

Уравнение поверхности мениска, возмущенной капиллярным волновым движением весьма малой амплитуды, запишем в виде:

$$z = \xi(r, \varphi, t); \quad |\xi| \ll R;$$

$\xi(r, \varphi, t)$ — уравнение формы возмущенной поверхности мениска.

Математическая формулировка задачи состоит из уравнений гидродинамики жидкости и электростатики (в предположении, что скорость движения поверхности мениска много меньше релятивистской):

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{U} + \nabla(gz);$$

$$\operatorname{div} \mathbf{U} = 0; \quad \Delta \Phi = 0;$$

$$z = \xi(r, \varphi, t): \quad \Phi \equiv \text{const}; \quad \frac{dF}{dt} = 0;$$

$$F(r, \varphi, t) \equiv z - \xi(r, \varphi, t);$$

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla) \mathbf{U} = 0;$$

$$-(P - P_*) + 2\nu \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \sigma \operatorname{div} \mathbf{n} - \frac{(\nabla \Phi)^2}{8\pi} = 0;$$

$$z = 0, \quad r = R: \quad \xi(r, \varphi, t) = 0;$$

$$z \rightarrow \infty: \quad \nabla \Phi \rightarrow -E_0 \mathbf{e}_z;$$

$$r \rightarrow 0: \quad |\mathbf{U}| < \infty,$$

$\boldsymbol{\tau}$ и \mathbf{n} — орты касательной и нормали к поверхности мениска, P_* — постоянное давление в окружающей среде; $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$, $P(\mathbf{r}, t)$ и $\Phi(\mathbf{r}, t)$ — поля скоростей и давлений в жидкости, а также электростатического потенциала в окружающей среде.

В качестве первого начального условия зададим профиль мениска в начальный момент времени в виде суперпозиции цилиндрических волн:

$$t = 0: \quad \xi(r, t) = a \sum_{n=0}^N \sum_{j=1}^L h_{nj} J_n(k_{nj} r); \quad \sum_{n=0}^N \sum_{j=1}^L h_{nj} = 1.$$

Здесь a — амплитуда; k_{nj} — волновое число; h_{nj} — парциальный вклад цилиндрической волны, описываемой функцией Бесселя первого рода порядка n , соответствующей j -му корню этой функции Бесселя. Второе начальное условие выберем в виде требования обращения в ноль начальной фазы цилиндрической волны.

Для упрощения записи и последующих вычислений перейдем к безразмерным переменным, в которых $g = \rho = \sigma = 1$ и, оставляя за всеми переменными прежние обозначения, перепишем математическую формулировку задачи в линейном по безразмерной амплитуде возмущения свободной поверхности мениска приближении (отметим, что при принятом обезразмеривании характерным линейным пространственным масштабом, на который обезразмеривается амплитуда возмущения, является капиллярная постоянная жидкости $\alpha \equiv \sqrt{\sigma/\rho g}$).

В нулевом приближении по малой амплитуде возмущения $\xi(r, \varphi, t)$ равновесную поверхность мениска, пренебрегая эффектом смачивания на торце трубки, будем считать совпадающей с плоскостью $z = 0$; гидродинамическое давление определится высотой столба жидкости; поле скоростей течения жидкости будет тождественно равно нулю, а потенциал электростатического поля будет иметь вид: $\Phi_0 = -E_0 z$.

При линейризации задачи учтем, что поле скоростей течения жидкости $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$, поправки к полю давлений $p(\mathbf{r}, t)$ и к электростатическому полю $\phi(\mathbf{r}, t)$, связанные с волновым возмущением поверхности, имеют первый порядок малости по $|\xi|$. В итоге получим:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{U} + \nabla z; \quad \operatorname{div} \mathbf{U} = 0; \quad \Delta \phi = 0;$$

$$z = 0: \quad \phi = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial z} \xi; \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = U_z; \quad \frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r} = 0;$$

$$-p + 2\nu \frac{\partial U_z}{\partial z} - \hat{L} \xi + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = 0;$$

$$z = 0, \quad r = R: \quad \xi(r, \varphi, y) = 0;$$

$$z \rightarrow \infty: \quad \nabla \phi \rightarrow 0; \quad r \rightarrow 0: \quad |\mathbf{U}| < \infty;$$

$$\hat{L} \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

2. Процедура решения задачи

Так же как в [8], векторное поле скоростей $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ представим в виде суперпозиции

