\mu, T) = \frac{(2m)^{3/2}}{3\pi^2\hbar^3} \int_0^\infty \frac{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}\,d\varepsilon}{\exp\frac{\varepsilon-\mu}{kT} + 1}. \tag{5}$$

Известные барометрические формулы для различных газов

Газ	Условие	Уравнение состояния	Барометрическая формула с $u = mgx$	Источник
Идеальный классический газ	Изотермический	$p = nkT_0$	$n(u) = n_0 \exp\left(-\frac{u}{kT_0}\right)$	[1–3]
Идеальный классический газ	Адиабатический	$p = n_0 kT_0 \left(\frac{n}{n_0}\right)^{\gamma}$	$n(u) = n_0\left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{u}{kT_0}\right)^{1/(\gamma-1)}$	[5,6]
Ферми-газ	Холодный	$p = \frac{2}{5}\mu_0 n_0 \left(\frac{n}{n_0}\right)^{5/3}$	$n(u) = n_0\left(1 - \frac{u}{\mu_0}\right)^{3/2}$	[8–10]
Ферми-газ	Теплый, изотермический	$\begin{cases} n = \frac{(2m)^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3}\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{\varepsilon}d\varepsilon}{\exp\frac{\varepsilon-\mu}{kT_0}+1} \\ p = \frac{(2m)^{3/2}}{3\pi^2\hbar^3}\int\limits_0^\infty \frac{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}d\varepsilon}{\exp\frac{\varepsilon-\mu}{kT_0}+1} \end{cases}$	$n(u) \cong n_0\left(\frac{u}{\mu_0}\right)\left[1 + \frac{\pi^2}{6}\left(\frac{kT_0}{\mu_0}\right)^2\right] \times \left\{1 - \frac{u}{\mu_0}\left[1 + \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT_0}{\mu_0}\right)^2\right]\right\}^{3/2}$	[10]

Тем не менее сейчас, следуя [11], можно представить (4) и (5) в безынтегральном виде

$$n(\mu, T) = -\frac{(mkT)^{3/2}}{2^{1/2}\pi^{3/2}\hbar^3}\,\mathrm{Li}_{3/2}\left(-\exp\frac{\mu}{kT}\right), \tag{6}$$

$$p(\mu, T) = -\frac{(mkT)^{5/2}}{2^{1/2}\pi^{3/2}m\hbar^3}\,\mathrm{Li}_{5/2}\left(-\exp\frac{\mu}{kT}\right), \tag{7}$$

где $\mathrm{Li}_\nu(x)$ — полилогарифм [12,13].[1]

В пределе $T \to 0$ уравнение состояния (6), (7) сводится к уравнению состояния холодного ферми-газа

$$p = \frac{(3\pi^2)^{2/3}\hbar^2}{5m}n^{5/3} = \frac{2}{5}\mu_0 n_0\left(\frac{n}{n_0}\right)^{5/3}. \tag{8}$$

Воспользуемся правилом дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial p(\mu, T)}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x}. \tag{9}$$

Частные производные $\partial p/\partial\mu$ и $\partial p/\partial T$ можно найти из (7) и подставить в (9), что дает

$$\frac{1}{n}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial x} - \frac{\mu}{kT}\frac{\partial (kT)}{\partial x}. \tag{10}$$

Температура постоянна в изотермических процессах ($T = T_0 = \mathrm{const}$), следовательно, 2-е слагаемое в правой части (10) равно нулю. Подставив (10) в (3), получим простое дифференциальное уравнение, в котором потенциальная энергия в силовом поле u и химический потенциал μ есть функции только одной переменной — координаты x:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{11}$$

Очевидно, что решение (11) с условием $\mu = \mu_0$ при $u = 0$ может быть представлено как

$$\mu = \mu_0 - u. \tag{12}$$

Последующие преобразования достаточно просты: обе части равенства (12) делятся на kT_0, затем берутся их экспоненты, которые умножаются на -1, далее берутся полилогарифмы индекса 3/2 и окончательно умножаются на коэффициент

$$-\frac{(mkT_0)^{3/2}}{2^{1/2}\pi^{3/2}m\hbar^3}.$$

Этим путем было преобразовано равенство (12) так, чтобы его левая часть приняла вид (6)

$$-\frac{(mkT_0)^{3/2}}{2^{1/2}\pi^{3/2}m\hbar^3}\,\mathrm{Li}_{3/2}\left(-\exp\frac{\mu}{kT_0}\right) = -\frac{(mkT_0)^{3/2}}{2^{1/2}\pi^{3/2}m\hbar^3}\mathrm{Li}_{3/2}\left(-\exp\frac{\mu_0 - u}{kT_0}\right). \tag{13}$$

