01

Фазовая группировка осцилляторов при параметрическом резонансе

© А.Ф. Курин

Воронежский государственный университет,
394006 Воронеж, Россия
e-mail: afkurin@mail.ru

(Поступило в Редакцию 1 октября 2007 г.)

На основе решения задачи Коши для уравнения Матье асимптотическим методом усреднения в третьем приближении метода для нулевой зоны резонанса и в четвертом приближении для первой, второй, третьей и четвертой зон рассмотрена фазовая группировка в ансамбле осцилляторов в областях неустойчивости, а также в областях устройчивости вблизи границ с областями неустойчивости. Показано, что существование и закономерности группировки следуют из анализа известного физического явления — биений двух колебаний. В качестве примера рассмотрены параметрические колебания зарядов в узле электрического поля стоячей волны.

PACS: 11.10.-z

Введение

Закономерности фазовой группировки в ансамблях первоначально несфазированных классических осцилляторов представляют интерес в высокочастотной электронике [1]. Компактные фазовые сгустки в потоках электронных осцилляторов приводят к эффективному когерентному излучению электромагнитных волн заряженными частицами, что используется для генерации и усиления волн. Фазировка важна также для ускорения потоков частиц. В работе [1] дан анализ различных механизмов группировки возбужденных осцилляторов, когда велика их начальная энергия и преобладает развивающаяся во времени группировка вследствие динамических фазовых смещений неизохронных частиц за счет изменения частоты их колебаний под действием переменной силы. Фазовые смещения зависят от начальных фаз осцилляторов. В работе [2] рассматриваются особенности группировки при малой начальной энергии возбуждения осцилляторов, когда малы динамические фазовые смещения вследствии неизохронности частиц.

В настоящей работе построено необходимое для исследования группировки решение задачи Коши для уравнения Матье. В первой, второй, третьей и четвертой областях неустойчивости решение получено в четвертом приближении асимптотического метода усреднения. Здесь движение частицы — колебательное с экспоненциально нарастающей амплитудой (параметрический резонанс). Первоначально несфазированные осцилляторы группируются так, что плотность фазового сгустка стремится экспоненциально к δ-образному. Вблизи границ указанных областей неустойчивости решение задачи Коши получено также в четвертом приближении метода. Оно дает колебания в виде биений с периодически медленно меняющейся амплитудой. Здесь группировка периодическая с частотой биений с плотным фазовым сгустком. Физически образование сгустка объясняется закономерностями поведения фазы колебаний при биениях, когда сложная траектория каждого осциллятора образуется суперпозицией двух его колебаний со своими начальными фазами и близкими частотами. Отмечено, что при биениях для каждой частицы существует фазовое смещение, зависящее от времени и начальной фазы, и это приводит к группировке в ансамбле осцилляторов. Существование биений следует уже из качественного рассмотрения резонансов в уравнении Матье. В нулевой области неустойчивости (неограниченное движение) и в области устойчивости (ограниченное движение), вблизи границы с этой областью неустойчивости, а также на самой границе решение получено в третьем приближении метода усреднения с помощью известного преобразования Боголюбова в задаче о маятнике с вибрирующей точкой подвеса. Здесь неограниченное движение представляет собой медленный экспоненциальный рост координаты частицы и быстрые колебания с экспоненциально растущей амплитудой, наложенные на это медленное изменение координаты. Колебания фазируются. Ограниченное движение представляет собой медленные колебания, на которые наложены быстрые осцилляции, модулированные по амплитуде и фазе с частотой медленных колебаний. В качестве примера рассматриваются колебания зарядов в узле электрического поля стоячей электромагнитной волны. Здесь возможно неустойчивое движение зарядов [3]. Как и устойчивые колебания в пучности электрического поля [4], этот эффект объясняется параметрическим взаимодействием поля стоячей волны и зарядов. Оба явления возможны в сильном поле.

При знакомстве с результатами настоящей работы удобно пользоваться известной диаграммой Айнса–Стретта.

1. Преобразование уравнения Матье

Уравнение Матье

$$\ddot{z} + \big(a + q\cos(2t)\big)z = 0, \tag{1}$$

в котором точки означают дифференцирование по вещественному t, а q и a — вещественные параметры, преобразуем в двух случаях. В первом случае считаем $a > 0$ и будем следовать работам [5,6]. Тогда при $q = 0$ уравнение (1) и имеет общее решение $z = b\cos(\omega_0 t + \xi)$, в котором $\omega_0 = \sqrt{a}$ — частота, а b, ξ — произвольные постоянные. Следуя методу Лагранжа, решение уравнения (1) при $q \neq 0$ будем искать в виде

$$z = b(t)\cos\psi(t). \tag{2}$$

Тогда для переменных Ван-дер-Поля $b(t)$ (амплитуда) и $\psi(t)$ (фаза) получаем систему точных уравнений, эквивалентную уравнению (1),

$$\dot b = \frac{q}{2\omega_0}\, b\sin(2\psi)\cos(2t),$$

$$\dot\psi = \omega_0 + \frac{q}{2\omega_0}\,\big(1+\cos(2\psi)\big)\cos(2t). \tag{3}$$

Отсюда видно, что уравнение для ψ является независимым, так как не содержит b. Если ввести фазы $\phi_1 = 2(\psi - t)$, $\phi_2 = 2(\psi + t)$, $\phi_3 = 2t$, то вместо (3) получим уравнение для амплитуды

$$\dot b = \varepsilon b(\sin\phi_1 + \sin\phi_2) \tag{4}$$

и систему уравнений для фаз

$$\dot\phi_1 = (\omega_0 - 1) + 2\varepsilon(\cos\phi_1 + \cos\phi_2 + 2\cos\phi_3),$$

$$\dot\phi_2 = 2(\omega_0 + 1) + 2\varepsilon(\cos\phi_1 + \cos\phi_2 + 2\cos\phi_3),\quad \dot\phi_3 = 2, \tag{5}$$

где

$$\varepsilon = \frac{q}{4\omega_0}. \tag{6}$$

Для определенnности возьмем параметр $q > 0$ как в [7]. При $q < 0$ в построенных в настоящей работе решениях следует заменить t на $\pi/2 + t$, поскольку при такой замене получаем уравнение (1) с положительным параметром q. Далее будем считать параметр ε малым ($\varepsilon \ll 1$).

В наличии резонансов в уравнении (1) можно убедиться путем следующих рассуждений. При $q = 0$ имеет место свободное колебание с частотой ω_0 (основное колебание). При $q \neq 0$ это движение возмущается за счет вынужденной силы $f_z = -q\cos(2t)z$, которая колеблется с частотами $2 - \omega_0$ и $2 + \omega_0$. При $\omega_0 = 1(a = 1)$ частота $2 - \omega_0$ оказывается равной частоте основного колебания ω_0: $2 - \omega_0 = \omega_0$ или $2(1 - \omega_0) = 0$, т.е. имеет место резонанс. В свою очередь, наличие в z колебания с частотой $2 - \omega_0$ приводит к появлению в f_z составляющей силы с частотой $2 - \omega_0 + 2 = 4 - \omega_0$. При $\omega_0 = 2\,(a = 4)$ эта составляющая оказывается в резонансе с основным колебанием: $4 - \omega_0 = \omega_0$ или $2(2 - \omega_0) = 0$. Аналогичным образом колебание в z с частотой $4 - \omega_0$ порождает в f_z составляющую с частотой $4 - \omega_0 + 2 = 6 - \omega_0$, которая при $\omega_0 = 3\,(a = 9)$ находится в резонансе с основным колебанием: $6 - \omega_0 = \omega_0$ или $2(3 - \omega_0) = 0$. Таким образом, в уравнении Матье имеют место комбинационные резонансы $2\sqrt{a} - 2l = 0$, $l = 1, 2, 3, \ldots$

