

01;03

Влияние сильного продольного магнитного поля на капиллярный распад пленки магнитной жидкости, покрывающей внутреннюю поверхность узкой цилиндрической трубки

© В.М. Коровин

Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова,
119192 Москва, Россия

E-mail: korovin@imec.msu.ru

(Поступило в Редакцию 29 января 2008 г.)

На базе асимптотической модели, описывающей развитие малых возмущений при капиллярном распаде тонкой цилиндрической пленки, намагниченной до насыщения феррожидкости, изучено влияние магнитных сил на вязкий режим распада. Аналитически получена формула, выражающая зависимость длины волны наиболее быстро растущей моды от физических параметров, характеризующих рассматриваемое явление.

PACS: 47.65-d, 75.50.Mm

Введение

Из экспериментов известно (см., например, [1–4]), что при вытеснении газом жидкости, заполняющей прямолинейную цилиндрическую капиллярную трубку со смачиваемой поверхностью, позади движущегося мениска, „выталкивающего“ находящийся перед ним жидкий столбик к открытому концу трубки, на стенке остается слой жидкости. Обработка экспериментальных данных показала [1,2], что относительный объем остающейся жидкости зависит от величины капиллярного числа, при вычислении которого в качестве масштаба скорости берется характерная скорость движения мениска.

Под действием капиллярных сил, стремящихся минимизировать площадь искривленной поверхности раздела жидкость–газ, из оставшейся жидкости формируется стационарная устойчивая конфигурация, отличная от пленки с цилиндрической свободной поверхностью. В ходе такой перестройки влияние силы тяжести пренебрежимо мало.

В имеющихся работах (см. [5] и приведенную в ней библиографию) исследование процесса трансформации оставшегося на стенке объема жидкости в стационарную конфигурацию проводится в рамках задачи о капиллярной неустойчивости пленки постоянной толщины, окружающей заполненную газом цилиндрическую область. Предполагается, что давление в газе постоянно, а жидкость в начальный момент времени — неподвижна. При этом выделяют два предельных режима развития капиллярной неустойчивости — вязкий, когда силы инерции пренебрежимо малы по сравнению с силами вязкости, и инерционный, когда реализуется противоположная ситуация. В прикладном аспекте больший интерес представляет вязкий режим.

В рамках такой модели установлено, что главным фактором, определяющим структуру конечной жидкой конфигурации, является относительная толщина исходной пленки γ . Из численного решения нелинейной

осесимметричной задачи о капиллярной неустойчивости цилиндрической пленки [6] найдено критическое значение $\gamma_* = 0.12$.

В случае $\gamma < \gamma_*$ на внутренней поверхности трубки образуется периодическая последовательность продолговатых капель кольцевого поперечного сечения. В пределах одной капли ширина кольца изменяется в осевом направлении, достигая максимума в середине капли. Численно найденная форма капли симметрична относительно плоскости, проведенной нормально к оси трубки и содержащей эти точки максимума. Обращенная к оси поверхность жидкости является границей осесимметричной газовой полости, тянущейся по всей длине трубки. Форма полости такова, что угол между касательной к меридиану ее поверхности и осью трубки всюду мал.

Если $\gamma > \gamma_*$, то вместо капель образуется периодическая последовательность перекрывающих сечение трубки жидких мостиков (с формой центральной части, напоминающей двояковогнутую линзу), разделенных между собой газовыми пузырьками. Эксперименты [6] подтверждают результаты численного моделирования. Согласно экспериментальным данным, $\gamma_* = 0.09$.

В настоящей работе с использованием предварительно упрощенной системы уравнений феррогидродинамики исследовано влияние магнитных сил на вязкий режим распада пленки магнитной жидкости, покрывающей внутреннюю поверхность капиллярной трубки из немагнитного материала, находящейся в сильном продольном магнитном поле. Изучен случай $\gamma \ll 1$, когда в отсутствие поля происходит распад пленки на капли.

Исходные уравнения

Рассматривается двумерное осесимметричное движение при капиллярном распаде пленки магнитной жидкости на внутренней поверхности цилиндрического капилляра из немагнитного материала, помещенного в однородное продольное магнитное поле \mathbf{H}_0 —

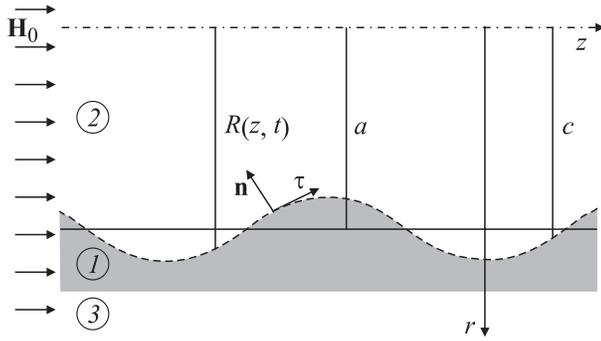


Рис. 1. Геометрия задачи.

(рис. 1). Введем цилиндрическую систему координат r, ϑ, z с осью z , являющейся осью капилляра. Обозначим через $\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_\vartheta, \mathbf{a}_z$ единичные векторы вдоль соответствующих координатных линий. Пусть c — радиус капилляра, t — время, а поверхность вращения $r = R(z, t) < c$ — граница пленки с покоящимся газом. Обозначим $\mathbf{H}_j(r, z, t) = H_{jr}\mathbf{a}_r + H_{jz}\mathbf{a}_z$ магнитное поле в пленке ($j = 1$), в газе, содержащемся внутри капилляра ($j = 2$), и во внешней по отношению к пленке области ($r < c, -\infty < z < +\infty$), занимаемой стенкой капилляра к окружающим капилляр газом ($j = 3$). Пусть $\mathbf{M}(r, z, t) = (M_r, 0, M_z)$ — вектор намагниченности жидкости.

