

01;03

## Механизм конвективной неустойчивости бинарной смеси у вертикальной поверхности

© Л.Х. Ингель

Научно-производственное объединение „Тайфун“,  
249038 Обнинск, Калужская область, Россия  
e-mail: lingel@obninsk.com

(Поступило в Редакцию 8 октября 2007 г. В окончательной редакции 8 апреля 2008 г.)

Показано, что даже при сколь угодно сильной гидростатической устойчивости двухкомпонентной среды (например, соленой морской воды) состояние ее механического равновесия в поле силы тяжести может быть неустойчивым из-за различия краевых условий для двух субстанций (температуры и концентрации примеси) на вертикальных границах. В аналитическом виде найдены критерии неустойчивости длинноволновых возмущений у вертикальной поверхности и в вертикальном слое.

PACS: 44.25.+f, 47.27.Te, 47.55.Nd

### Введение

Гидротермодинамика двухкомпонентных жидкостей (бинарных смесей), как хорошо известно, обладает существенной спецификой, которую часто связывают с различием значений коэффициентов переноса для двух субстанций (тепла и концентрации примеси, например, соли в случае морской воды) [1,2]. В последние годы была отмечена возможность существования ряда не замеченных ранее эффектов, не всегда связанных с различием коэффициентов обмена (см., например, [3–6]).

В настоящей работе обращается внимание на механизм конвективной неустойчивости гидростатически устойчивой бинарной смеси, существующий даже при одинаковых значениях упомянутых коэффициентов. Он связан с различием краевых условий для двух субстанций.

Физическая идея заключается в следующем. Пусть, например, при устойчивой температурной стратификации и неустойчивой стратификации концентрации примеси (для краткости будем говорить о соли) некоторый объем среды вблизи вертикальной поверхности немного сместился вверх. Если стратификация плотности среды в целом устойчива, он, казалось бы, должен приобрести при этом отрицательную плавучесть (имея температуру ниже температуры окружающей среды) и испытывать действие возвращающей силы. Но его плавучесть зависит также от процессов обмена с окружающей средой. Если температура вертикальной поверхности фиксирована более жестко, чем солёность (краевые условия для двух субстанций различаются), то отклонение температуры в рассматриваемом смещенном объеме среды, при прочих равных условиях, быстрее релаксирует, чем возмущение солёности. Поскольку последнее возмущение в данном случае вносит положительный вклад в плавучесть рассматриваемого объема среды, а сохраняется лучше, чем отрицательное температурное возмущение, здесь видна принципиальная возможность положительной обратной связи. Такой механизм в некоторых отношениях анало-

гичен неустойчивости, обусловленной „двойной“ (дифференциальной) диффузией [1,2], но вместо различия коэффициентов обмена эффект связан с различием граничных условий.

### 1. Фоновое состояние и исходные уравнения

Согласно обычно используемому приближению, предполагаем, что плотность среды линейно зависит от возмущений температуры  $T$  и концентрации примеси (солёности)  $s$ :

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha T + \beta s),$$

где  $\rho_0$  — средняя (отсчетная) плотность среды;  $\alpha$  — термический коэффициент расширения среды,  $\beta$  — коэффициент ее солёностного сжатия.

Линеаризованная система уравнений динамики, переноса тепла и примеси в приближении Буссинеска имеет вид [1,2]:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + g(\alpha T - \beta s) \mathbf{e}_z, \quad \nabla \mathbf{v} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \gamma_T \mathbf{v} \mathbf{e}_z = \kappa \nabla^2 T, \quad \frac{\partial s}{\partial t} + \gamma_s \mathbf{v} \mathbf{e}_z = \chi \nabla^2 s. \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{v}$  — вектор возмущения поля скорости;  $t$  — время,  $p$  — возмущение давления,  $\mathbf{e}_z$  — единичный вектор в направлении вертикальной оси  $z$ ,  $\nu$  — кинематический коэффициент вязкости,  $\kappa$  — коэффициент температуропроводности,  $\chi$  — коэффициент диффузии примеси,  $g$  — ускорение свободно падения;  $\gamma_T$  и  $\gamma_s$  — постоянные значения фоновых вертикальных градиентов температуры и концентрации примеси. Для определенности эти значения предполагаются положительными, так что стратификация температуры стабилизирует, а примеси — дестабилизирует среду. При этом соотношение  $\gamma_T$  и  $\gamma_s$  предполагается таким, что фоновое состояние в отсутствие краевых эффектов устойчиво—неустойчивая стратификация примеси с избытком компенсируется устойчивой температурной стратификацией [1,2].