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = \sum_{j=1}^3 \hat{\mathbf{N}}_j \psi_j(\mathbf{r}, t);$$

$\psi_j(\mathbf{r}, t)$ — скалярные функции, а векторные операторы $\hat{\mathbf{N}}_j$, где $j = 1, 2, 3$, в цилиндрической системе координат имеют вид

$$\hat{\mathbf{N}}_1 \equiv \nabla; \quad \hat{\mathbf{N}}_2 \equiv \nabla \times \mathbf{e}_z; \quad \hat{\mathbf{N}}_3 \equiv \nabla \times (\nabla \times \mathbf{e}_z).$$

Проекция поля скоростей $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ на орты цилиндрической системы координат, выраженные через скалярные функции $\Psi_j(\mathbf{r}, t)$, имеют вид [8]:

$$U_r(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial z \partial r};$$

$$U_\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial z \partial \varphi};$$

$$U_z(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Psi_3}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial \varphi^2} \right).$$

Решения сформулированной задачи, ограниченные на оси симметрии капилляра, следует [8] искать в виде разложений

$$\xi(r, \varphi, t) = \sum_{n=0}^N \sum_{j=1}^L D_{nj}^{(1)} J_n(k_{nj} r) \exp(in\varphi + s_{nj} t);$$

$$\Psi_1(r, \varphi, z, t) = \sum_{n=0}^N \sum_{j=1}^L A_{nj}^{(1)} J_n(k_{nj}r) \times \exp(in\varphi + s_{nj}t) \exp(k_{nj}z);$$

$$\Psi_3(r, \varphi, z, t) = \sum_{n=0}^N \sum_{j=1}^L B_{nj}^{(1)} J_n(k_{nj}r) \times \exp(in\varphi + s_{nj}t) \exp(q_{nj}z);$$

$$\phi(r, \varphi, z, t) = \sum_{n=0}^N \sum_{j=1}^L C(1)_{nj} J_n(k_{nj}r) \times \exp(in\varphi + s_{nj}t) \exp(-k_{nj}z);$$

$$p(r, \varphi, z, t) = -\frac{\partial \Psi_1}{\partial t} + z,$$

где $q_{nj}^2 = k_{nj}^2 + \frac{s_{nj}}{v}$; s_j — комплексная частота; n и j — целые числа, определяющие порядок функции Бесселя первого рода $J_n(k_{nj}r)$ и номер корня уравнения $J_n(\mu_j) = 0$ соответственно.

Как показано в [8,9], скалярная функция $\psi_2(\mathbf{r}, t)$, не зависящая от координаты z и характеризующая плоские вихревые движения в жидкости, перпендикулярные оси симметрии системы, при исследовании устойчивости мениска может быть опущена, так как она не входит ни в одно из граничных условий, определяется начальными условиями для поля скоростей и соответствующим их выбором может быть положена тождественно равной нулю.

Удовлетворяя начальным и граничным условиям, для искомых величин можно найти решения

$$\xi(r, \varphi, t) = a \sum_{n=0}^N \sum_{j=1}^L h_{nj} J_n(k_{nj}r) \exp(in\varphi + s_{nj}t);$$

$$\Psi_1(r, \varphi, z, t) = -av \sum_{n=0}^N \sum_{j=1}^L \frac{h_{nj}}{k_{nj}} \left(2k_{nj}^2 + \frac{s_{nj}}{v}\right) \times J_n(k_{nj}r) \exp(in\varphi + s_{nj}t) \exp(k_{nj}z);$$

$$\Psi_3(r, \varphi, z, t) = 2av \sum_{n=0}^N \sum_{j=1}^L h_{nj} \times J_n(k_{nj}r) \exp(in\varphi + s_{nj}t) \exp(k_{nj}z);$$

$$\phi(r, \varphi, z, t) = aE_0 \sum_{n=0}^N \sum_{j=1}^L h_{nj} \times J_n(k_{nj}r) \exp(in\varphi + s_{nj}t) \exp(-k_{nj}z);$$

$$p(r, \varphi, z, t) = z + av \sum_{n=0}^N \sum_{j=1}^L \frac{h_{nj}s_{nj}}{k_{nj}} \left(2k_{nj}^2 + \frac{s_{nj}}{v}\right) \times J_n(k_{nj}r) \exp(in\varphi + s_{nj}t) \exp(k_{nj}z),$$

где s_{hj} — корень дисперсионного уравнения, имеющего вид

$$(s_{nj} + 2vk_{nj}^2)^2 + \omega_{nj}^2 = 4v^2k_{nj}^4 \sqrt{1 + \frac{s_{nj}}{vk_{nj}^2}};$$

$$\omega_{nj}^2 = k_{nj}(k_{nj}^2 - Wk_j - 1); \quad W = E_0^2/4\pi.$$

Можно интерпретировать ω_{nj}^2 как квадрат частоты волнового движения на однородно заряженной поверхности идеальной жидкости (что очевидно следует из выписанного дисперсионного соотношения, если положить в нем $v = 0$).