Рассматривается случай сильного поля, под действием которого жидкость намагничена до насыщения [7]

$$\mathbf{M} = \frac{M_s \mathbf{H}_1}{H_1}, \quad H_1 = \sqrt{H_{1r}^2 + H_{1z}^2},$$

где M_s — величина намагниченности насыщения жидкости.

В приближении феррогидродинамики магнитное поле потенциально $\mathbf{H}_j = \text{grad } \Phi_j$, а плотность действующей на жидкость магнитной силы $\mathbf{f}(r, z, t)$ определяется выражением [7,8]

$$\mathbf{f}(r, z, t) = \mu_0 M \text{grad } H_1, \quad M = \sqrt{M_r^2 + M_z^2},$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Н/м — магнитная постоянная.

Пусть $\mathbf{V}(r, z, t) = u\mathbf{a}_r + w\mathbf{a}_z$ — поле скоростей жидких частиц. Движение магнитной жидкости описывается уравнением неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

и уравнениями Навье–Стокса, содержащими объемную магнитную силу

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \eta \left(\Delta u - \frac{u}{r^2} \right) + \frac{\mu_0 M_s}{\sqrt{H_{1r}^2 + H_{1z}^2}} \left(H_{1r} \frac{\partial H_{1r}}{\partial r} + H_{1z} \frac{\partial H_{1z}}{\partial r} \right), \quad (2)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \Delta w + \frac{\mu_0 M_s}{\sqrt{H_{1r}^2 + H_{1z}^2}} \left(H_{1r} \frac{\partial H_{1r}}{\partial z} + H_{1z} \frac{\partial H_{1z}}{\partial z} \right). \quad (3)$$

Здесь $p(r, z, t)$ — давление, а ρ и η — соответственно плотность и коэффициент динамической вязкости жидкости.

Вследствие соленоидальности векторов индукции $\mathbf{B}_1 = \mu_0(\mathbf{H}_1 + \mathbf{M})$, $\mathbf{B}_j = \mu_0 \mathbf{H}_j$, $j = 2, 3$ распределения потенциалов магнитных полей описываются уравнениями

$$\Delta \Phi_1 \left[\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right)^2 \right] \left[M_s + \sqrt{\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right)^2} \right] - M_s \left[\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right)^2 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r \partial z} + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} \right] = 0, \quad (4)$$

$$\Delta \Phi_j = 0, \quad j = 2, 3; \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

На поверхности раздела жидкость — газ должны выполняться кинематическое и динамическое условия. С целью их записи введем единичный вектор \mathbf{n} внешней нормали к поверхности раздела и единичный касательный к этой поверхности вектор $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{a}_\vartheta \times \mathbf{n}$, лежащий в плоскости, проходящей через ось z (см. рис. 1)

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + R'^2}} (R' \mathbf{a}_z - \mathbf{a}_r), \quad \boldsymbol{\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 + R'^2}} (R' \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_z), \quad (5)$$

где штрих означает дифференцирование функции $R(z, t)$ по переменной z .

Физический смысл кинематического условия состоит в том, что в каждой точке деформирующейся с течением времени поверхности жидкости, описываемой уравнением $F(r, z, t) = 0$, где $F(r, z, t) = r - R(z, t)$, вектор скорости перемещения этой поверхности в пространстве [9]

$$\mathbf{D}(z, t) = D \mathbf{n}, \quad D = -\frac{1}{\sqrt{1 + R'^2}} \frac{\partial R}{\partial t}$$

должен равняться нормальной составляющей вектора скорости $(\mathbf{V}_{F=0} \mathbf{n}) \mathbf{n}$ жидких частиц, образующих поверхность пленки

$$\text{при } r = R(z, t): \quad \frac{\partial R}{\partial t} + R' q = u, \quad (6)$$

поскольку жидкие частицы не могут ни отставать от поверхности раздела, ни опережать ее.

Пусть p_a — постоянное давление в газе, а $\mathbf{p}_v = p_{vv} \mathbf{v} + p_{vt} \mathbf{t}$ — вектор напряжений на некоторой элементарной площадке с нормалью \mathbf{v} в рассматриваемой линейно-вязкой магнитной жидкости; здесь \mathbf{t} — единичный касательный к площадке вектор.

Динамическое условие выражает то обстоятельство, что на поверхности раздела жидкость–газ нормальная составляющая вектора напряжений уравнивается совместным действием давления в газе, капиллярных сил [10] и поверхностных магнитных сил [7,8] (последнее слагаемое в правой части выражения (7)), а касательная составляющая обращается в нуль

$$\text{при } r = R(z, t): p_{nn} = -p_a + \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \frac{\mu_0}{2} M_n^2, \quad (7)$$

$$\text{при } r = R(z, t): p_{nr} = 0. \quad (8)$$

Здесь α — коэффициент поверхностного натяжения, а

$$R_1(z, t) = R\sqrt{1 + R'^2}, \quad R_2(z, t) = -\frac{(1 + R'^2)^{\frac{3}{2}}}{R''}$$

— радиусы кривизны [11] параллелей и меридианов поверхности вращения $r = R(z, t)$.