В системе (4), (5) резонансам соответствуют медленные фазы θ_l, $l = 1, 2, \ldots$ При $\omega_0 \approx 1 (a \approx 1)$ расстройка $\omega_0 - 1$ мала ($|\omega_0 - 1| \sim \varepsilon$), следовательно $|\dot\phi_1| \sim \varepsilon$, и медленной фазой будет $\theta_1 = \phi_1$. Фазы $\phi_{2,3}$ — быстрые. При резонансе $\omega_0 \approx 2$ ($a \approx 4$) vмедленной фазой является $\theta_2 = \phi_1 - \phi_3$, поскольку $|\dot\theta_2| = |\dot\phi_1 - \dot\phi_3| \sim \varepsilon$, что следует из (5). Здесь имеем систему пяти уравнений, поскольку к (4), (5) добавляется уравнение для θ_2

$$\dot\theta_2 = 2(\omega_0 - 2) + 2\varepsilon(\cos\phi_1 + \cos\phi_2 + 2\cos\phi_3). \tag{7}$$

Аналогично при $\omega_0 \approx 3$ ($a \approx 9$) имеем медленную фазу $\theta_3 = \phi_1 - 2\phi_3$. К системе (4), (5) добавляем уравнение для θ_3

$$\dot\theta_3 = 2(\omega_0 - 3) + 2\varepsilon(\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2 + 2\cos\varphi_3). \tag{8}$$

Если $\omega_0 \approx 4$ ($a \approx 16$), то медленной фазой является $\theta_4 = \phi_1 - 3\phi_3$, и систему (4), (5) дополним уравнением для θ_4

$$\dot\theta_4 = 2(\omega_0 - 4) + 2\varepsilon(\cos\phi_1 + \cos\phi_2 + 2\cos\phi_3). \tag{9}$$

В уравнениях (8), (9) фазы $\phi_{1,2,3}$ быстрее. При всех этих резонансах уравнение (4) для амплитуды и уравнения для фаз вместе представляют собой известную в асимптотическом методе усреднения систему с несколькими быстро вращающимися фазами [6,8]

$$\dot x = \varepsilon X(x, y), \quad \dot y = \omega + \varepsilon Y(x, y). \tag{10}$$

В нашей задаче $x = (b, \theta_l)$ $(l = 1, 2, 3, 4)$ — вектор. Если $l = 1$, то $y = (y_1, y_2) = (\phi_2, \phi_3)$ — вектор, и тогда $\omega = (2(\omega_0 + 1), 2)$ — постоянный вектор. Если $l = 2, 3, 4$, то $y = (y_1, y_2, y_3) = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$, тогда $\omega = (2(\omega_0 - 1), 2(\omega_0 + 1), 2)$.

Начальные условия $z(0) = z_0$, $\dot z(0) = \dot z$ для уравнения (1) с помощью уравнения (2) преобразуются в начальные (при $t = 0$) условия для системы (3) по формулам $b(0) = b_0 = \sqrt{z_0^2 + (\dot z_0/\omega_0)^2}$, $\operatorname{tg}\psi(0) = \operatorname{tg}\psi_0 = -\dot z_0/(\omega_0 z_0)$, где $0 \le \psi_0 \le 2\pi$. Для системы (4), (5) и уравнений (7)–(9) начальные значения равны

$$b(0) = b_0, \quad \phi_1(0) = \phi_2(0) = 2\psi_0,$$

$$\phi_3(0) = 0, \quad \theta_2(0) = \theta_3(0) = \theta_4(0) = 2\psi_0. \tag{11}$$

Во втором случае возьмем малыми a и q, т.е. $q \ll 1$, $|a| \ll 1$. Можно считать, что теперь имеет место резонанс на нулевой частоте ($\omega_0 = 0$), поскольку существующее, как указывалось, при $q \neq 0$ в f_z колебание z с частотой $2 - \omega_0$ порождает составляющую f_z с частотой $2 - \omega_0 - 2 = 0 \cdot 2 - \omega_0$, которая при $\omega_0 = 0$ находится в резонансе с основным колебанием: $0 \cdot 2 - \omega_0 = \omega_0$ или $2(0 - \omega_0) = 0$.

Уравнение (1) запишем в виде

$$\ddot z + \big(kq^2 + q\cos(2t)\big)z = 0, \tag{12}$$

где $|k| \sim 1$. Для приведения уравнения (12) к стандартной форме [9] воспользуемся заменой Боголюбова в задаче о маятнике с вибрирующей точкой подвеса [9]

$$z = \varphi + \frac{q}{4}\varphi\cos(2t), \quad \dot z = q\Omega - \frac{q}{2}\varphi\sin(2t). \tag{13}$$

Для новых переменных φ, Ω получаем систему уравнений в стандартной форме

$$\dot{\varphi} = q\Omega - \frac{q^2}{4}\,\Omega\cos(2t) + \frac{q^3}{16}\,\Omega\cos^2(2t) + q^4\ldots,$$

$$\dot{\Omega} = q\left[\frac{1}{2}\,\Omega\sin(2t) - \left(k + \frac{1}{4}\,\cos^2(2t)\varphi\right)\right]$$

$$- \frac{q^2}{4}\left[k\varphi\cos(2t) + \frac{\Omega}{4}\,\sin(4t)\right]$$

$$+ \frac{q^3}{32}\,\Omega\sin(2t)\cos^2(2t) + q^4\ldots \qquad (14)$$

вида

$$\dot{x} = qX_1(t,x) + q^2X_2(t,x) + q^3X_3(t,x) + q^4\ldots, \qquad (15)$$

где $x = (\varphi, \Omega)$ — вектор. Из выражений (13) следуют начальные значения

$$\varphi(0) = \varphi_0 = \frac{z_0}{1+q/4}, \quad \Omega(0) = \Omega_0 = \frac{\dot{z}_0}{q}. \qquad (16)$$

Известно [6,8], что решение системы уравнений (10) имеет вид

$$x = x + \varepsilon u_1(x,y) + \varepsilon^2u_2(x,y) + \varepsilon^3u_3(x,y)$$

$$+ \varepsilon^4u_4(x,y) + \varepsilon^5\ldots,$$

$$y = y + \varepsilon v_1(x,y) + \varepsilon^2v_2(x,y)$$

$$+ \varepsilon^3u_3(x,y) + \varepsilon^4v_4(x,y) + \varepsilon^5\ldots, \qquad (17)$$

где новые переменные x, y удовлетворяют системе уравнений

$$\dot{\bar{x}} = \varepsilon A_1(\bar{x}) + \varepsilon^2A_2(\bar{x}) + \varepsilon^3A_3(\bar{x}) + \varepsilon^4A_4(\bar{x}) + \varepsilon^5\ldots,$$

$$\dot{\bar{y}} = \omega + \varepsilon B_1(\bar{x}) + \varepsilon^2B_2(\bar{x}) + \varepsilon^3B_3(\bar{x}) + \varepsilon^4B_4(\bar{x}) + \varepsilon^5\ldots \qquad (18)$$

Для определения u, v, A, B [6,8] подставляют (17), (18) в систему (10), разлагая функции в ряды по степеням ε. Затем приравнивают выражения при одинаковых степенях ε в левой и правой частях уравнений (10). В результате, учитывая, что ω не зависит от x, получают системы уравнений четырех приближений метода усреднения.

Отметим, что начальные (при $t = 0$) значения $\bar{x}(0)$, $\bar{y}(0)$ для системы (18) могут не совпадать с начальными значениями $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ для системы (10). Связь между ними устанавливается формулами (17) при $t = 0$

$$x_0 = \bar{x}(0) + \varepsilon u_1(\bar{x}(0), \bar{y}(0)) + \varepsilon^2u_2(\bar{x}(0), \bar{y}(0))$$

$$+ \varepsilon^3u_3(\bar{x}(0), \bar{y}(0)) + \varepsilon^4\ldots,$$

$$y_0 = \bar{y}(0) + \varepsilon v_1(\bar{x}(0), \bar{y}(0)) + \varepsilon^2v_2(\bar{x}(0), \bar{y}(0))$$

$$+ \varepsilon^3v_3(\bar{x}(0), \bar{y}(0)) + \varepsilon^4\ldots \qquad (19)$$

Наиболее просто $\bar{x}(0)$, $\bar{y}(0)$ выражаются через x_0, y_0, если удерживать только слагаемые с ε в первой степени

$$\bar{x}(0) \approx x_0 - \varepsilon u_1(x_0, y_0), \quad \bar{y}(0) \approx y_0 - \varepsilon v_1(x_0, y_0).$$

Известно [8], что в четвертом приближении метода усреднения в решении (17) системы (10) следует удерживать члены до ε^3 включительно.