В асимптотике малой вязкости, когда безразмерный коэффициент кинематической вязкости много меньше единицы $v \ll 1$, дисперсионное соотношение можно записать в линейном приближении по безразмерной вязкости, и оно существенно упрощается:

$$s_{nj}^2 + 4vk_{nj}^2s_{nj} + \omega_{nj}^2 = 0,$$

его решения легко выписать

$$s_{nj}^{(1,2)} = \eta_{nj} \pm iz_{nj} \equiv -2vk_{nj}^2 \pm \sqrt{(2vk_{nj}^2)^2 - \omega_{nj}^2} \\ \equiv -2vk_{nj}^2 \pm \sqrt{(2vk_{nj}^2)^2 - k_{nj}(k_{nj}^2 - Wk_{nj} - 1)}; \quad (1)$$

$$\eta_{nj}^{(\pm)} \equiv -2vk_{nj}^2 \pm \sqrt{(2vk_{nj}^2)^2 - \omega_{nj}^2}, \quad \text{при } (2vk_{nj}^2)^2 \geq \omega_{nj}^2; \\ \eta_{nj} \equiv -2vk_{nj}^2, \quad \text{при } (2vk_{nj}^2)^2 < \omega_{nj}^2; \\ z_{nj}^{(\pm)} \equiv \pm \sqrt{(2vk_{nj}^2)^2 - \omega_{nj}^2}, \quad \text{при } (2vk_{nj}^2)^2 < \omega_{nj}^2.$$

3. Анализ устойчивости мениска на торце капилляра

В (1) η_{nj} характеризует декремент затухания осциллирующей мениска, а z_{nj} — их частоту. Из (1) видно, что условием нарушения устойчивости мениска является условие прохождения через нуль в область отрицательных значений квадрата частоты ω_{nj}^2 . При этом дисперсионное уравнение для частоты s_{nj} будет иметь два вещественных решения: отрицательное, соответствующее экспоненциальному затуханию амплитуды волны с декрементом

$$\eta_{nj} \equiv -2vk_{nj}^2 - \sqrt{(2vk_{nj}^2)^2 + k_{nj}(k_{nj}^2 - Wk_{nj} - 1)}, \quad (2)$$

и положительное, соответствующее экспоненциальному росту амплитуды волны со временем с инкрементом

$$\gamma_{nj} \equiv -2vk_{nj}^2 + \sqrt{(2vk_{nj}^2)^2 + k_{nj}(k_{nj}^2 - Wk_{nj} - 1)}. \quad (3)$$

Зависимость величины безразмерного инкремента неустойчивости мениска $\gamma = \gamma(k)$ от безразмерного волнового числа k , рассчитанная при $W = 20$ и $v = 0.0022$

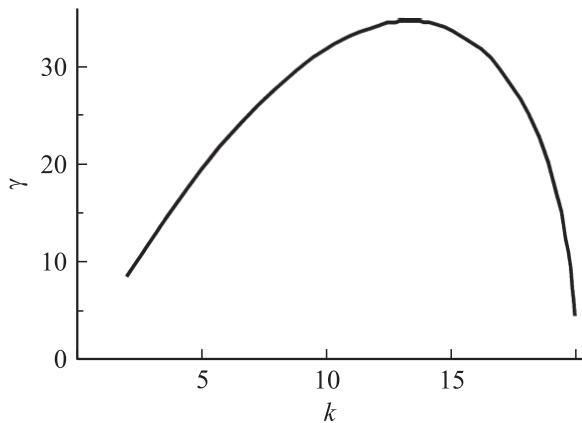


Рис. 2. Зависимость величины безразмерного инкремента неустойчивости мениска от безразмерного волнового числа, рассчитанная при $W = 20$.