## 2. Нейтральные кривые для симметричных (вертикально-однородных) возмущений в вертикальном слое

Рассмотрим жидкую среду в бесконечном вертикальном слое  $-L/2 < x < L/2$  ( $x$  — горизонтальная координата), на границах которого предполагается выполнение условий непротекания и прилипания. Если ограничиться исследованием вертикально-однородных возмущений, зависящих только от одной горизонтальной координаты  $x$ , система уравнений сводится к виду

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(\alpha T - \beta s), \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \gamma_T w = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial s}{\partial t} + \gamma_s w = \chi \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}, \quad (3)$$

где  $w$  — вертикальная составляющая скорости (другие составляющие в данной задаче отсутствуют).

В качестве примера задачи с разными краевыми условиями для возмущений температуры и примеси рассмотрим ситуацию, когда для одной субстанции заданы краевые условия первого, для другой — второго рода:

$$T = 0, \quad \frac{\partial s}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

при  $x = \pm \frac{L}{2}$ .

Будем исследовать устойчивость состояния покоя по отношению к монотонным вертикально-однородным возмущениям. Для вертикальной скорости ищется решение вида

$$w(x, t) = W(x) \exp(\omega t), \quad (5)$$

для других неизвестных — аналогичным образом. Исключив из исходной системы уравнений все неизвестные, кроме  $w$ , при  $\omega = 0$  (имея в виду расчет порога неустойчивости) приходим к уравнению

$$\frac{d^4 W}{dx^4} = -\frac{1}{\nu \kappa} \left( N_T^2 + \frac{\kappa}{\chi} N_s^2 \right) W, \quad (6)$$

где  $N_T = (\alpha g \gamma_T)^{1/2}$ ,  $N_s = (-\beta h \gamma_s)^{1/2}$  — „термическая“ и „соленостная“ частоты плавучести (Брента–Вяйсяля). Вводя безразмерную горизонтальную координату  $X = \frac{x}{(L/2)}$ , перепишем систему уравнений в виде

$$\frac{d^4 W}{dX^4} = -RW, \quad (7)$$

$$\frac{d^2 T}{dX^2} = (L^2 \gamma_T / 4\kappa) W, \quad \frac{d^2 s}{dX^2} = (L^2 \gamma_s / 4\chi) W. \quad (8)$$

Здесь безразмерный параметр

$$R = \frac{L^4}{16\nu\kappa} \left( N_T^2 + \frac{\kappa}{\chi} N_s^2 \right) = \frac{\alpha g \gamma_T L^4}{16\nu\kappa} \left( 1 - \frac{\kappa}{\chi} \frac{\beta \gamma_s}{\alpha \gamma_T} \right), \quad (9)$$

с точностью до знака, является некоторым аналогом и обобщением числа Рэлея (рассматриваемым стратификациям, устойчивым по известным критериям, соответствует  $R > 0$ ); амплитуды  $T$  и  $s$ , там где это не может вызвать недоразумений, обозначены теми же буквами, что и сами возмущения.

Общее решение уравнений (7) имеет вид

$$W(X) = \sum_{j=1}^4 C_j \exp(q_j X), \quad (10)$$

где  $C_j$  — постоянные интегрирования,  $q_j$  — корни характеристического уравнения:

$$q_j = \pm B(1 \pm i), \quad B = \sqrt[4]{R/4}. \quad (11)$$

Интегрирование уравнений (8) дает

$$T = \theta_0 + \theta_1 X + \sum_{j=1}^4 \frac{C_j}{q_j^2} \exp(q_j X),$$

$$s = S_0 + S_1 X + \sum_{j=1}^4 \frac{C_j}{q_j^2} \exp(q_j X),$$

где  $\theta_{0,1}, S_{0,1}$  — постоянные интегрирования. С учетом краевых условий прилипания и (4) для постоянных интегрирования получим уравнения

$$\sum_{j=1}^4 C_j \exp(\pm q_j) = 0, \quad S_1 + \sum_{j=1}^4 \frac{C_j}{q_j} \exp(\pm q_j) = 0,$$