Перепирав равенства (7), (8) в развернутом виде с использованием известных выражений для физических компонент тензора напряжений [9], получим

при $r = R(z, t)$:

$$p - p_a = -\alpha \left[\frac{1}{R(1 + R'^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{R''}{(1 + R'^2)^{\frac{3}{2}}} \right] + \frac{2\eta}{1 + R'^2} \left[\frac{\partial u}{\partial r} - R' \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + R'^2 \frac{\partial w}{\partial z} \right] - \frac{\mu_0 M_s^2}{2(1 + R'^2)} \frac{(H_{1r} - R'H_{1z})^2}{H_{1r}^2 + H_{1z}^2}, \quad (9)$$

при $r = R(z, t)$:

$$(1 - R'^2) \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + 2R' \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0. \quad (10)$$

На внутренней поверхности трубки должны выполняться условия прилипания

$$\text{при } r = c: \quad u = 0, \quad w = 0. \quad (11)$$

Краевые условия, выражающие непрерывность тангенциальных компонент вектора магнитного поля и нормальных компонент вектора индукции на границах контакта сред с различными магнитными свойствами, имеют следующий вид

при $r = R(z, t)$:

$$\Phi_1 = \Phi_3, \left[M_s + \sqrt{\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right)^2} \right] \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = \sqrt{\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right)^2} \frac{\partial \Phi_3}{\partial n}, \quad (12)$$

при $r = c$:

$$\Phi_1 = \Phi_2, \left[M_s + \sqrt{\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right)^2} \right] \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = \sqrt{\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right)^2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial r}. \quad (13)$$

Вдали от пленки магнитное поле \mathbf{H}_3 однородно

$$\text{при } \frac{r}{c} \rightarrow \infty: \quad \mathbf{H}_3 \rightarrow \mathbf{H}_0. \quad (14)$$

Легко видеть, что задача (1)–(4), (6), (9)–(14) имеет точное решение

$$R = a = \text{const}, \quad p_0 = p_a - \frac{\alpha}{a}, \quad u = 0,$$

$$w = 0, \quad \Phi_j^0 = H_0 z, \quad j = 1, 2, 3,$$

описывающее гидростатическое состояние жидкой цилиндрической пленки толщины $\delta = c - a$ в однородном продольном магнитном поле $\mathbf{H}_0 = H_0 \mathbf{a}_z$ (рис. 1). При такой геометрии пленки в пренебрежении концевыми эффектами магнитные силы отсутствуют.

Линеаризация магнитостатической задачи. Случай сильного магнитного поля

Жидкая пленка постоянной толщины, созданная в начальный момент времени на внутренней поверхности капилляра, с течением времени неизбежно деформируется. Движение магнитной жидкости и деформация пленки вызывается действием капиллярных сил, обязанных своим происхождением кривизне свободной поверхности. Изменение формы свободной поверхности магнитной жидкости вызывает искажение однородного приложенного магнитного поля \mathbf{H}_0 , в результате чего возникают объемные магнитные силы. Магнитные силы, естественно, оказывают влияние на динамику жидкости.

Обратимся к задаче (4), (12)–(14), описывающей распределение магнитного поля. Пусть $\xi(z, t)$ — отклонение свободной поверхности магнитной жидкости от исходной цилиндрической формы $r = a$. Положим $R(z, t) = a + \xi(z, t)$, $\Phi_j = \Phi_j^0 + \varphi_j$, где функции $\varphi_j(r, z, t)$, $j = 1, 2, 3$ представляют потенциалы возмущений магнитных полей $\mathbf{h}_j = \text{grad } \varphi_j$ соответственно в жидкой пленке ($j = 1$), в заполненной газом осесимметричной области, окруженной пленкой ($j = 2$), и в окружающей пленку среде ($j = 3$).

На начальной стадии развития возмущений, когда выполняются условия

$$\sigma = \frac{|\xi|}{a} \ll 1, \quad \frac{1}{H_0} \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} \sim \sigma, \quad \frac{1}{H_0} \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \sim \sigma, \quad (15)$$

в результате линеаризации магнитостатической задачи (4), (12)–(14) с учетом (5) получаем

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{1}{1+\beta} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} = 0, \quad \beta = \frac{M_s}{H_0}; \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_j}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial z^2} = 0, \quad j = 2, 3; \quad (17)$$

$$\text{при } r = a: \quad \varphi_1 = \varphi_2, \quad (1+\beta) \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = M_s \frac{\partial \xi}{\partial z}; \quad (18)$$

$$\text{при } r = c: \quad \varphi_1 = \varphi_3, \quad (1+\beta) \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial r}; \quad (19)$$

$$\text{при } r/c \rightarrow \infty: \quad \text{grad } \varphi_3 \rightarrow 0. \quad (20)$$

Рассмотрим случай сильного магнитного поля, обеспечивающего выполнение условия $\beta \sim \sigma$. В такой ситуации, пренебрегая в уравнении (16) и в граничных условиях (18), (19) малыми величинами, получим

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} = 0; \quad (21)$$

$$\text{при } r = a: \quad \varphi_1 = \varphi_2, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = M_s \frac{\partial \xi}{\partial z}; \quad (22)$$

$$\text{при } r = c: \quad \varphi_1 = \varphi_3, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial r}, \quad (23)$$

т.е. расчет потенциалов малых возмущений поля в каждой из трех областей сводится к решению уравнения Лапласа стандартного вида (17), (21). Кроме того, в этом случае отпадает необходимость постановки граничных условий на внутренней поверхности капилляра (23), поскольку естественное расширение области определения решения $\varphi_1(r, z, t)$ уравнения (21) из области ($a \leq r \leq c$, $-\infty < z < +\infty$) на область ($a \leq r < +\infty$, $-\infty < z < +\infty$) позволяет автоматически удовлетворить равенствам, предписываемым условиями (23). Физически это означает, что при расчете главных членов разложений по $\sigma \ll 1$ возмущений поля, порождаемых деформацией пленки, в случае сильного поля допустимо пренебречь различием магнитных свойств намагниченной до насыщения жидкости и немагнитной среды, находящейся вне цилиндрической поверхности $r = c$.