(для воды), приведена на рис. 2. Приравняв нулю производную от инкремента по волновому числу, в приближении

$$|2vk_{nj}^2| \ll \left| \sqrt{k_{nj}(k_{nj}^2 - Wk_{nj} - 1)} \right|$$

несложно найти выражение для волнового числа волны, обладающей максимальным инкрементом

$$k^{\max} = \frac{1}{3} \left(W + \sqrt{W^2 + 3} \right).$$

Условие нарушения устойчивости мениска по отношению к отрицательному давлению электрического поля имеет вид

$$k_{nj}^3 - Wk_{nj}^2 - k_{nj} = 0 \quad \text{или} \quad W = k_{nj} - k_{nj}^{-1}. \quad (4)$$

Так как волновое число при фиксированном радиусе трубки может принимать только дискретные значения, целесообразно переписать полученное соотношение следующим образом:

$$W = \frac{\mu_{nj}}{R} - \frac{R}{\mu_{nj}}. \quad (5)$$

Из соотношения (4), в частности, можно видеть, что при заданном W область неустойчивых волновых чисел ограничена условием:

$$0 < k_{nj} < 0.5 \left[W + \sqrt{4 + W^2} \right].$$

Кольцевые волны на торце мениска с волновыми числами, удовлетворяющими условию

$$k_{nj} > k_{nj}^* \equiv 0.5 \left[W + \sqrt{4 + W^2} \right],$$

устойчивы по отношению к давлению электрического поля.

При фиксированном радиусе трубки $R = 0.7$ (в размерных переменных для воды $R = 0.154 \text{ cm}$) и фиксированном значении параметра W , например $W = 20$, несложно найти критическое значение μ_{nj}^* из соотношения (5), подставив туда значения R и W и решив соответствующее квадратное уравнение относительно μ_{nj} . В итоге несложно получить при $W = 20$ критическое значение $\mu_{nj}^* = 14.03$. Сказанное означает, что на торце мениска при указанных значениях физических параметров могут претерпевать неустойчивость цилиндрические волны, соответствующие нескольким корням функций Бесселя различных порядков, удовлетворяющих условию $\mu_{nj} \leq \mu_{nj}^* = 14.03$. Этому условию удовлетворяет 23 корня функций Бесселя с порядком $n \leq 9$.

Здесь уместно отметить, что, рассматривая движения вязкой жидкости в мениске с закрепленным периметром, когда за счет влияния вязкости поле скоростей на стенках капилляра обращается в нуль, целесообразно рассмотреть только движения жидкости, не зависящие от азимутального угла φ . Тогда в найденных решениях из сумм по n сохранится только одно слагаемое с $n = 0$. Иными словами, найденные решения будут осесимметричными. В частности, форма мениска на торце капилляра будет определяться суперпозицией функций Бесселя нулевого порядка, соответствующих различным корням уравнения: $J_0(\mu_j) = 0$. Тогда выражения для профиля мениска при заданном осесимметричном начальном условии могут быть записаны следующим образом:

$$\xi(r, t) = a \sum_{j=1}^L h_{0j} J_0(k_{0j}r) \exp(\gamma_{0j}t), \quad \mu_{0j} < \mu_{0j}^*, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \xi(r, t) = a \sum_{j=1}^L h_{0j} J_0(k_{0j}r) \\ \times \exp(-2vk_{0j}^2t) \cos(\omega_{0j}t), \quad \mu_{0j} > \mu_{0j}^*. \quad (7) \end{aligned}$$

4. Анализ временной эволюции профиля мениска

Пусть в начальный момент времени при $a = 10^{-1}$, $n = 0$, $R = 0.7$, $W = 20$ профиль волны определен двумя волнами, неустойчивыми по отношению к давлению электрического поля, с волновыми числами $k_{03} = 12.4$ и $k_{04} = 16.9$, обладающими инкрементами, рассчитанными по (3), $\gamma_{03} = 31.4$ и $\gamma_{04} = 25$ соответственно. Тогда временная эволюция профиля мениска может быть проиллюстрирована рис. 3, а.