Разделим (13) почленно на концентрацию нулевого уровня

$$n_0 = -\frac{(mkT_0)^{3/2}}{2^{1/2}\pi^{3/2}m\hbar^3}\,\mathrm{Li}_{3/2}\left(-\exp\frac{\mu_0}{kT_0}\right).$$

Тогда можно получить искомую барометрическую формулу в виде функции потенциальной энергии силового поля

$$n = n_0\frac{\mathrm{Li}_{3/2}\left(-\exp\frac{\mu_0 - u}{kT_0}\right)}{\mathrm{Li}_{3/2}\left(-\exp\frac{\mu_0}{kT_0}\right)}. \tag{14}$$

В случае однородного силового гравитационного поля $u = mgx$ формула (14) переходит в барометрическую, в которой концентрация n зависит от высоты x

$$n = n_0\frac{\mathrm{Li}_{3/2}\left(-\exp\frac{\mu_0 - mgx}{kT_0}\right)}{\mathrm{Li}_{3/2}\left(-\exp\frac{\mu_0}{kT_0}\right)}. \tag{15}$$

На рис. 1 и 2 показаны графики зависимости (14) концентрации от потенциальной энергии силового поля в сравнении с известными больцмановским распределением и распределением холодного ферми-газа соответственно. Легко видеть, что формула (14) не переходит в больцмановскую при $\mu_0/kT_0 \to 0$ (недоступная область закрашена на рис. 1). Это объясняется тем, что при таком предельном переходе функция распределения

[1] Полилогарифм обозначается как $\mathrm{L}^\nu(x)$ в [12], как polylog(nu,x) в пакете Maple и как PolyLog[nu,x] в пакете Mathematica. Полилогарифм определяется как $\mathrm{Li}_\nu(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k^\nu}$, его производная есть $\frac{d}{dx}\mathrm{Li}_\nu(x) = \frac{1}{x}\mathrm{Li}_{\nu-1}(x)$.

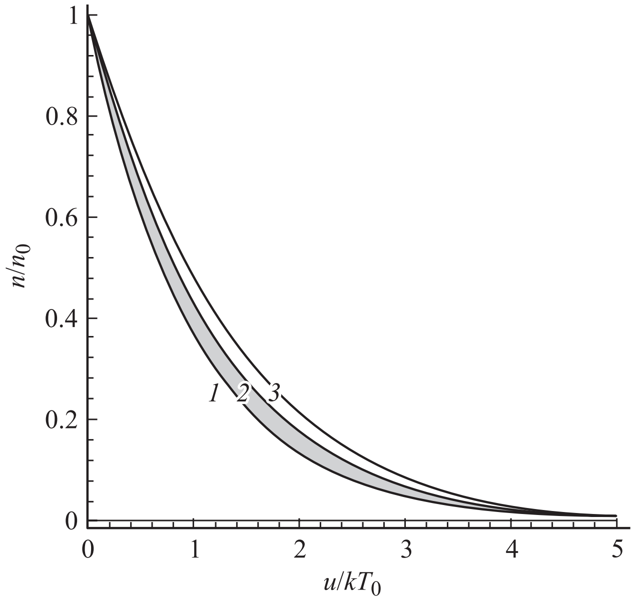

Рис. 1. Зависимость концентрации от потенциальной энергии: *1* — для классического идеального газа ($\mu_0/kT_0 = 0$), *2* — для теплого ферми-газа при $\mu_0/kT_0 \to 0$, *3* — для теплого ферми-газа при $\mu_0/kT_0 = 1$; недоступная область закрашена.