$$\theta_0 + \theta_1 + \sum_{j=1}^4 \frac{C_j}{q_j^2} \exp(q_j) = 0,$$

$$\theta_0 - \theta_1 + \sum_{j=1}^4 \frac{C_j}{q_j^2} \exp(-q_j) = 0.$$

Еще одно соотношение следует из того, что разность  $\alpha T - \beta s$  в правой части (2) не должна содержать каких-либо слагаемых, помимо экспонент (в противном случае они бы проявились в стационарном решении для  $w$ ). Следовательно, должно выполняться соотношение

$$\alpha \theta_1 - \beta S_1 = 0.$$

Таким образом, имеем однородную линейную систему из семи уравнений с семью неизвестными  $C_i, \theta_0, \theta_1, S_1$ . Условие существования нетривиального решения, соответствующего границе устойчивости, — обращение в нуль определителя системы. Как показывают расчеты, это имеет место при следующем соотношении между основными безразмерными параметрами:

$$\frac{\kappa}{\chi} \frac{\beta \gamma_s}{\alpha \gamma_T} = \frac{F(B)}{B},$$

$$F(B) = \frac{\exp(4B) - 2 \exp(2B) \cos(2B) + 1}{\exp(4B) + 2 \exp(2B) \sin(2B) - 1}. \quad (12)$$

Решение, вообще говоря, определяется тремя безразмерными параметрами. В качестве одного из них можно выбрать „температурное“ число Рэлея:

$$Ra_T = -\frac{\alpha g \gamma_T L^4}{16 \nu \kappa}.$$

Для других

$$\tau = \frac{\kappa}{\chi}, \quad \eta = \frac{\beta \gamma_s}{\alpha \gamma_T}$$

— отношение коэффициентов переноса для двух субстанций и, с точностью до знака, отношение их вкладов в стратификацию плотности. В найденное выше соотношение (12) величины  $\tau$  и  $\eta$  входят лишь в виде произведения

$$\xi = \tau \eta = \frac{\kappa}{\chi} \frac{\beta \gamma_s}{\alpha \gamma_T} = \frac{\kappa}{\chi} \frac{Ra_s}{Ra_T}. \quad (13)$$

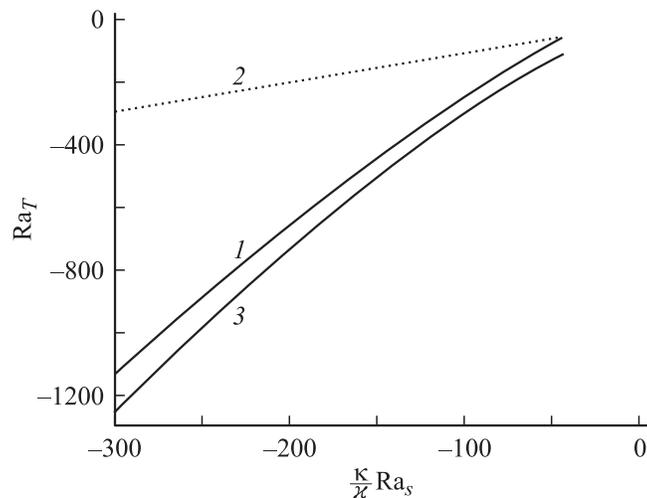
Здесь

$$Ra_s = -\frac{\beta g \gamma_s L^4}{16 \nu \kappa}$$

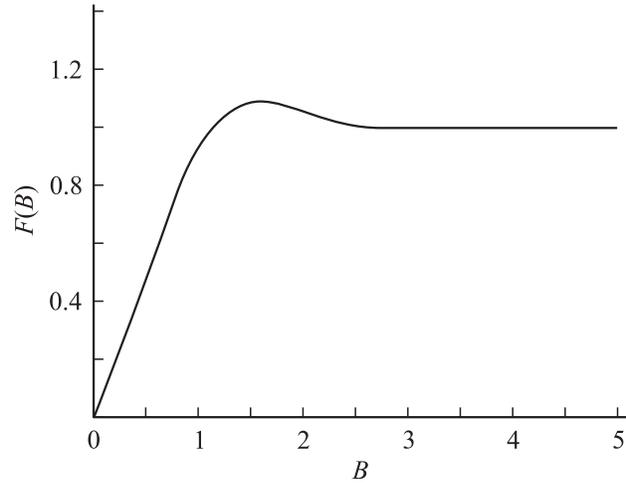
— аналог числа Рэлея для концентрации примеси.