Примем теперь, что амплитуда волн в начальный момент времени порядка тепловой: $a = 10^{-6}$, а остальные физические параметры остаются без изменений, и просчитаем профили мениска в различные моменты времени (см. рис. 3, б). Из сравнения рис. 3, а и 3, б несложно видеть, что даже при весьма малых начальных

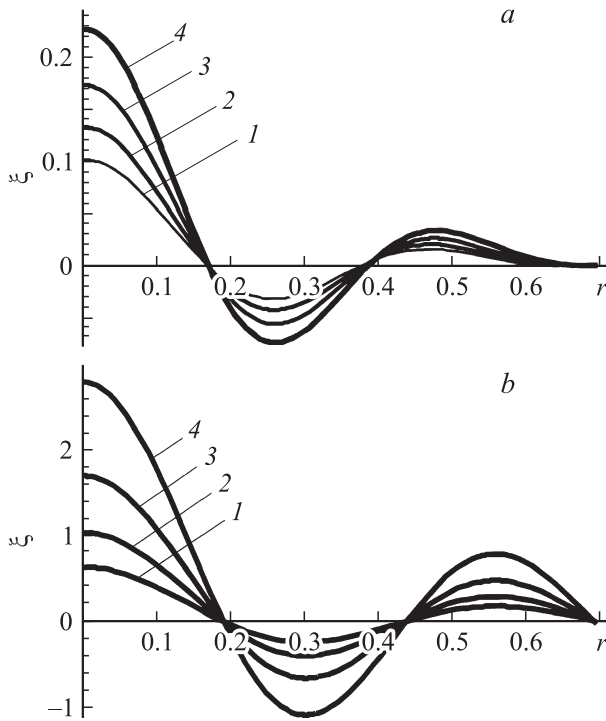


Рис. 3. *a* — профиль мениска (когда обе волны, определяющие его начальную деформацию, неустойчивы), рассчитанный при $a = 10^{-1}$, $R = 0.7$, $W = 20$ в различные моменты времени: 1 — $t = 0$; 2 — $0.3\gamma_{03}^{-1}$; 3 — $0.6\gamma_{03}^{-1}$; 4 — $0.9\gamma_{03}^{-1}$; *b* — то же, что на рис. 3, *a*, при $a = 10^{-6}$: 1 — $t = 14\gamma_{03}^{-1}$; 2 — $14.5\gamma_{03}^{-1}$; 3 — $15\gamma_{03}^{-1}$; 4 — $15.5\gamma_{03}^{-1}$.

амплитудах экспоненциальное нарастание со временем неустойчивых волн обеспечивает их заметный рост, правда при временах, на порядок больших, чем при больших начальных амплитудах. Здесь следует учесть, что понятие инкремента есть характеристика экспоненциального нарастания амплитуды неустойчивой волны со временем лишь в линейном по амплитуде волны приближении. Учет реальной нелинейности феномена дает еще более быстрое нарастание амплитуды неустойчивой волны со временем [10–12].

Если в начальный момент времени при $a = 0.1$, $n = 0$, $R = 0.7$, $W = 20$ форма мениска определена суперпозицией двух волн с волновыми числами $k_{05} = 21.4$ и $k_{06} = 25.9$, устойчивых по отношению к давлению электрического поля, совершающих периодические осцилляции с частотами $\omega_{05} = 25.2$ и $\omega_{06} = 62$, затухающие с декрементами, определенными (1), то с течением времени эти волны затухнут, как это видно из рис. 4.

Рассмотрим при прочих неизменных параметрах временную эволюцию мениска, когда в начальный момент времени его форма определена суперпозицией двух волн, одна из которых с $k_{03} = 12.4$ неустойчива по отношению к давлению электрического поля и ее амплитуда нарастает с максимальным при заданных внешних условиях инкрементом $\gamma_{03} = 31.4$, а другая с $k_{06} = 25.9$ устойчива и совершает периодические осцилляции с

частотой $\omega_{06} = 62.4$, затухающие с декрементом, определенным (1). Соответствующие временные зависимости образующей мениска приведены на рис. 5. Несложно видеть, что волна k_{06} весьма быстро затухает и дальнейшая временная эволюция мениска определяется неустойчивой волной с k_{03} .

Из приведенных выше рисунков видно, что:

а) временная эволюция мениска в основном определяется волнами, неустойчивыми по отношению к давлению электрического поля;

б) амплитуда начальной деформации неустойчивой волны не очень важна в определении временной эволюции мениска.