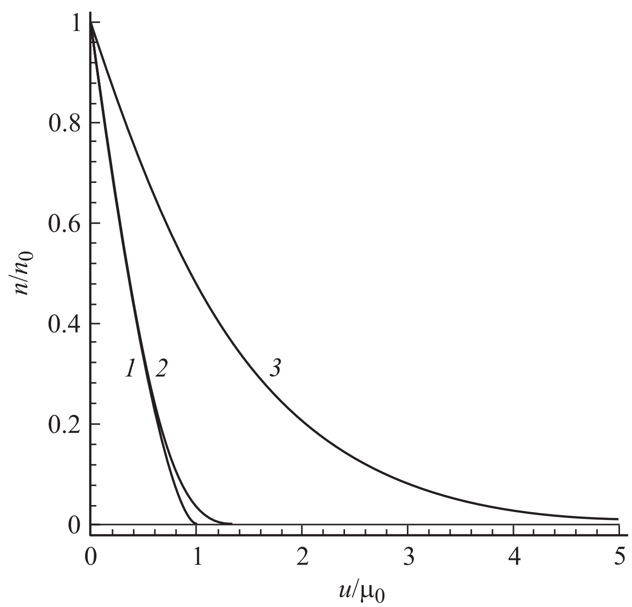

Рис. 2. Зависимость концентрации от потенциальной энергии: *1* — для холодного ферми-газа ($kT_0/\mu_0 = 0$), *2* — для теплого ферми-газа при $kT_0/\mu_0 = 0.1$, *3* — для теплого ферми-газа при $kT_0/\mu_0 = 1$.

Ферми–Дирака не переходит в функцию Максвелла без снятия принципа запрета Паули. А в противоположном пределе $kT_0/\mu_0 \to 0$ (14) — переходит в степенную форму барометрической формулы для холодного ферми-газа (см. рис. 2 и таблицу).

Заключение

В работе предложен простой газостатический способ вывода барометрических формул исходя из уравнений состояния. С помощью этого способа впервые была получена точная явная барометрическая формула теплого изотермического ферми-газа. Полученная формула содержит редко употребляемую функцию — полилогарифм.

Заметим, что формула (14) содержит два параметра, которые определяют разброс частиц газа по энергиям — T_0 и μ_0, в то время как другие точные формулы содержат только один параметр — T_0 или μ_0. Это факт позволяет проследить взаимную роль указанных параметров в полученной формуле.

Развитая модель теплового изотермического ферми-газа в однородном потенциальном поле может иметь практическое значение. Например, атмосфера белых карликов содержит вырожденные газы (электроны, протоны, нейтроны). Иногда такая атмосфера может считаться изотермической. В этом случае полученная барометрическая формула позволит оценить плотность частиц вырожденного газа в зависимости от высоты.

Другое применение формулы — оценка профилей ферми-газов (таких, как ультрахолодные вырожденные атомарные газы ^{6}Li или ^{40}K [14]) в лабораторных ловушках.

Автор благодарит проф. Кудасова Ю.Б. (Российский федеральный ядерный центр) за плодотворные обсуждения работы.

Список литературы

[1] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 5. Статистическая физика. М.: Наука–Физматлит, 1995.
[2] *Greiner W., Neise L., Stöcher H.* Thermodynamics and statistical mechanics. NY–Berlin: Springer, 1997.
[3] *Berberan-Santos M.N., Bodunov E.N., Pogliani L.* // Amer. J. Phys. 1997. Vol. 65. N 5. P. 404.
[4] *Carpenter D.G.* // Apeiron. 2000. Vol. 7. P. 143.
[5] *Sack Ch., Schamel H.* // Plasma Phys. Control. Fusion. 1985. Vol. 27. P. 717.
[6] *Дубинов А.Е.* // ПМТФ. 2007. Т. 48. № 5. С. 3.
[7] *Berberan-Santos M.N., Bodunov E.N., Pogliani L.* // Amer. J. Phys. 2002. Vol. 70. N 4. P. 438.
[8] *Жирифалько Л.* Статистическая физика твердого тела. М.: Мир, 1975.
[9] *Дубинов А.Е., Дубинова А.А.* // Физика плазмы. 2007. Т. 33. № 10. С. 935.
[10] *Квасников И.А.* Статистическая физика. Теория равновесных систем. М.: УРСС, 2002.
[11] *Mladek B.M., Kahl G., Neumann M.* // J. Chem. Phys. 2006. Vol. 124. N 6. P. 064 503.
[12] *Пыхтеев Г.Н., Мелешко И.Н.* Полилогарифмы, их свойства и методы вычисления. Минск: Изд-во БГУ, 1976.
[13] *Lewin L.* Polylogarithms and associated functions. NY–Oxford: North Holland, 1981.
[14] *Kinast J., Turlapov A., Thomas J.E.* et al. // Science. 2005. V. 307. N 5713. P. 1296.