При решении системы уравнений (14) в стандартной форме (15) ограничимся третьим приближением метода усреднения. Решение имеет вид [9]

$$x = x + qu_1(t,\bar{x}) + q^2u_2(t_1,\bar{x}) + q^3u_3(t,\bar{x}) + q^4\ldots, \qquad (20)$$

где новая переменная находится из уравнения

$$\dot{x} = qA_1(\bar{x}) + q^2A_2(\bar{x}) + q^3A_3(\bar{x}) + q^4\ldots \qquad (21)$$

Из формулы (20) следует выражение, связывающее x_0 и $\bar{x}(0)$,

$$x_0 = \bar{x}(0) + qu_1(0, \bar{x}(0)) + q^2u_2(0, \bar{x}(0)) + q^3\ldots \qquad (22)$$

В третьем приближении метода усреднения в решении x (19) учитываются слагаемые с q и q^2.

2. Решение уравнения Матье в 1–4-й областях резонанса

При резонансе $a \approx 1$ решается система уравнений (4), (5). Тогда в (10) $x = (b, \theta_1 = \phi_1)$, $y = (\phi_2, \phi_3)$ — быстрые фазы. В результате получим систему уравнений (18) для средних

$$\dot{\bar{b}} = 0.5r_1\bar{b}\sin\bar{\theta}_1, \;\; \dot{\bar{\theta}}_1 = r_1\cos\bar{\theta}_1 + s_1, \;\; \dot{\bar{\phi}}_2 = \dot{\bar{\theta}}_1 + 4, \;\; \dot{\bar{\phi}}_3 = 2, \qquad (23)$$

где

$$r_1 = \frac{q}{2\sqrt{a}} - \frac{q^3}{128}\,\frac{2a\sqrt{a} + 6a + 3\sqrt{a} + 3}{a\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)^3},$$

$$\bar{s}_1 = 2(\sqrt{a} - 1) - \frac{q^2}{16a(\sqrt{a}+1)}$$

$$+ \frac{q^4}{1024}\,\frac{3a^2 + 17a\sqrt{a} + 39a + 42\sqrt{a} + 20}{a^2(\sqrt{a}+1)^3(\sqrt{a}+2)}. \qquad (24)$$

При резонансах $a \approx 4$, $a \approx 9$, $a \approx 16$ решаются системы (4), (7), (5) или (4), (8), (5), или (4), (9), 5 соответственно. Тогда в (10) $x = (b, \theta_{2,3,4})$, $y = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$. В результате при $a \approx 4$ получается система уравнений (18) для средних в виде

$$\dot{\bar{b}} = 0.5r_2\bar{b}\sin\bar{\theta}_1, \quad \dot{\bar{\theta}}_2 = r_2\cos\bar{\theta}_2 + s_2,$$

$$\dot{\bar{\phi}}_1 = \dot{\bar{\theta}}_2 + 2, \quad \dot{\bar{\phi}}_2 = \dot{\bar{\theta}}_2 + 6, \quad \dot{\bar{\phi}}_3 = 2, \qquad (25)$$

где

$$r_2 = \frac{q^2}{8a} + \frac{q^4}{768}\,\frac{2a^2\sqrt{a} + 4a^2 - 11a\sqrt{a} - 10a + 15\sqrt{a} + 18}{a^2(\sqrt{a}+2)(a-1)^2},$$

$$s_2 = 2(\sqrt{a}-2) - \frac{q^2}{8\sqrt{a}(a-1)}$$

$$+ \frac{q^4}{512}\,\frac{2a^3 + 8a^2\sqrt{a} - 5a^2 - 22a\sqrt{a} - 3a + 6\sqrt{a} + 2}{a^2(\sqrt{a}+2)(a-1)^3}. \tag{26}$$

В случае резонанса $a \approx 9$ получается система уравнений (18) для средних

$$\dot{\bar{b}} = 0.5 r_3 \bar{b} \sin\bar{\theta}_3, \quad \dot{\bar{\theta}}_3 = r_3 \cos\bar{\theta}_3 + s_3,$$

$$\dot{\bar{\phi}}_1 = \dot{\bar{\theta}}_3 + 4, \quad \dot{\bar{\phi}}_2 = \dot{\bar{\theta}}_3 + 8, \quad \dot{\bar{\phi}}_3 = 2, \tag{27}$$

где

$$r_3 = \frac{q^3}{128}\,\frac{2\sqrt{a}+3}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)},$$

$$s_3 = 2(\sqrt{a}-3) - \frac{q^2}{8\sqrt{a}(a-1)} - \frac{q^4}{512}\,\frac{15a^2 - 35a + 8}{a\sqrt{a}(a-4)(a-1)^3}. \tag{28}$$

Наконец, при резонансе $a \approx 16$ имеем систему

$$\dot{\bar{b}} = 0.5 r_4 \bar{b} \sin\bar{\theta}_4, \quad \dot{\bar{\theta}}_4 = r_4 \cos\theta_4 + \bar{s}_4,$$

$$\dot{\bar{\phi}}_1 = \dot{\bar{\theta}}_4 + 6, \quad \dot{\bar{\phi}}_2 = \dot{\bar{\theta}}_4 + 10, \quad \dot{\bar{\phi}}_3 = 2, \tag{29}$$

где

$$r_4 = -\frac{q^4}{1536}\,\frac{2a\sqrt{a} + 7a + 3\sqrt{a} - 12}{a^2(a-1)(\sqrt{a}+2)},$$

$$\bar{s}_4 = 2(\sqrt{a}-4) - \frac{q^2}{8\sqrt{a}(a-1)} - \frac{q^4}{512}\,\frac{15a^2 - 35a + 8}{a\sqrt{a}(a-4)(a-1)^3}. \tag{30}$$

В системах (23), (25), (27), (29) уравнение для медленной фазы $\bar{\theta}_l$ является независимым (не содержит $\bar{b}$). При изучении группировки представляет интерес поведение этой фазы в зависимости от t. Проинтегрируем уравнение

$$\dot{\bar{\theta}}_l = r_l \cos\bar{\theta}_l + s_l, \quad l = 1, \ldots, 4. \tag{31}$$

Вид решения зависит от соотношения между коэффициентами n_l и s_l [10].

Пусть $r_l^2 = s_l^2$. Тогда, если $r_l = s_l$, общий интеграл этих уравнений имеет вид

$$\operatorname{tg}\frac{\bar{\theta}_l}{2} = n_l t + C_l, \tag{32}$$

где C_l — произвольная константа интегрирования, которая находится из начального (при $t = 0$) условия

$$\bar{\theta}_l = \bar{\theta}_l(0) = 2\bar{\psi}(0) \tag{33}$$

и равна

$$C_l = \operatorname{tg}\frac{\bar{\theta}_l(0)}{2}. \tag{34}$$

С помощью (32) получаем

$$\sin\bar{\theta}_l = 2\frac{r_l t + C_l}{1 + (r_l t + C_l)^2}, \quad \cos\bar{\theta}_l = \frac{1 - (r_l t + C_l)^2}{1 + (r_l t + C_l)^2}. \tag{35}$$

Уравнение (31) имеет частное решение

$$\bar{\theta}_l = (1 + 2m)pi, \quad m \in Z. \tag{36}$$

Условие $r_l = s_l$, если учесть (24), (26), (28), (30) является алгебраическим уравнением, связывающим a и q. Решение этого уравнения в виде ряда по степеням q имеет вид

$$a = a_{s1} = 1 + \frac{q}{2} - \frac{q^2}{32} - \frac{q^3}{512} - \frac{q^4}{24\,576} \tag{37}$$

при $l = 1$ (резонанс $a \approx 1$),

$$a = a_{s2} = 4 - \frac{q^2}{48} + \frac{5q^4}{221\,184} \tag{38}$$

при $l = 2$ (резонанс $a \approx 4$),

$$a = a_{s3} = 9 + \frac{q^2}{64} + \frac{q^3}{512} + \frac{13q^4}{327\,680} \tag{39}$$

при $l = 3$ (резонанс $a \approx 9$),

$$a = a_{s4} = 16 + \frac{q^2}{120} - \frac{317q^4}{13\,824\,000} \tag{40}$$

при $l = 4$ (резонанс $a \approx 16$).