В этой связи рассмотрим ситуацию, когда при $R = 0.7$, $W = 20$ начальная форма мениска определена суперпозицией двух волн, одна из которых с минимальным при заданных условиях волновым числом $k_{01} = 3.4$ и инкрементом $\gamma_{01} = 13.9$ имеет конечную амплитуду $a_{01} \equiv ah_{01}$, а другая с волновым числом $k_{03} = 12.4$ и максимально возможным при заданных внешних условиях инкрементом $\gamma_{03} = 31.4$ имеет весьма малую тепловую амплитуду $a_{03} \equiv ah_{03}$, так что $h_{01} \gg h_{03}$. Зададимся

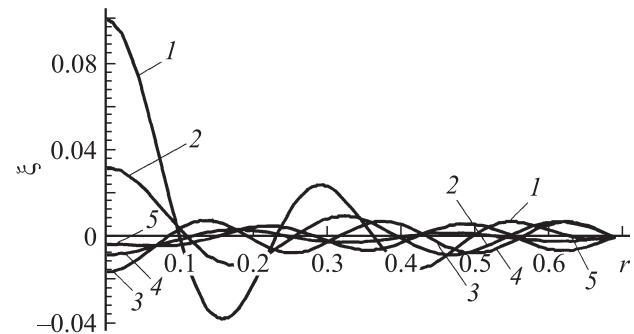


Рис. 4. Профиль мениска (когда обе волны, определяющие его начальную деформацию, устойчивы), рассчитанный при $a = 10^{-1}$, $R = 0.7$, $W = 20$ в различные моменты времени: 1 — $t = 0$; 2 — $0.3\gamma_{03}^{-1}$; 3 — $0.6\gamma_{03}^{-1}$; 4 — $0.9\gamma_{03}^{-1}$; 5 — T .

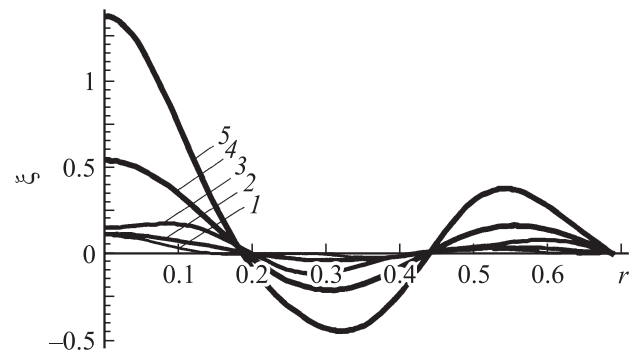


Рис. 5. Профиль мениска (когда его начальная деформация определена суперпозицией двух волн, одна из которых неустойчива, а другая устойчива), рассчитанный при $a = 10^{-1}$, $R = 0.7$, $W = 20$ в различные моменты времени: 1 — $t = 0$; 2 — $0.25T = 0.9\gamma_{03}^{-1}$; 3 — $0.5T = 1.8\gamma_{03}^{-1}$; 4 — $0.75T = 2.5\gamma_{03}^{-1}$; 5 — T , где $T = 2\pi\omega_{06}^{-1}$.

вопросом, через какое время t_* , экспоненциально нарастающие с различными инкрементами амплитуды волн с k_{01} и k_{03} станут равными друг другу:

$$ah_{01} \exp(\gamma_{01}t) = ah_{03} \exp(\gamma_{03}t).$$

Из выписанного соотношения несложно найти t_* в виде

$$t_* = \ln(h_{01}/h_{03})/(\gamma_{03} - \gamma_{01}). \quad (8)$$

Из (8) видно, что t_* пропорционально логарифму отношения амплитуд, тогда как от разности инкрементов зависит обратно пропорционально. Это приводит к тому, что даже при различии начальных амплитуд сравниваемых волн на много порядков величины (полагая, например, что ah_{01} сравнимо с R , а тепловая амплитуда ah_{03} порядка одной десятой нанометра) для времени t_* , согласно (8), получим оценку $t_* \sim 1$. Сказанное означает, что временная эволюция мениска определится волнами, обладающими максимальными при заданных внешних условиях инкрементами (см. рис. 2), влияние амплитуды начальной деформации волны не столь значительно.

В приведенных выше рассуждениях учитывалось дестабилизирующее мениск влияние поля силы тяжести, которое, согласно [8], играет заметную роль лишь при малых напряженностях электрического поля у поверхности мениска. Как показано в [8], при $W \geq 10$ влияние поля силы тяжести на устойчивость мениска становится пренебрежимо малым и его можно не учитывать, тогда максимальное при заданном W значение безразмерного волнового числа неустойчивой волны определится простым соотношением $k = W$, а максимальным инкрементом обладает волна с $k = 2W/3$. Временная эволюция неустойчивого мениска при этом не зависит от ориентации капилляра по отношению к направлению действия силы тяжести и определяется электрическими силами. Именно в таких условиях и используется в многочисленных практических приложениях феномен электродиспергирования жидкости.