На рис. 1 построена нейтральная кривая на плоскости  $\frac{\kappa}{\chi} Ra_s, Ra_T$  (кривая 1, над которой находится область неустойчивости). Для сравнения приведена биссектриса данного квадранта (кривая 2), соответствующая нейтральной кривой при отсутствии рассматриваемых краевых эффектов [1]. Видно, что рассматриваемый механизм приводит к существенному расширению области неустойчивости.

При слабых стратификациях (малых значениях безразмерных параметров  $R$  и  $B$ ) из (12) можно получить



**Рис. 1.** Нейтральная кривая (1) на плоскости  $(\frac{\kappa}{\chi} Ra_s, Ra_T)$ . Для сравнения приведены граница конвективной неустойчивости, обусловленной двойной диффузией (2) и граница устойчивости в приближении (16) (3). Области неустойчивости находятся над этими кривыми.



**Рис. 2.** Универсальная функция  $F(B)$ .

асимптотику

$$\xi \equiv \frac{\kappa}{\chi} \frac{\beta \gamma_s}{\alpha \gamma_T} \approx 1 - \frac{4}{45} B^4 \equiv 1 + \frac{1}{45} Ra_T (1 - \xi).$$

Отсюда следует максимальное (наименьшее по абсолютной величине) значение параметра  $Ra_T$ , при котором возможен рассматриваемый механизм неустойчивости:  $Ra_{Tcr} = -45$  (это видно и из рис. 1). Этому значению соответствует и  $Ra_s = -45$ , поскольку, как видно из (9), речь идет о предельном случае  $\xi \rightarrow 1$ .

Функция  $F(B)$  в (12) с ростом аргумента  $B$  быстро стремится к единице (она построена на рис. 2). Следовательно, при больших значениях  $B$  соотношение (12) существенно упрощается и принимает вид

$$\xi \approx 1/B. \quad (14)$$

С учетом того, что

$$B = \sqrt[4]{R/4} = \sqrt[4]{-Ra_T(1 - \xi)/4},$$

получаем упрощенное соотношение между безразмерными параметрами на нейтральной кривой

$$\xi \sqrt[4]{-(1 - \xi)Ra_T/4} \approx 1. \quad (15)$$

Как видно из (13), величина  $\xi$  представляет собой отношение абсциссы и ординаты на плоскости (рис. 1). Из этого рисунка видно, что на нейтральной кривой вдали от начала координат указанное отношение много меньше единицы. В этом случае можно сделать еще одно упрощение — пренебречь в (15) под корнем величиной  $\xi$  по сравнению с единицей. В итоге получим упрощенное выражение для нейтральной кривой при сильных стратификациях обеих субстанций:

$$Ra_T \approx - \left[ \left( \frac{\kappa}{\chi} Ra_s \right)^4 / 4 \right]^{1/3}. \quad (16)$$

Эта кривая также построена на рис. 1 (3). В данном приближении  $\xi \approx \sqrt[4]{-4/\text{Ra}_T}$ , что согласуется с использованным выше предположением о малости  $\xi$  на нейтральной кривой при достаточно устойчивых температурных стратификациях. Из последних соотношений нетрудно получить также следующее приближенное условие неустойчивости:

$$|N_s|^2 > \frac{2}{L} \frac{\chi}{\kappa} \sqrt[4]{4\kappa\nu N_T^6}.$$

Отсюда видно принципиальное отличие от известного механизма неустойчивости, обусловленной двойной (дифференциальной) диффузией. В настоящем случае неустойчивость в принципе возможна при сколь угодно устойчивой температурной и плотностной стратификации. При этом дестабилизация возможна и при одинаковых значениях коэффициентов переноса для двух субстанций, и при сколь угодно слабой неустойчивой стратификации примеси (если ширина канала  $L$  достаточно велика).

Отметим, что систему (2), (3) можно получить и без каких-либо предположений о малости амплитуд возмущений: нелинейные слагаемые в уравнениях гидродинамики и переноса тепла и примеси в вертикально-однородной задаче тождественно равны нулю. Таким образом, результаты настоящего раздела распространяются и на случай возмущений конечной амплитуды.