Таким образом, в случае сильного магнитного поля магнитостатическая задача расчета потенциалов $\varphi_1(r, z, t)$, $\varphi_2(r, z, t)$ малых возмущений поля сводится к уравнениям Лапласа (17), (21), крайним условиям на свободной поверхности пленки (22) и условию исчезновения возмущения магнитного поля в бесконечности (20), в котором вместо функции $\varphi_3(r, z, t)$ фигурирует $\varphi_1(r, z, t)$.

Асимптотический анализ гидродинамической задачи и вывод эволюционного уравнения

С целью построения математической модели, описывающей движение магнитной жидкости при вязком режиме развития малых возмущений, оценим харак-

терные порядки величин, фигурирующих в исходных гидродинамических уравнениях. При капиллярном распаде пленки слабо изменяющейся толщины движение жидкости вызывается градиентом возмущенного давления $p(r, z, t) = p_0 + p_1(r, z, t)$. С помощью динамического условия на свободной поверхности (9) находим $p_1 \sim \alpha \xi_0 a^{-2}$, где ξ_0 — характерное значение $\xi(z, t)$. С использованием проекции уравнения движения на ось z (3) из условия баланса силы давления $-\partial p_1 / \partial z$ и сил вязкости получаем $w \sim p_1 \delta^2 (\eta a)^{-1}$.

Как показывают эти оценки, в постановке задачи наряду со средней толщиной жидкой пленки δ существенную роль играет безразмерный параметр $\gamma = \delta/a$, $0 < \gamma < 1$ — относительная толщина пленки. Введя параметр нелинейности $\varepsilon = \xi_0 / \delta$ [12], можно записать $p_1 \sim \alpha \varepsilon \gamma a^{-1}$, $w \sim \alpha \varepsilon \gamma^3 \eta^{-1}$. Обращаясь к уравнению неразрывности (1), получаем $u \sim \gamma w$. Характерное время развития неустойчивости $T \sim \xi_0 / u \sim \eta a \alpha^{-1} \gamma^{-3}$ находится из кинематического условия (6). Из условия непрерывности нормальной составляющей вектора индукции на границе раздела магнитная жидкость–газ (22) имеем $h_{1r} \sim \varepsilon \gamma M_s$.

При асимптотическом анализе гидродинамических уравнений (1)–(3) и крайних условий (6), (9), (10) будем пользоваться связанной с внешней границей исходной цилиндрической пленки ортогональной системой координат x, ϑ, z , где $x = r - a$; при этом области, занятой жидкостью, соответствует $\xi(z, t) \leq x \leq \delta$.

Используя найденные характерные значения параметров в качестве масштабов, введем безразмерные переменные и искомые функции (со звездочками)

$$x_* = \frac{x}{\gamma a}, \quad z_* = \frac{z}{a}, \quad t_* = \frac{\alpha \gamma^3}{\eta a} t, \quad \xi = \xi_0 \xi_*(z_*, t_*);$$

$$u = \frac{\varepsilon \gamma^4 \alpha}{\eta} u_*(x_*, z_*, t_*), \quad w = \frac{\varepsilon \gamma^3 \alpha}{\eta} w_*(x_*, z_*, t_*),$$

$$p_1 = \frac{\varepsilon \gamma \alpha}{a} p_1^*(x_*, z_*, t_*); \quad h_{1r} = \varepsilon \gamma M_s h_{1r}^*(x_*, z_*, t_*),$$

$$h_{1z} = \varepsilon \gamma M_s h_{1z}^*(x_*, z_*, t_*).$$

При этом, очевидно, $\varepsilon \xi_* \leq x_* \leq 1$.

Совершив переход к безразмерным переменным в уравнениях (1)–(3) и в крайних условиях (6), (9), (10) получим (звездочки опущены)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\gamma u}{1 + \gamma x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\gamma^7}{Oh^2} \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] &= -\frac{\partial p_1}{\partial x} + \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ &+ \frac{\gamma^3}{1 + \gamma x} \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma^4 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{(1 + \gamma x)^2} \right] + Mc F_x, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\frac{\gamma^5}{Oh^2} \left[\frac{\partial w}{\partial t} + \varepsilon \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] = -\frac{\partial p_1}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\gamma}{1 + \gamma x} \frac{\partial w}{\partial x} + \gamma^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + Mc F_z, \quad (26)$$

при $x = \varepsilon \xi(z, t)$: $\frac{\partial \xi}{\partial t} + \varepsilon w \frac{\partial \xi}{\partial z} = u,$ (27)

при $x = \varepsilon \xi(z, t)$:

$$-1 + \varepsilon \gamma p_1 = -\frac{1}{(1 + \varepsilon \gamma \xi) \left[1 + \left(\varepsilon \gamma \frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} + \frac{\varepsilon \gamma \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}}{\left[1 + \left(\varepsilon \gamma \frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{2}{1 + \left(\varepsilon \gamma \frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2} \times \left[\varepsilon \gamma^3 \frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon^2 \gamma^3 \frac{\partial \xi}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \gamma^2 \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \varepsilon^3 \gamma^5 \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} \right] - \frac{\varepsilon^2 \gamma^2 Mc}{2 \left[1 + \varepsilon^2 \gamma^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right]} \left[\beta h_{1r} - \frac{\partial \xi}{\partial z} (1 + \varepsilon \beta \gamma h_{1z}) \right]^2 \left(\varepsilon \beta \gamma h_{1r} \right)^2 + (1 + \varepsilon \beta \gamma h_{1z})^2, \quad (28)$$