В системе электродов, схематически изображенной на рис. 1, напряженность внешнего электрического поля в окрестности торца капилляра существенно (в несколько раз) превышает при прочих равных условиях напряженность однородного поля E_* между плоскими электродами вдали от капилляра. Если длину выступающей части капилляра обозначить L , эксцентриситет e вытянутого сфероида, которым для оценки величины напряженности на его торце можно моделировать капилляр, определится с учетом электростатического отражения капилляра в плоском электроде известным выражением: $e \equiv \sqrt{1 - R^2/L^2}$. Согласно [13], величина напряженности электростатического поля у вершины вытянутого сфероида превышает величину напряженности внешнего однородного электростатического поля E_0 в χ раз:

$$\chi \equiv \left\{ \frac{(1 - e^2)}{2e^3} \left[\ln \left(\frac{1 + e}{1 - e} \right) - 2e \right] \right\}^{-1}.$$

В реальных установках для электродиспергирования жидкости рабочая разность потенциалов, прикладываемая к электродам ~ 3000 V, при расстоянии между электродами ~ 1 см радиусы капилляров R измеряются сотнями микрометров [5–7,14]. При длине капилляра L порядка $10R$ (т.е. порядка единиц миллиметров) получим $e \approx 0.995$, а $\chi \approx 30$ при $E_0 \sim 3000$ V/cm. Давление электростатического поля на мениск и величина параметра W увеличатся на три порядка. Так, если при принятых значениях вдали от капилляра $W_* \sim 0.01$, то у поверхности мениска $W \sim 10$.

Заключение

При фиксированном значении напряженности внешнего электростатического поля E_0 у поверхности мениска (при фиксированном W), превышающем, однако, минимальную для начала реализации неустойчивости мениска по отношению к давлению электрического поля его величину, неустойчивость с инкрементом, немонотонным образом зависящим от длины волны, претерпевают конечное счетное количество стоячих волн из фиксированного диапазона волновых чисел в длинноволновом участке их спектра. Если форма мениска в начальный момент времени определяется суперпозицией нескольких волн с различными волновыми числами, относящимися как к устойчивой, так и неустойчивой частям спектра, то волны из устойчивой части спектра со временем затухают, а временная эволюция формы мениска определяется теми волнами из неустойчивой части спектра, чьи инкременты наиболее близки к максимальному при заданных внешних условиях значению.

Работа выполнена в рамках тематического плана НИР вуза 2008 г. при поддержке грантов РФФИ № 05-08-01147-а и 06-01-00066-а.

Список литературы

- [1] Bailey A.G. // Atomization and Spray Technology. 1986. Vol. 2. P. 95–134.
- [2] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 2–22.
- [3] Григорьев А.И. // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 5. С. 22–27.
- [4] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Волкова М.В. Спонтанный капиллярный распад заряженных струй. Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 2007. 348 с.
- [5] Cloupeau M., Prunet Foch B. // J. Electrostatics. 1990. Vol. 25. P. 165–184.
- [6] Ширяева С.О., Григорьев А.И. // ЖТФ. 1994. Т. 64. Вып. 3. С. 13–25.
- [7] Jaworek A., Krupa A. // J. Aerosol Sci. 1999. Vol. 30. N 7. P. 873–893.
- [8] Григорьев А.И. // ЖТФ. 2007. Т. 77. Вып. 2. С. 31–40.
- [9] Ширяева С.О., Лазарянец А.Э., Григорьев А.И. и др. Метод скаляризации векторных краевых задач. Препринт ИМ РАН. № 27. Ярославль, 1994. 126 с.

- [10] *Ширяева С.О.* // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26. Вып. 4. С. 5–8.
- [11] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Белоножко Д.Ф., Климов А.В.* // ЭОМ. 2004. № 4. С. 34–40.
- [12] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Белоножко Д.Ф., Климов А.В.* // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 2. С. 19–27.
- [13] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992. 664 с.
- [14] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Святченко А.А.* Классификация режимов работы электродинамических источников жидко-капельных пучков (обзор). Препринт ИМ РАН. № 25. Ярославль, 1993. 118 с.