Формулы (37)–(40) совпадают с известными разложениями собственных значений a_{sl} [7]. Они описывают одну из двух границ l-й области неустойчивости.

Если $r_l = -s_l$, то общий интеграл уравнения (31) определяется выражением

$$\operatorname{ctg}\frac{\bar{\theta}_l}{2} = r_l t + D_l, \tag{41}$$

где D_l — произвольная константа, которая, согласно начальному условию (33), равна

$$D_l = \operatorname{ctg}\frac{\bar{\theta}_l(0)}{2}. \tag{42}$$

Используя (41), получим

$$\sin\bar{\theta}_l = 2\frac{r_l t + D_l}{1 + (r_l t + D_l)^2}, \quad \cos\bar{\theta}_l = \frac{(r_l t + D_l)^2 - 1}{(r_l t + D_l)^2 + 1}. \tag{43}$$

Частное решение уравнения (13) равно

$$\bar{\theta}_l = 2\pi m, \quad m \in Z. \tag{44}$$

Решением уравнения $r_l = -s_l$ являются ряды:

$$a = a_{c1} = 1 - \frac{q}{2} - \frac{q^2}{32} + \frac{q^3}{512} - \frac{q^4}{24\,576} \tag{45}$$

при $l = 1$,

$$a = a_{c2} = 4 + \frac{5q^2}{48} - \frac{763q^4}{221\,184} \tag{46}$$

при $l = 2$,

$$a = a_{c3} = 9 + \frac{q^2}{64} - \frac{q^3}{512} + \frac{13q^4}{327\,680} \tag{47}$$

при $l = 3$,

$$a = a_{c4} = 16 + \frac{q^2}{120} + \frac{433q^4}{13\,824\,000} \tag{48}$$

при $l = 4$.

Формулы (45)−(48) совпадают с известными разложениями собственных значений a_{al} [7]. Они дают вторую границу l-й области неустойчивости.

Пусть теперь $r_l^2 > s_l^2$. Общий интеграл уравнения (31) равен

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\bar{\theta}_l}{2} + \delta_l}{\operatorname{tg}\frac{\bar{\theta}_l}{2} - \delta_l} = E_l e^{2\mu_l t}, \tag{49}$$

где константа интегрирования E_l определяется из начального условия (33)

$$E_l = \frac{\operatorname{tg}, \frac{\bar{\theta}_l(0)}{2} + \delta_l}{\operatorname{tg}\frac{\bar{\theta}_l(0)}{2} - \delta_l}. \tag{50}$$

В формулах (49), (50) введены обозначения: $\delta_l = \sqrt{r_l^2 - s_l^2}/(r_l - s_l)$, $\mu_l = 0.5\sqrt{r_l^2 - s_l^2}$.

Уравнения (31) имеет также постоянные частные решения

$$\bar{\theta}_l = \pm\arccos(-\gamma_l) + 2\pi m,\ m \in Z, \tag{51}$$

$\gamma_l = s_l/r_l$. Условие устойчивости этих решений следует из уравнения в вариациях для уравнения (31) и имеет вид: $r_l \sin\bar{\theta}_l > 0$. Значит, при $r_l > 0$ устойчивым является решение (51), взятое со знаком плюс, поскольку при этом $\sin\bar{\theta}_l > 0$, при $r_l < 0$ — со знаком минус, так как тогда $\sin\bar{\theta}_l < 0$.

Из (49) следует выражение

$$\operatorname{tg}\frac{\bar{\theta}_l}{2} = \delta_l \frac{q_l(t) + 1}{g_l(t) - 1}, \tag{52}$$

что дает

$$\sin\bar{\theta}_l = \frac{2\mu_l}{r_l}\frac{q_l^2(t) - 1}{q_l^2(t) + 2\gamma_l q_l(t) + 1},$$

$$\cos\bar{\theta}_l = -\frac{\gamma_l q_l^2(t) + 2g_l(t) + \gamma_l}{g_l^2(t) + 2\gamma_l g_l(t) + 1}, \tag{53}$$

где обозначено

$$g_l(t) = E_l e^{2\mu_l t}. \tag{54}$$

Пусть, наконец, $r_l^2 < s_l^2$. Тогда общий интеграл уравнения (31) получается в виде

$$\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{\bar{\theta}_l}{2}}{\delta_l'} = \upsilon_l t + F_l, \tag{55}$$

где обозначено $\delta_l' = \sqrt{s_l^2 - r_l^2}/(s_l - r_l)$, $\upsilon_l = 0.5\sqrt{s_l^2 - r_l^2}$. Константа F_l находится из начального условия (33)

$$F_l = \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{\bar{\theta}_l(0)}{2}}{\delta_l'}. \tag{56}$$

Из выражения (55) следует формула

$$\operatorname{tg}\frac{\bar{\theta}_l}{2} = \delta_l' \operatorname{tg}(\upsilon_l t + F_l), \tag{57}$$

что позволяет записать

$$\sin\bar{\theta}_l = 2\frac{\delta_l' \operatorname{tg}(\upsilon_l t + F_l)}{1 + (\delta_l')^2 \operatorname{tg}^2(\upsilon_l t + F_l)},$$

$$\cos\bar{\theta}_l = \frac{1 - (\delta_l')^2 \operatorname{tg}^2(\upsilon_l t + F_l)}{1 + (\delta_l')^2 \operatorname{tg}^2(\upsilon_l t + F_l)}. \tag{58}$$

Вычислим теперь амплитуду $\bar{b}$. Как следует из формул (23), (25), (27), (29), системы уравнений для усредненных медленных переменных $\bar{b}$, $\bar{\theta}_l (l = 1, \ldots, 4)$, отличаются только коэффициентами. Поэтому рассмотрим систему для произвольного l

$$\dot{\bar{b}} = 0.5r\bar{b}\sin\bar{\theta}, \quad \dot{\bar{\theta}} = r\cos\bar{\theta} + s. \tag{59}$$

Она имеет аналитическое решение. Действительно, из (59) следует интеграл

$$\cos\bar{\theta} = \frac{C}{\bar{b}^2} - \frac{s}{r}, \tag{60}$$

где C — постоянная интегрирования, которая определяется при начальных значениях $\bar{\theta}(0)$, $\bar{b}(0)$ и имеет вид

$$C = \bar{b}(0)^2\left[\cos\bar{\theta}(0) + \frac{s}{r}\right]. \tag{61}$$

Дифференцируя уравнение для $\bar{b}$ (59) по t и используя интеграл (60), можно получить нелинейное уравнение консервативного осциллятора для $\bar{b}$. Однако если в (59) перейти к переменной $w = \bar{b}^2$, то для w уравнение осциллятора оказывается линейным. Оно имеет вид

$$\ddot{w} + (s^3 - r^2)w = rsC \tag{62}$$

и интегрируется с начальными условиями

$$w(0) = \bar{b}(0)^2, \quad \dot{w}(0) = rw(0)\sin\bar{\theta}(0). \tag{63}$$

Рассмотрим решение уравнения (62) при различных соотношениях между параметрами r, s. Если $r = s$, то с учетом формул (61), (63) получим решение при произвольных начальных условиях

$$w = \bar{b}^2 = w(0)\left[0.5r^2(1 + \cos\bar{\theta}(0))t^2 + r\sin\bar{\theta}(0)t + 1\right]. \tag{64}$$

В частности, при $\bar{\theta}(0) = \pm\pi$ из (64) получим решение $w(t) = w(0)$, которое соответствует постоянной амплитуде $\bar{b}(t) = \bar{b}(0)$. Из формул (60), (61) видно, что постоянной является также фаза $\bar{\theta}(t) = \bar{\theta}(0)$. Отметим, что такое постоянное решение следует уже из системы (59). Можно показать, что оно приводит к известным функциям Матье $se_l(t, q)$, $l = 1, \ldots, 4$ [7]. При $\bar{\theta}(0) \neq \pm\pi$ получим возрастающее решение (64), которое приводит к известному непериодическому решению Айнса $z(t)$ на характеристических кривых a_{sl}.