### 3. Неустойчивость механического равновесия у вертикальной поверхности

В рассмотренной выше задаче исследовалась устойчивость только вертикально-однородных возмущений. Такая симметрия позволяет рассматривать возмущения произвольной амплитуды, но не меньший интерес представляет задача о линейной устойчивости возмущений, зависящих и от вертикальной координаты  $z$ . Линеаризованная система уравнений в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + g(\alpha T - \beta s),$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \gamma_T w = \kappa \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right),$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \gamma_s w = \chi \left( \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} \right),$$

где  $u$  — составляющая скорости в направлении горизонтальной оси  $x$ ,  $P = p/p_0$ . Рассматривается решение в области  $x > 0$ ; на горизонтальной поверхности  $x = 0$  заданы те же краевые условия, что ранее на боковых границах канала, с добавлением условия непротекания

$u|_{x=0} = 0$ . Предполагается, что вдали от границы  $x = 0$  все возмущения затухают. Исследуем возможность возникновения монотонной неустойчивости нормальных мод вида

$$u = U(x) \cos(kz) \exp(\omega t), \quad w = W(x) \sin(kz) \exp(\omega t),$$

$$P = \Phi(x) \cos(kz) \exp(\omega t), \quad T = \theta(x) \sin(kz) \exp(\omega t),$$

$$s = S(x) \cos(kz) \exp(\omega t),$$

где  $k$  — волновое число,  $U(x)$  и т.д. — соответствующие амплитуды. При  $\omega = 0$  (имея в виду расчет порога неустойчивости) система уравнений для амплитуд имеет вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \nu \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - k^2 U \right), \quad \frac{\partial U}{\partial x} + W = 0,$$

$$-\Phi = \nu \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - k^2 W \right) + g(\alpha\theta - \beta S),$$

$$\gamma_T W = \kappa \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - k^2 \theta \right), \quad \gamma_s W = \chi \left( \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - k^2 S \right). \quad (17)$$

Исключив из последней системы все неизвестные, кроме  $W$ , получим уравнение

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - k^2 \right)^3 W = -k^4 R_k \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}. \quad (18)$$

Здесь безразмерный параметр  $R_k$  отличается от ранее введенного  $R$  лишь заменой масштаба длины  $L/2 \rightarrow k^{-1}$ :

$$R_k = \frac{1}{\nu k^4} \left( \frac{N_T^2}{\kappa} + \frac{N_s^2}{\chi} \right) = \frac{N_T^2}{\kappa \nu k^4} \left( 1 - \frac{\kappa}{\chi} \frac{\beta \gamma_s}{\alpha \gamma_T} \right).$$

Ищем решение уравнения (18) в виде суммы экспонент типа  $\exp(\sigma k x)$ . Характеристическое уравнение имеет вид

$$(\sigma^2 - 1)^3 = -R_k \sigma^2. \quad (19)$$

С учетом затухания при  $x \rightarrow \infty$  решение для вертикальной скорости представляет собой линейную комбинацию трех экспонент

$$w(x, z) = [C_1 \exp(k\sigma_1 x) + C_2 \exp(k\sigma_2 x) + C_3 \exp(k\sigma_3 x)] \sin(kz), \quad (20)$$

где отобраны корни  $\sigma_i$  с отрицательными действительными частями.

Из уравнения неразрывности с учетом краевых условий

$$u(x, z) = -\cos(kz) \sum_{i=1}^3 (C_i / \sigma_i) \exp(k\sigma_i x). \quad (21)$$

Проинтегрировав уравнения (17), с учетом (20) и краевых условий при  $x \rightarrow \infty$ , возмущения температуры и концентрации примеси можно представить в виде

$$T(x, z) = \left\{ C_T \exp(-kx) + \frac{\gamma_T}{k^2 \kappa} \sum_{i=1}^3 \frac{C_i}{\sigma_i^2 - 1} \exp(k\sigma_i x) \right\} \sin(kz), \quad (22)$$

$$s(x, z) = \left\{ C_s \exp(-kx) + \frac{\gamma_s}{k^2 \chi} \sum_{i=1}^3 \frac{C_i}{\sigma_i^2 - 1} \exp(k\sigma_i x) \right\} \sin(kz), \quad (23)$$

где  $C_T, C_s$  — постоянные интегрирования. Аналогично рассмотренной выше задаче они должны быть связаны соотношением  $\alpha C_T - \beta C_s = 0$ . С учетом краевых условий при  $x = 0$  из (20) и последующих выражений получим систему уравнений для постоянных интегрирования

$$\sum_{j=1}^3 C_j = 0, \quad \sum_{j=1}^3 (C_j / \sigma_j) = 0, \\ \sum_{j=1}^3 [(1 + \xi \sigma_j) / (\sigma_j^2 - 1)] C_j = 0.$$