при $x = \varepsilon \xi(z, t)$: $\left[1 - \left(\varepsilon \gamma \frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \gamma^2 \frac{\partial u}{\partial z} \right) + 2 \varepsilon \gamma^2 \frac{\partial \xi}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0.$ (29)

Здесь введены следующие обозначения:

$$F_x = \frac{\frac{\partial h_{1z}}{\partial x} + \frac{\varepsilon \beta \gamma}{2} \left(\frac{\partial h_{1r}^2}{\partial x} + \frac{\partial h_{1z}^2}{\partial x} \right)}{\left[(1 + \varepsilon \beta \gamma h_{1z})^2 + \varepsilon^2 \beta^2 \gamma^2 h_{1r}^2 \right]^{\frac{1}{2}}},$$

$$F_z = \frac{\frac{\partial h_{1z}}{\partial z} + \frac{\varepsilon \beta \gamma}{2} \left(\frac{\partial h_{1r}^2}{\partial z} + \frac{\partial h_{1z}^2}{\partial z} \right)}{\left[(1 + \varepsilon \beta \gamma h_{1z})^2 + \varepsilon^2 \beta^2 \gamma^2 h_{1r}^2 \right]^{\frac{1}{2}}},$$

$Oh = \frac{\eta}{\sqrt{\rho \alpha a}}$ — число Онезорге [5], а $Mc = \frac{\alpha \mu_0}{\alpha} M_s^2$ — параметр магнитно-капиллярного взаимодействия.

Из безразмерной формы записи проекций уравнения движения (25), (26) следует, что безразмерный критерий Mc представляет характерное отношение магнитной силы к силе давления. В случае $\gamma \sim 1$ величина $1/Oh^2$ представляет характерное отношение сил инерции к силам вязкости, т. е. имеет смысл числа Рейнольдса.

Считая выполненными условия $\varepsilon \sim \gamma \ll 1$, $Mc \sim 1$, $Oh^2 \gg \gamma^5$ и пренебрегая в уравнениях (24)–(26) малыми величинами, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (30)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (p_1 - Mch_{1z}) = 0, \quad (31)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial z} (p_1 - Mch_{1z}). \quad (32)$$

После аналогичных упрощений и линеаризации кинематическое (27) и динамические (28), (29) условия записываются следующим образом:

при $x = 0$: $\frac{\partial \xi}{\partial t} = u, \quad p_1 = \xi + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0.$ (33)

В переменных x, z условия прилипания (11) принимают вид

при $x = -1$: $u = 0, \quad w = 0.$ (34)

С целью дальнейшего упрощения постановки задачи проинтегрируем уравнения (30)–(32) по переменной x . Обращаясь к уравнению (31), с учетом краевого условия (33) для возмущения давления находим

$$p_1(x, z, t) = \xi + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + Mc [h_{1z}(x, z, t) - h_{1z}(0, z, t)]. \quad (35)$$

Подставив это выражение в уравнение (32), после двукратного интегрирования находим распределение продольной скорости $w(x, z, t)$, удовлетворяющее крайним условиям (33), (34)

$$w(x, z, t) = \frac{x^2 - 1}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial^3 \xi}{\partial z^3} - Mc \frac{\partial h_{1z}}{\partial z} \Big|_{x=0} \right). \quad (36)$$

Далее с учетом (36) и первого условия (34) из уравнения неразрывности (30) находим распределение поперечной скорости

$$u(x, z, t) = \frac{1}{6} [x(3 - x^2) - 2] \times \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4} - Mc \frac{\partial^2 h_{1z}}{\partial z^2} \Big|_{x=0} \right). \quad (37)$$

После подстановки этого выражения в кинематическое условие (33) получаем уравнение, описывающее эволюцию малого возмущения формы свободной поверхности пленки, подверженной воздействию капиллярных и магнитных сил

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4} - Mc \frac{\partial^2 h_{1z}}{\partial z^2} \Big|_{x=0} \right) = 0.$$

В размерных переменных с учетом выражения $\mathbf{h}_1 = \text{grad } \phi_1$ это уравнение записывается следующим образом:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\alpha \delta^3}{3 \eta a^2} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + a^2 \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4} - \frac{\mu_0 a^2}{\alpha} M_s \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial z^3} \Big|_{r=a} \right) = 0. \quad (38)$$

Таким образом, применительно к цилиндрической пленке малой относительной толщины задача (21)–(23), (38) представляет асимптотическую модель линейной стадии развития капиллярной неустойчивости. После решения этой задачи возмущение давления и распределения скоростей выписываются в явном виде (35)–(37).

Исследование дисперсионного уравнения

С целью исследования эволюции формы пленки при возрастании времени представим искомое решение в виде суперпозиции нормальных мод

$$Z(k) \exp\{i[kz - \omega(k)t]\},$$

$$\theta_j(r, k) \exp\{i[kz - \omega(k)t]\}, \quad j = 1, 2, \quad (39)$$

где i — мнимая единица, а $z(k)$, $\theta_j(r, k)$ — преобразования Фурье-функций $\xi(z, 0)$, $\varphi_j(r, z, 0)$ по переменной z .

Разделение переменных и выбор экспоненциального множителя $\exp(-i\omega t)$ в представлениях (39) обусловлены тем обстоятельством, что коэффициенты линейной системы уравнений (17), (21), (38) не зависят от времени. Ввиду этого при выполнении накладываемой указанными уравнениями и краевыми условиями (22) связи между частотой ω и волновым числом k (дисперсионное уравнение) рассматриваемая задача допускает частные решения вида (39).