Если $r = -s$, то с учетом (61), (63) получаем решение уравнения (62) в виде

$$w = \overline{b}^2 = w(0)[0.5r^2(1-\cos\overline{\theta}(0))t^2 + r\sin\overline{\theta}(0)t + 1]. \tag{65}$$

Постоянное решение $w(t) = w(0)$, $\overline{\theta}(t) = \overline{\theta}(0)$ имеем здесь при $\overline{\theta}(0) = 0, 2\pi$. Можно показать, что оно приводит к известным функциям Матье $ce_l(t, q) l = \underline{1}, \ldots 4$ [7]. При $\overline{\theta}(0) \neq 0$ имеем возрастающее решение $\overline{b}(t)$, которое приводит к непериодическому решению Айнса $z(t)$ на характеристических кривых a_{cl}.

Пусть теперь $s^2 - r^2 < 0$. Тогда решение уравнения (62) с начальными условиями (63) имеет вид

$$w = \overline{b}^2 = w(0)\left[\frac{\gamma\cos\overline{\theta}(0)+1}{1-\gamma^2}\mathrm{ch}(2\mu t) + \frac{r}{2\mu}\sin\overline{\theta}(0)\mathrm{sh}(2\mu t) - \frac{\gamma(\cos\overline{\theta}(0)+\gamma)}{1-\gamma^2}\right], \tag{66}$$

где обозначено

$$\gamma = s/r, \quad \mu = 0.5\sqrt{r^2 - s^2}. \tag{67}$$

Формула (66) описывает медленное изменение амплитуды в областях неустойчивости. При больших t имеем экспоненциальный рост $\overline{b}$ с показателем μ(67). Отметим, что если при выбранных a, q начальное значение $\overline{\theta}(0)$ удовлетворяет условию

$$\frac{\gamma\cos\overline{\theta}(0)+1}{1-\gamma^2} + \frac{r\sin\overline{\theta}(0)}{2\mu} = 0,$$

то в w (66) отсутствует растущая экспонента, и получим ранее неизвестное неустойчивое, по Ляпунову, затухающее решение $z(t)$.

Пусть, наконец, $s^2 - r^2 > 0$. Тогда из уравнения (62) следует периодическое решение

$$w = \overline{b}^2 = w(0)\left[\frac{\gamma\cos\overline{\theta}(0)+1}{1-\gamma^2}\cos(2\nu t) + \frac{r}{2\nu}\sin\overline{\theta}(0)\sin(2\nu t) - \frac{\gamma(\cos\overline{\theta}(0)+\gamma)}{1-\gamma^2}\right], \tag{68}$$

где $\nu = 0.5\sqrt{s^2 - r^2}$ — частота медленных колебаний, а γ определяется формулой (67). Это решение справедливо в областях устойчивости, примыкающих к границам a_{cl}, a_{sl}.

Далее запишем функции $u_{1,2}$ и $v_{1,2}$, которые в формулах (17) описывают быстрые колебания амплитуды и фаз. Более громоздкие выражения u_3, v_3 здесь не приводятся. При резонансе $a \approx 1$ $(l = 1)$ эти функции равны

$$u_1^1 = -\overline{b}\frac{\cos\overline{\phi}_2}{w^1}, \; u_1^2 = v_1^1 = 2\left(\frac{\sin\overline{\phi}_2}{w^1} + \sin\overline{\phi}_3\right), \; v_1^2 = 0,$$

$$u_2^1 = -\overline{b}\left[\cos\overline{\theta}_1\cos\overline{\phi}_3 + \frac{\cos(2\overline{\phi}_2)}{4(\omega^1)^2} + \frac{\cos(\overline{\phi}_2+\phi_3)}{\omega^1+2} - \frac{\cos(\overline{\phi}_2-\overline{\phi}_3)}{\omega^1-2}\right], \tag{69}$$

$$u_2^2 = v_1^1 = \frac{\sin(2\overline{\phi}_2)}{(\omega^1)^2} - 4\frac{\sin(2\overline{\phi}_3)}{(\omega^1)^2} + \left(1 - \frac{2}{\omega^1 - 2}\right)\sin(\overline{\phi}_1+\overline{\phi}_3) + \sin(\overline{\phi}_1-\overline{\phi}_3) + 2\frac{\sin(\overline{\phi}_2+\overline{\phi}_3)}{\omega^1+2}, \quad v_2^2 = 0,$$

где $\omega^1 = 2(\sqrt{a}+1)$.

При резонансе $a \approx 4$ $(l = 2)$

$$u_1^1 = -\overline{b}\left(\frac{\cos\overline{\phi}_1}{\omega^1} + \frac{\cos\overline{\phi}_2}{\omega^2}\right),$$

$$u_1^2 = v_1^1 = v_1^2 = 2\left(\frac{\sin\overline{\phi}_1}{\omega^1} + \frac{\sin\overline{\phi}_2}{\omega^2} + \sin\overline{\phi}_3\right),$$

$$v_1^3 = 0,$$

$$u_2^1 = -\overline{b}\left[\frac{\cos(2\overline{\phi}_1)}{4(\omega^1)^2} + \frac{\cos(2\overline{\phi}_2)}{4(\omega^2)^2} + \frac{\cos(\overline{\phi}_1+\overline{\phi}_2) - 3\cos(2\overline{\phi}_3)}{2\omega^1\omega^2} + \frac{\cos(\overline{\phi}_2+\overline{\phi}_3)}{\omega^2+2}\right], \tag{70}$$

$$u_2^2 = v_2' = v_2^2 = \frac{\sin(2\varphi_1)}{(\omega^1)^2} + \frac{\sin(2\overline{\phi}_2)}{(\omega^2)^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega^1} + \frac{1}{\omega^2}\right)\sin(2\overline{\phi}_3) + 2\frac{\sin(\overline{\phi}_1+\overline{\phi}_2)}{\omega^1\omega^2} + 2\frac{\sin(\overline{\phi}_2+\overline{\phi}_3)}{\omega^2+2}, \; v_2^3 = 0, \tag{70}$$

где $\omega^1 = 2(\sqrt{a}-1)$, $\omega^2 = 2(\sqrt{a}+1)$.

При резонансе $a \approx 9$ $(l = 3)$ функции u_1^1, $u_1^2 = v_1^1 = v_1^2$, v_1^3 совпадают с этими функциями в (70),

$$v_2^1 = -\overline{b}\left[\frac{\cos(2\overline{\phi}_1)}{4(\omega^1)^2} + \frac{\cos(2\overline{\phi}_2)}{4(\omega^2)^2} - \frac{3\cos(2\overline{\phi}_3) - \cos(\overline{\phi}_1+\overline{\phi}_2)}{2\omega^1\omega^2} - \frac{\cos(\overline{\phi}_1-\overline{\phi}_3)}{\omega^1-2} + \frac{\cos(\overline{\phi}_2+\overline{\phi}_3)}{\omega^2+2}\right], \tag{71}$$

$$u_2^2 = v_2' = v_2^2 = \frac{\sin(2\overline{\phi}_1)}{(\omega^1)^2} + \frac{\sin(2\overline{\phi}_2)}{(\omega^2)^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega^1} + \frac{1}{\omega^2}\right)\sin(2\overline{\phi}_3) + 2\frac{\sin(\overline{\phi}_1+\overline{\phi}_2)}{\omega^1\omega^2} - 2\frac{\sin(\overline{\phi}_1-\overline{\phi}_3)}{\omega^1-2} + 2\frac{\sin(\overline{\phi}_2+\overline{\phi}_3)}{\omega^2+2},$$

$$v_2^3 = 0,$$

где опять-таки $\omega^1 = 2(\sqrt{a}-1)$, $\omega^2 = 2(\sqrt{a}+1)$.