Условие существования нетривиального решения, соответствующего границе устойчивости, — обращение в нуль определителя системы. В общем случае выражения для корней характеристического уравнения и соответствующий анализ решений весьма громоздки. Ограничимся здесь случаем больших значений параметра  $R_k$ , когда вследствие сильной фоновой гидростатической устойчивости, на первый взгляд, меньше всего оснований ожидать возможность существования неустойчивых возмущений. В этом предельном случае корни характеристического уравнения с отрицательными действительными частями имеют вид

$$\sigma_{1,2} \approx -(R_k/4)^{1/4} (1 \pm i), \quad \sigma_3 \approx -R_k^{-1/2}. \quad (24)$$

Это означает, что возмущения скорости и давления, вообще говоря, складываются из быстро затухающей и быстро осциллирующей моды (с характерным горизонтальным масштабом осцилляций и затухания порядка  $k^{-1} R_k^{-1/4} \ll k^{-1}$ ) и медленно затухающей моды с характерным горизонтальным масштабом затухания  $k^{-1} R_k^{1/2} \gg k^{-1}$ . В выражениях для возмущений температуры и концентрации примеси помимо быстро и медленно убывающих экспонент имеется „промежуточная“ мода, убывающая на горизонтальном масштабе порядка  $k^{-1}$ .

В рассматриваемом пределе определитель системы имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{B_k(1+i)} & -\frac{1}{B_k(1-i)} & -2B_k^2 \\ \frac{[1-\xi B_k(1+i)]}{2iB_k^2} & -\frac{[1-\xi B_k(1-i)]}{2iB_k^2} & -\left(1 - \frac{\xi}{2B_k}\right) \end{vmatrix}, \quad B_k = \sqrt[4]{R_k/4}.$$

С учетом того, что значение параметра  $B_k$  предполагается большим, нетрудно видеть, что два основных слагаемых в разложении определителя содержат произведения второго элемента последнего столбца и первых двух элементов последней строки. Алгебраическая сумма

этих слагаемых на нейтральной кривой должна быть приближенно равна нулю, откуда следует соотношение  $\xi \approx 1/B_k$ . Этот результат отличается от (14) лишь масштабом длины в числах Рэлея — в них входит вертикальный масштаб возмущения  $k^{-1}$  вместо полуширины вертикального слоя  $L/2$ . С этой оговоркой условие неустойчивости у вертикальной поверхности аналогично соответствующему условию для вертикального слоя.

Анализ горизонтальной структуры нейтральных возмущений показывает, что возмущения вертикальной скорости в основном сосредоточены вблизи поверхности в тонком слое толщиной порядка  $(kB_k)^{-1}$ , соответствующей первым двум корням характеристического уравнения. Возмущения горизонтальной скорости и давления проникают в среду гораздо глубже — на расстояния порядка  $B_k^2/k$ , отвечающие третьему корню характеристического уравнения. Тем самым нейтральные возмущения представляют собой циркуляционные ячейки, вытянутые по горизонтали. Возмущения температуры и солёности в основном сосредоточены в слое промежуточной толщины порядка  $k^{-1}$  — вертикального масштаба возмущений.

## Заключение

Таким образом, показана возможность возникновения конвективной неустойчивости в двухкомпонентной среде при сколь угодно сильной гидростатической устойчивости и при одинаковых значениях коэффициентов переноса обеих субстанций, если краевые условия на вертикальной поверхности для этих субстанций различны.

Автор признателен М.В. Калашнику за ценные замечания.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 04-05-64027) и МНТЦ (проект G-1217).

## Список литературы

- [1] Тернер Дж. Эффекты плавучести в жидкостях. М.: Мир, 1977. Turner J.S. Buoyancy effects in fluids. Cambridge: University Press, 1973.
- [2] Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 372 с.
- [3] Ингель Л.Х. // УФН. 2002. Т. 172. № 6. С. 691–699.
- [4] Ингель Л.Х. // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 1. С. 128–130.
- [5] Калашник М.В., Ингель Л.Х. // ЖЭТФ. 2006. Т. 130. № 1. С. 161–170.
- [6] Ингель Л.Х. // Докл. РАН. 2006. Т. 408. № 1. С. 92–95.