При подстановке выражений (39) в уравнения Лапласа (17), (21) и в условия сопряжения (22) потенциалов возмущений магнитных полей на свободной поверхности пленки получаем

$$\frac{\partial^2 \theta_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_j}{\partial r} - k^2 \theta_j = 0, \quad j = 1, 2; \quad (40)$$

$$r = a: \quad \theta_1 = \theta_2, \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial r} - \frac{\partial \theta_2}{\partial r} = ikZM_s.$$

Ограниченное при $r = 0$, $r \rightarrow \infty$ решение задачи (40) имеет вид

$$\theta_1 = -ikaZM_s I_0(ka) K_0(kr),$$

$$\theta_2 = -ikaZM_s K_0(ka) I_0(kr), \quad (41)$$

где $I_0(kr)$, $K_0(kr)$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода [13].

Подстановка выражений (39) в эволюционное уравнение (38) с учетом решения (41) приводит к дисперсионному уравнению, содержащему в качестве параметра безразмерный критерий M_c

$$\omega = \frac{i\alpha\delta^3}{3\eta a^2} k^2 \{1 - (ka)^2 [1 + M_c I_0(ka) K_0(ka)]\}. \quad (42)$$

При действительных $k \neq 0$, за исключением особого случая, когда в дисперсионном уравнении выражение в фигурных скобках обращается в нуль, значения функции

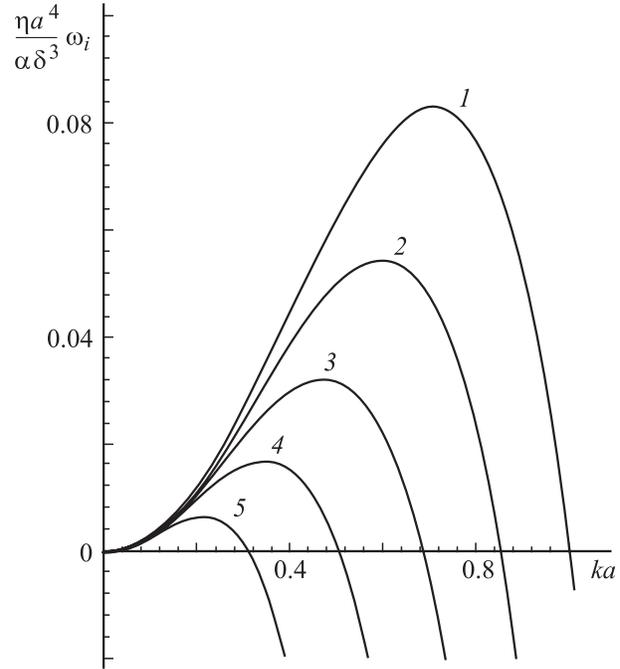


Рис. 2. Дисперсионные зависимости при различных значениях параметра магнитно-капиллярного взаимодействия: 1 — $M_c = 0$; 2 — 0.6; 3 — 1.5; 4 — 3; 5 — 7.

$\omega(k)$ являются чисто мнимыми. Ввиду этого решения (39), (41) имеют либо экспоненциальный рост по времени (при $\text{Im}\omega > 0$), либо экспоненциальное затухание (при $\text{Im}\omega < 0$).

Пусть $\omega_i(k) = \text{Im}\omega(k)$, а $\kappa = ka$ — безразмерное волновое число. В безразмерных переменных дисперсионные зависимости (42) при различных значениях M_c изображены на рис. 2.

В особом случае при

$$\kappa^2 [1 + M_c I_0(\kappa) K_0(\kappa)] - 1 = 0 \quad (43)$$

уравнение (43) определяет неявную многозначную функцию $\kappa = \kappa_c(M_c)$. Далее будем рассматривать ветвь этой функции, удовлетворяющую условию $\kappa_c(0) = 1$.

В плоскости параметров (M_c, κ) функция $\kappa = \kappa_c(M_c)$ определяет кривую нейтральной устойчивости, являющуюся границей между областью устойчивости $\{M_c > 0, \kappa > \kappa_c\}$ и областью неустойчивости $\{M_c > 0, 0 < \kappa < \kappa_c\}$ — рис. 3.

Отметим, что значению $M_c = 0$ соответствует случай классической неустойчивости Плато–Рэлея [14], когда неустойчивыми являются моды с длиной волн $\lambda = 2\pi/k$, превышающей длину внешней границы кольца, представляющего поперечное сечение невозмущенной цилиндрической пленки, т.е. моды с $\kappa < 1$.

Как видно из рис. 3, с ростом параметра магнитно-капиллярного взаимодействия пороговое волновое число $\kappa_c(M_c)$ уменьшается, т.е. магнитные силы стабилизируют моды с волновыми числами $\kappa_c < \kappa < 1$, в отсутствие поля лежащими в рэлеевской области

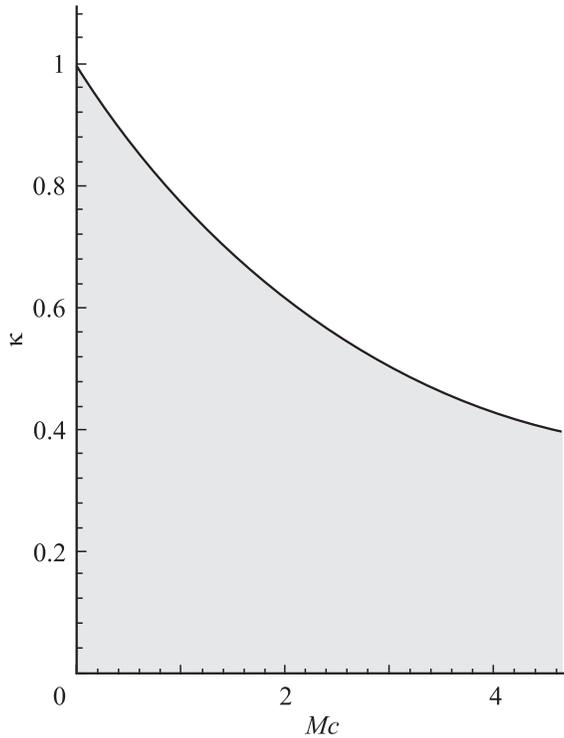


Рис. 3. Кривая нейтральной устойчивости. Область неустойчивости затемнена.