При резонансе $a \approx 16$ $(l = 4)$ функции u_1^1, $u_1^2 = v_1^1 = v_1^2$, v_1^3 совпадают с этими функциями в (70), функции u_2^1, $u_2^2 = v_2^1 = v_2^3$ такие же, как в (71). Полученные формулы используются далее при вычислении решения (2) уравнения (1).

3. Амплитуда, фаза и решение $z(t)$ с учетом быстрых колебаний

Из формул (17) следует выражение для амплитуды $b(t)$

$$b(t) = \bar{b}(t) + \varepsilon u_1^1 + \varepsilon^2 u_2^1 + \varepsilon^3 u_3^1 + \varepsilon^4 \ldots, \qquad (72)$$

где первое слагаемое $b(t)$ — ее медленно меняющаяся составляющая, квадрат которой при $l = 1, \ldots, 4$ на границах областей неустойчивости определяется выражениями (64), (65), в областях неустойчивости — выражением (66) и в областях устойчивости вблизи границ — формулой (68). Последующие слагаемые в (72) дают быстрые колебания амплитуды. В зависимости от l функции $u_{1,2}^1$ определяются формулами разд. 2 Чтобы выразить эти функции через t, используем формулы для фаз при различных l: $\bar{\phi}_1 = \bar{\theta}_1$, $\bar{\phi}_2 = \bar{\theta}_1 + 4t$, если $l = 1$; $\bar{\varphi}_1 = \bar{\theta}_2 + 2t$, $\bar{\phi}_2 = \bar{\theta}_2 + 6t$, если $l = 2$; $\bar{\phi}_1 = \bar{\theta}_3 + 4t$, $\bar{\phi}_2 = \bar{\theta}_3 + 8t$ при $l = 3$ и $\bar{\phi}_1 = \bar{\theta}_4 + 6t$, $\bar{\phi}_2 = \bar{\theta} + 10t$ при $l = 4$. Во всех случаях $\bar{\phi}_3 = 2t$. Эти формулы позволяют записать в $u_{1,2,3}^1$ все комбинационные фазы через t и $\bar{\theta}_t$. Возникающие при этом функции $\cos\bar{\theta}_l = \alpha_l(t)$ и $\sin\bar{\theta}_l = \beta_l(t)$, в свою очередь, выражаются через t соответственно по формулам (60) и

$$\beta_l(t) = \sin\bar{\theta}_l = \frac{\dot{w}(t)}{r_l w(t)}. \qquad (73)$$

Эта зависимость следует из первого выражения (59).

Приведем здесь формулы для амплитуды $b(t)$, удерживая слагаемые с $\varepsilon(6)$ в первой степени. Более громоздкие выражения с учетом слагаемых $\sim \varepsilon^2$, ε^3 здесь не приводятся. При $l = 1$ $(a \approx 1)$

$$b(t) = \bar{b}(t)\left[1 - q\,\frac{\alpha_1\cos(4t) - \beta_1\sin(4t)}{8\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)}\right]. \qquad (74)$$

При резонансах $l = 2, 3, 4$ $(a \approx 4, 9, 16)$

$$b(t) = \bar{b}(t)\left\{1 - \frac{q}{8\sqrt{a}}\left[\frac{\alpha_l\cos((2l-2)t) - \beta_l\sin((2l-2)t)}{\sqrt{a}-1}\right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\alpha_l\cos((2l+2)t) - \beta_l\sin((2l+2)t)}{\sqrt{a+1}}\right]\right\}. \qquad (75)$$

В решении $z(t)(2)$ фазой является $\psi(t)$. Вычислим $\cos\psi$. Поскольку $\psi = \theta_l/2 + lt$ $(l = 1, \ldots, 4)$, то с учетом разложения (17) для θ_l функцию $\cos\psi$ представим в виде ряда по степеням ε

$$\cos\psi = \cos\left(\frac{\bar{\theta}_l}{2} + lt\right) - \frac{\varepsilon}{2}u_1^2\sin\left(\frac{\bar{\theta}_l}{2} + lt\right)$$
$$- \frac{\varepsilon^2}{2}\left[u_2^2\sin\left(\frac{\bar{\theta}_l}{2} + lt\right) + \frac{(u_1^2)^2}{4}\cos\left(\frac{\bar{\theta}_l}{2} + lt\right)\right]$$
$$- \frac{\varepsilon^3}{2}\left[\left(u_3^2 - \frac{(u_1^2)^3}{24}\right)\sin\left(\frac{\bar{\theta}_l}{2} + l\right)\right.$$
$$\left. + \frac{u_1^2u_2^2}{2}\cos\left(\frac{\bar{\theta}_l}{2} + lt\right)\right] + \varepsilon^4\ldots \qquad (76)$$

Функции $u_{1,2}^2$ для различных значений l содержатся в разд. 2. Чтобы выразить эти функции через t, используем формулы для фаз: $\bar{\phi}_1 = \bar{\theta}_l + 2(l-1)t$, $\bar{\phi}_2 = \bar{\theta}_l + 2(l+1)t$ $(l = 1, \ldots, 4)$. Тригонометрические функции половинного аргумента $\bar{\theta}_l/2$ записываются через $\alpha_l(60)$ в виде

$$\cos\frac{\bar{\theta}_l}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\alpha_l(t)}{2}}, \quad \sin\frac{\bar{\theta}_l}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\alpha_l t}{2}}. \qquad (77)$$

В свою очередь, эти функции позволяют по известным тригонометрическим формулам записать

$$\cos\frac{3\bar{\theta}_l}{2} = 4\cos^3\frac{\bar{\theta}_l}{2} - 3\cos\frac{\bar{\theta}_l}{2},\ \sin\frac{3\bar{\theta}_l}{2} = 3\sin\frac{\bar{\theta}_l}{2} - 4\sin^3\frac{\bar{\theta}_l}{2},$$

а также выражения для $\cos(5\bar{\theta}_l/2)$, $\sin(5\bar{\theta}_l/2)$ и т.д. Отметим, что при использовании формул (77) знаки тригонометрических функций при $t = 0$ берутся в соответствии с начальным условием (11), (19). Затем, поскольку, согласно уравнению для $\bar{\theta}_l$ (59), фаза $\bar{\theta}_l/2$ изменяется монотонно с ростом t, следует поменять знак функции на противопложный при переходе ее через нулевое значение.

Приведем здесь выражения для $\cos\psi$ (76) с учетом слагаемых $\sim \varepsilon$. Для $l = 1$ получим

$$\cos\psi = \cos\left(t + \frac{\bar{\theta}_1}{2}\right) - \frac{q}{8\sqrt{a}}\left[\cos\left(t - \frac{\bar{\theta}_1}{2}\right)\right.$$
$$- \left(1 - \frac{1}{2(\sqrt{a}+1)}\right)\cos\left(3t + \frac{\bar{\theta}_1}{2}\right)$$
$$\left. - \frac{1}{2(\sqrt{a}+1)}\cos\left(5t + \frac{3\bar{\theta}_1}{2}\right)\right]. \qquad (78)$$

Для $l = 2, 3, 4$

$$\cos\psi = \cos\left(lt + \frac{\bar{\theta}_l}{2}\right) - \frac{q}{8\sqrt{a}}\left[\left(1 + \frac{1}{2(\sqrt{a}-1)}\right)\right.$$
$$\times\cos\left((l-2)t + \frac{\bar{\theta}_l}{2}\right) - \left(1 - \frac{1}{2(\sqrt{a}+1)}\right)\cos\left((l+2)t + \frac{\bar{\theta}_l}{2}\right)$$
$$- \frac{1}{2(\sqrt{a}-1)}\cos\left((3l-2)t + \frac{3\bar{\theta}_l}{2}\right)$$
$$\left. - \frac{1}{2(\sqrt{a}+1)}\cos\left((3l+2)t + \frac{3\bar{\theta}_l}{2}\right)\right]. \qquad (79)$$

Согласно формуле (2), решение уравнения (1) получается перемножением функций (72) и (76). В результате с учетом слагаемых до $\sim \varepsilon^3$ включительно находим

$$
\begin{aligned}
z =&\bar{b}\cos\left(lt+\frac{\bar{\theta}_l}{2}\right)+\varepsilon\left[u_1^1\cos\left(lt+\frac{\bar{\theta}_l}{2}\right)\right.\\
&\left.-\frac{\bar{b}u_1^2}{2}\sin\left(lt+\frac{\bar{\theta}_l}{2}\right)\right]+\varepsilon^2\left[\left(v_2^1-\frac{b(u_1^2)^2}{}\right)\right.\\
&\left.\times\cos\left(lt+\frac{\bar{\theta}_l}{2}\right)-\frac{1}{2}(u_1^1u_1^2+bu_2^2)\sin\left(lt+\frac{\bar{\theta}_l}{2}\right)\right]\\
&+\varepsilon^3\left[\left(u_3^1-\frac{u_1^1(u_1^2)^2}{8}-\frac{\bar{b}u_1^2u_2^2}{4}\right)\cos\left(lt+\frac{\bar{\theta}_l}{2}\right)\right.\\
&-\frac{1}{2}\left(u_1^2u_2^1+u_1^1u_2^2+\bar{b}\left(u_3^2-\frac{(u_1^2)^3}{24}\right)\right)\\
&\left.\times\sin\left(lt+\frac{\bar{\theta}_l}{2}\right)\right]+\varepsilon^4\ldots,\quad l=1,\ldots,4.
\end{aligned}
\tag{80}
$$

Здесь $\bar{b}$ вычисляется на границах областей неустойчивости по формулам (64), (65), в областях неустойчивости — по формуле (66), в областях устойчивости вблизи указанных границ — по формуле (68). Функции $u_{1,2}^{1,2}$ вычисляются, как указано в разд. 2. Приведем здесь выражение $z(t)$, ограничиваясь в (80) слагаемым $\sim \varepsilon$. Если $l=1$ $(a\approx 1)$, получим

$$
\begin{aligned}
z(t) =&\bar{b}(t)\left\{\cos\left(t+\frac{\bar{\theta}_1}{2}\right)-\frac{q}{8\sqrt{a}}\left[\cos\left(t-\frac{\bar{\theta}_1}{2}\right)\right.\right.\\
&\left.\left.-\left(1-\frac{1}{\sqrt{a}+1}\right)\cos\left(3t+\frac{\bar{\theta}_1}{2}\right)\right]\right\}.
\end{aligned}
\tag{81}
$$

Если $l=2,3,4(a\approx 4,9,16)$,

$$
\begin{aligned}
z(t) =& \bar{b}(t)\left\{\cos\left(lt+\frac{\bar{\theta}_l}{2}\right)\right.\\
&\left.-\frac{q}{8}\left[\frac{\cos\left((l-2)t+\frac{\bar{\theta}_l}{2}\right)}{\sqrt{a}-1}-\frac{\cos\left((l+2)t+\frac{\bar{\theta}_l}{2}\right)}{\sqrt{a}+1}\right]\right\}.
\end{aligned}
\tag{82}
$$

Отметим, что формулу (81) можно получить также перемножением выражений (74) и (78). Аналогично, формула (82) получается перемножением (75) и (79).

Из выражений (81), (82) видно, что амплитуды колебаний всех составляющих решения $z(t)$ изменяются по закону $b(t)$. Колебания модулированы по частоте по закону $\bar{\theta}_l/2$. Согласно формулам (66), (68), (81), (82), колебания имеют вид биений. Простыми вычислениями можно получить более громоздкие выражения $z(t)$ с учетом членов $\sim \varepsilon^2$, ε^3.

4. Физический механизм группировки

Убедимся в наличии биений колебаний в решении уравнения Матье и путем анализа биений установим механизм группировки осцилляторов с различными начальными фазами. Для этого решение уравнение (1) вблизи резонанса $a=1$ при $0<q\ll 1$ ищем в виде разложения по степеням q, т.е. $z=z^{(0)}+qz^{(1)}+q^2\ldots$, с начальными условиями при $t=0$: $z^{(0)}(0)=z(0)=z_0$, $\dot{z}^0(0)=\dot{z}(0)=\dot{z}_0$, $z^{(1)}(0)\dot{z}^1(0)=0$. После подстановки этого разложения в уравнение (1) приходим к системе линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами для $z^{(0)}$, $z^{(1)}$. Решение системы имеет вид

$$
\begin{aligned}
z^{(0)} =& z_m\cos(\omega_0 t+\chi),\\
z^{(1)} =& \frac{z_m}{8}\left[-\left(\frac{1}{\Delta}+\frac{1}{\Delta_1}\right)\cos\chi\cos(\omega_0 t)\right.\\
&+\frac{1}{\omega_0}\left(\frac{1}{\Delta_1}-\frac{1}{\Delta}\right)\sin\chi\sin(\omega_0 t)+\frac{1}{\Delta}\cos\left((2-\omega_0)t-\chi\right)\\
&\left.+\frac{1}{\Delta_1}\cos\left((2+\omega_0)t+\chi\right)\right],
\end{aligned}
$$

где $z_m=\sqrt{z_0^2+(\dot{z}_0/\omega_0)^2}$, $\operatorname{tg}\chi=-\dot{z}_0/(\omega_0 z_0)$, $\Delta=1-\omega_0$, $\Delta_1=1=\omega_0$. Вблизи резонанса $a=1$ справедливо неравенство $|\Delta|\ll 1$, поэтому в $z^{(1)}$ оставим только слагаемые $\sim 1/\Delta$. Отметим, что в решении z при $\omega_0\approx 1$ происходят биения колебаний с близкими частотами ω_0 и $2-\omega_0$. При этом амплитуды этих колебаний имеют один порядок величин, поскольку в $qz^{(1)}$ отношение $q/|\Delta|\sim 1$. Складывая колебания, получаем

$$
z=Z_m\cos(\omega_0 t+\Theta),
$$

где

$$
\begin{aligned}
Z_m =& z_m\Big\{1+2\alpha\left[\cos(2\Delta t-2\chi)-\cos(2\chi)\right]\\
&+2\alpha^2\left[1-\cos(2\Delta t)\right]\Big\}^{1/2},
\end{aligned}
$$

$$
\operatorname{tg}\Theta=\frac{(1+\alpha)\sin\chi+\alpha\sin(2\Delta t-\chi)}{(1-\alpha)\cos\chi+\alpha\cos(2\Delta t-\chi)}.
$$

Здесь обозначено $\alpha=q/(8\Delta)$.

Слагаемое Θ в фазе колебаний функции z дает медленное периодическоке с частотой Δ приращение фазы, зависящее от начальной фазы χ осциллятора. Мгновенное малое приращение к частоте ω_0 получается дифференцированием Θ

$$
\dot{\Theta}=\frac{q}{4}\left(\frac{z_m}{Z_m}\right)^2\left[\alpha(1-\cos(2\Delta t))+\cos(2\Delta t-2\chi)\right].
$$

В начальный момент оно равно $\dot{\Theta}(0)=q\cos(2\chi)/4$. В ансамбле первоначально несфазированных осцилляторов $(0\le\chi\le 2\pi)$ имеются частицы как с медленным увеличением частоты колебаний $(\dot{\Theta}(0)>0)$, так и с медленным уменьшением частоты $(\dot{\Theta}(0)<0)$. В результате со временем образуется фазовый сгусток. Из приведенных формул следует, что в интервале начальных значений $0 \le \chi \le 2\pi$ образуются два сгустка. Таким образом, механизм фазовой группировки при параметрическом резонансе и вблизи него объясняется особенностями биений — известного физического явления.