неустойчивости. Что касается длинноволнового предела, то моды с $\kappa \rightarrow 0$ остаются неустойчивыми при любой величине Mc . В самом деле, согласно [13], при $\kappa \rightarrow 0$ имеем $I_0(\kappa)K_0(\kappa) \sim -\ln \kappa$, так что при любом конечном Mc в случае $\kappa \ll 1$ имеем $\omega_i > 0$.

Исследуем влияние эффекта намагниченности жидкой пленки на длину волны $\lambda_m = 2\pi k_m^{-1}$ наиболее быстро растущей моды. Из экспериментов по капиллярному распаду цилиндрических пленок немагнитных жидкостей известно [3], что мода с волновым числом k_m определяет характерный объем $V \sim 2\pi c \lambda_m \delta$ капель, образующихся на финальной стадии развития капиллярной устойчивости.

При заданном Mc безразмерное волновое число $k_m = k_{m a}$ реализует максимум соответствующей дисперсионной кривой на рис. 2. Представленные на рис. 2 графики показывают, что с ростом Mc характерное время линейной стадии развития неустойчивости $\tau_1 = \omega_1^{-1}(k_m)$ увеличивается.

Величина k_m находится из условия

$$\left. \frac{d}{dk} \frac{1}{\omega_i} \right|_{k=k_m} = 0.$$

С учетом (42) отсюда получим

$$2 - 4\kappa_m^2 [1 + Mc I_0(\kappa_m) K_0(\kappa_m)] - \kappa_m^3 Mc [I_1(\kappa_m) K_0(\kappa_m) - I_0(\kappa_m) K_1(\kappa_m)] = 0. \quad (44)$$

Это уравнение определяет неявную многозначную функцию $\kappa_m(Mc)$. В случае $Mc = 0$ на одной из ветвей имеем

$k_m^0 = (\sqrt{2a})^{-1}$ и далее находим $\lambda_m^0 = 2\pi/k_m^0 = 2\sqrt{2}\pi a$, что совпадает с известным результатом [3].

Воспользуемся уравнением (44) для приближенного вычисления функции $\lambda_m(Mc)$. Обозначим $Mc = x$, $\kappa_m^{-1}(Mc) = y(x)$, тогда

$$\lambda_m(Mc) = 2\pi a y(x), \quad \frac{\lambda_m(Mc)}{\lambda_m^0} = \frac{y(x)}{y(0)}.$$

В новых переменных уравнение (44) принимает вид

$$2y^3 - 4y \left[1 + x I_0 \left(\frac{1}{y} \right) K_0 \left(\frac{1}{y} \right) \right] - x \left[I_1 \left(\frac{1}{y} \right) K_0 \left(\frac{1}{y} \right) - I_0 \left(\frac{1}{y} \right) K_1 \left(\frac{1}{y} \right) \right] = 0. \quad (45)$$

Будем рассматривать ветвь многозначной функции $y(x)$, на которой $y(0) = \sqrt{2}$.

Воспользовавшись формулой Тейлора, можем записать

$$\frac{y(x)}{y(0)} = 1 + \frac{y'(0)}{y(0)} x + \frac{y''(0)}{2y(0)} x^2. \quad (46)$$

Продифференцировав по x уравнение (45), с учетом рекуррентных соотношений для модифицированных функций Бесселя [13] получим

$$y' \left\{ 6y^4 - 4y^2 \left[1 + x I_0 \left(\frac{1}{y} \right) K_0 \left(\frac{1}{y} \right) \right] + 3xy \left[I_1 \left(\frac{1}{y} \right) K_0 \left(\frac{1}{y} \right) - I_0 \left(\frac{1}{y} \right) K_1 \left(\frac{1}{y} \right) \right] + 2x \left[I_0 \left(\frac{1}{y} \right) K_0 \left(\frac{1}{y} \right) - I_1 \left(\frac{1}{y} \right) K_1 \left(\frac{1}{y} \right) \right] - 4y^3 I_0 \left(\frac{1}{y} \right) K_0 \left(\frac{1}{y} \right) + y^2 \left[I_0 \left(\frac{1}{y} \right) K_1 \left(\frac{1}{y} \right) - I_1 \left(\frac{1}{y} \right) K_0 \left(\frac{1}{y} \right) \right] \right\} = 0. \quad (47)$$

Из этого равенства с учетом значения искомой функции $y(0) = \sqrt{2}$ находим $y'(0) = 0.406$. Путем дифференцирования по x уравнения (47) аналогичным образом найдено $y''(0) = 0.1131$. После подстановки $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$ в правую часть равенства (46) получим

$$\frac{\lambda_m(Mc)}{\lambda_m^0} = 1 + 0.29Mc + 0.04Mc^2. \quad (48)$$

На рис. 4 штриховой линией показан график зависимости нормированной длины волны наиболее быстро растущей моды $\lambda_m(Mc)/\lambda_m^0 = k_m^0/k_m(Mc)$ от параметра магнитно-капиллярного взаимодействия, построенный с использованием формулы (48). Сплошной линией на этом рисунке показан результат численного нахождения неявной нормированной функции $\lambda_m(Mc)/\lambda_m^0$, полученный с использованием уравнения (45). На отрезке

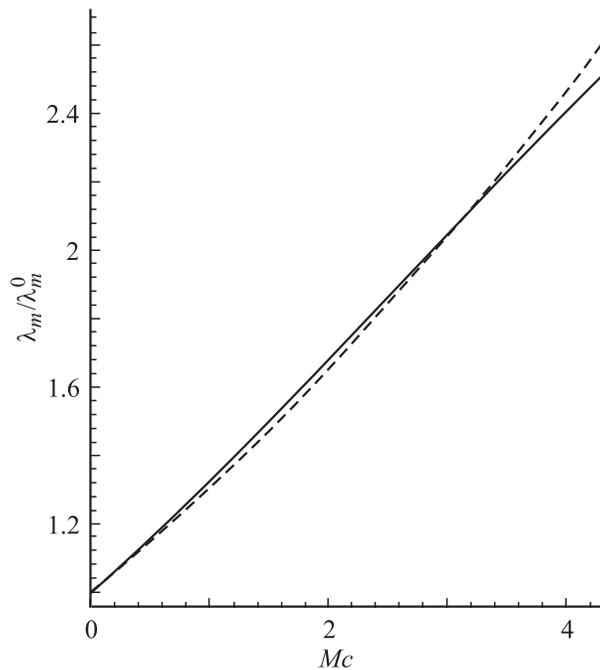


Рис. 4. Зависимость нормированной длины волны наиболее быстро растущей моды от параметра магнитно-капиллярного взаимодействия.

$0 \leq Mc \leq 4$ максимальная относительная погрешность формулы (48) не превышает 3%.

Представленные на рис. 4 графики показывают, что с ростом Mc происходит существенное увеличение характерного объема капель, образующихся на финальной стадии развития капиллярной неустойчивости пленки.

Заключение

Изучено влияние магнитных сил на капиллярную неустойчивость осесимметричной пленки феррожидкости, покрывающей внутреннюю поверхность намагничивающейся капиллярной трубки. Окруженная пленкой область заполнена газом, находящимся под постоянным давлением. Феррожидкость намагничена до величины насыщения M_s внешним продольным магнитным полем, напряженность которого много больше M_s . В исходном состоянии толщина пленки постоянна, а жидкость покоится.

С использованием имеющихся в рассматриваемой задаче малых параметров проведены оценки порядков величин в системе уравнений и краевых условий феррогидродинамики. Применительно к пленке малой относительной толщины построена простая модель движения феррожидкости под действием капиллярных и магнитных сил, в рамках которой исследовано развитие капиллярной неустойчивости первоначально цилиндрической пленки.

Построены дисперсионные кривые и проведен анализ влияния параметра магнитно-капиллярного взаимодей-

ствия Mc на развитие осесимметричных мод малых возмущений исходного гидростатического состояния магнитной жидкости, образующей пленку. В плоскости параметров (Mc, k) , где k — волновое число, построена кривая нейтральной устойчивости. Аналитически получена формула, выражающая зависимость длины волны наиболее быстро растущей моды от Mc , пригодная в достаточно широком диапазоне изменения Mc .

Установлено, что с ростом Mc (т.е. с увеличением вклада магнитных сил по сравнению с вкладом капиллярных сил в общем балансе действующих на феррожидкость сил) происходит существенное уменьшение интервала неустойчивых мод по сравнению со случаем обычных жидкостей, когда неустойчивы все моды с волновыми числами $k < a^{-1}$, где a — внутренний радиус пленки. Показано, что с помощью магнитных сил невозможно подавить неустойчивость длинноволновых ($k \ll a^{-1}$) мод. Результатом воздействия магнитных сил на жидкую пленку является увеличение характерного объема капель, образующихся на конечной стадии развития возмущений, сопровождающейся распадом пленки.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00026).

Список литературы

- [1] *Faibrother F., Stubbs A.E.* // J. Chem. Soc. 1935. Vol. 1. P. 527–529.
- [2] *Taylor G.I.* // J. Fluid Mech. 1961. Vol. 10. P. 161–165.
- [3] *Goren S.* // J. Fluid Mech. 1962. Vol. 12. P. 309–319.
- [4] *Goldsmith H.L., Mason S.G.* // J. Colloid Sci. 1963. Vol. 18. N 3. P. 237–261.
- [5] *Middleman S.* Modeling Axisymmetric Flows. Dynamics of Films, Jets, and Drops. San Diego: Academic Press, 1995. 299 p.
- [6] *Gaughlitz P.A., Radke C.J.* // Chem. Eng. Sci. 1988. Vol. 43. N 7. P. 1457–1465.
- [7] *Берковский Б.М., Медведев В.Ф., Краков М.С.* Магнитные жидкости. М.: Химия, 1989. 239 с.
- [8] *Розенцвейг Р.* Феррогидродинамика. М.: Мир, 1989. 360 с.
- [9] *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1983. 528 с.
- [10] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
- [11] *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 2. М.: Наука, 1974. 655 с.
- [12] *Бреховских Л.М., Гончаров В.В.* Введение в механику сплошных сред. М.: Наука, 1982. 335 с.
- [13] Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Мир, 1979. 830 с.
- [14] *Rayleigh Lord.* Scientific Papers. Cambridge University Press, 1902. Vol. 3. P. 594–596.