Строгий анализ группировки следует из приведенного выше решения уравнения Матье.

5. Фазовая группировка в областях неустойчивости

В решении $z(2)$ фазой является $\psi(t)$. Поскольку $\psi = \theta_l/2 + lt$ $(l = 1, 2, 3, 4)$, то с учетом разложения (17) для θ_l запишем фазу в виде ряда по степеням ε

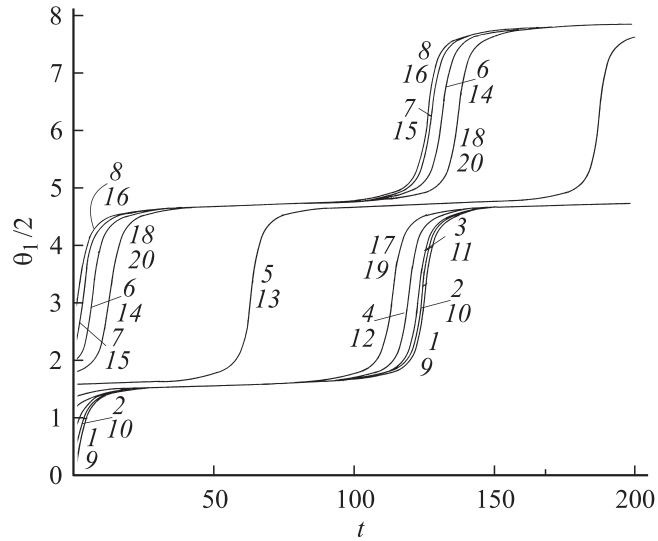
$$\psi = lt + 0.5\overline{\theta}_l + 0.5\varepsilon u_1^2 + 0.5\varepsilon^2 u_2^2 + 0.5\varepsilon^3 u_3^2 + \ldots \quad (83)$$

и рассмотрим закономерности медленных изменений в ψ. Такое изменение существует прежде всего благодаря слагаемому $0.5\overline{\theta}_l$. Кроме того, с использованием медленной фазы $\overline{\theta}_l$ записываются быстрые фазы $\phi_{1,2}$, которые в составе быстрых комбинационных фаз входят в функции $u_{1,2,3}^2$ (69)–(71), описывающие быстрые колебания ψ. Так, при $l = 1$ (резонанс $a \approx 1$) имеем $\phi_2 = \overline{\theta}_1 + 4t$, при $l = 2$ (резонанс $a \approx 4$) быстрые фазы равны $\phi_1 = \overline{\theta}_2 + 2t$, $\phi_2 = \overline{\theta}_2 + 6t$, при $l = 3$ (резонанс $a \approx 9$) они равны $\phi_1 = \overline{\theta}_3 + 4t$, $\phi_2 = \overline{\theta}_3 + 8t$ и при $l = 4$ $(a \approx 16)$ имеем $\phi_1 = \overline{\theta}_4 + 6t$, $\phi_2 = \overline{\theta}_4 + 10t$.

Поведение $\overline{\theta}_l$ в зависимости от t определяется формулами (35), (43), (53), из которых следует, что в переходном режиме на характеристических кривых и в областях неустойчивости медленная фаза от начального значения $\overline{\theta}_l(0)$ стремится при $t \to \infty$ к постоянному предельному значению, не зависящему от начального условия. В частности, из (53) видно, что в областях неустойчивости таким пределом является указанное выше устойчивое постоянное решение $\overline{\theta}_l$ (51). Значит, колебания осцилляторов (1), отличающихся начальными фазами ψ_0, фазируются как в среднем, так и на всех составляющих быстрых колебаний фазы. Причем фазовый сгусток, уплотняясь во времени, стремится к δ-образному. За группировкой не следует разгруппировка. Если осцилляторы первоначально распределены по всем возможным углам $(0 \le \psi_0 \le 2\pi)$, то образуются два фазовых сгустка, отстоящих на π, поскольку функции в выражениях (78), (79) зависят от $\overline{\theta}_l/2$, где $\overline{\theta}_l$ в пределе определяется формулой (51).

6. Группировка в областях устойчивости

В областях устойчивости, примыкающих к характеристическим кривым a_{cl}, a_{sl} $(l = 1, 2, 3, 4)$ функция $\overline{\theta}_l/2$ в выражении (83) является решением тригонометрического уравнения (57)



$$\frac{\overline{\theta}_l}{2} = \operatorname{arctg} \frac{\delta_l'^2 \operatorname{tg}(\nu_l t) + \delta_l' \operatorname{tg}(0.5\overline{\theta}_l(0))}{\delta_l' - \operatorname{tg}(\nu_l t)\operatorname{tg}(0.5\overline{\theta}_l(0))} + m\pi, \quad m \in Z, \quad (84)$$

где $\delta_l' = \sqrt{s_l^2 - r_l^2}/(s_l - r_l)$, $\nu_l = 0.5\sqrt{s_l^2 - r_l^2}$. Разложив функцию (84) в ряд по t и ограничившись линейным слагаемым, получим

$$0.5\overline{\theta}_l = 0.5\overline{\theta}_l(0) + 0.5[s_l + r_l \cos\overline{\theta}_l(0)]t + m\pi, \quad m \in Z. \quad (85)$$

Выражение такой структуры указывает на наличие фазовой группировки частиц с различными $\overline{\theta}(0)$, поскольку оно хорошо известно в электронике СВЧ [11] и описывает там группировку заряженых частиц по плотности в пространстве дрейфа. Величина $0.5r_l t$ в (85) является параметром группировки [11].

Формула (85) описывает изменение $\overline{\theta}_l$ в фазе ψ(83) при малых значениях t. При больших t надо пользоваться выражением (84). Быстрые малые колебания в ψ, которые накладываются на ее медленное изменение, описываются функциями $u_{1,2,3}^2$. На рисунке в качестве примера при $a = 1.47$, $q = 1$ (область устойчивости, примыкающая к границе a_{s1} первой области неустойчивости) построены графики зависимости $0.5\overline{\theta}_1(t)$ для значений начальной фазы (33) осцилляторов (2) $\psi(0) = \overline{\theta}(0) = (n-1)\pi/8$, $n = 1, \ldots, 16$ (кривые *1–16*). Величины $r_1 = 0.405$, $s_1 = 0.408$ вычислялись по формулам (24). При построении кривых по формуле (84), содержащей функцию $\operatorname{arctg} A$, значения m выбирались так, чтобы обеспечивалась монотонность изменения $\overline{\theta}_l(t)$, которая, как указывалось, следует из уравнения для θ_l (59).

Как следует из формулы (84), период функции $\overline{\theta}_1/2$ по $\psi(0)$ равен π, поэтому в случае первоначально несфазированных осцилляторов с $0 \le \psi(0) < 2\pi$ образуются два сгустка с разностью фаз, равной π, что видно также из рисунка. Группировка повторяется по t с периодом π/ν_1, что следует также из формулы (84). Быстрая группировка приводит к образованию долгоживущих (в пределах периода) очень плотных фазовых сгустков. Плотность сгустков увеличивается при приближении к границам областей неустойчивости. Качество сгустков ухудшается лишь за счет частиц, у которых начальные фазы $\psi(0)$ находятся в небольшой окрестности значений $\psi(0) = \pi/2, 3\pi/2$ (кривые *5, 13*). На рисунке изображены графики для таких осцилляторов с $\psi(0) = \pi/2 \mp \pi/16$ (кривые *17, 18* соответственно) и $\psi(0) = 3\pi/2 \mp \pi/16$ (кривые *19, 20* соответственно).

7. Группировка в нулевой области резонанса $a \approx 0$

При решении системы уравнений (14) в стандартной форме (15) получим систему (21) для средних

$$\dot{\bar{\varphi}} = \left(q + \frac{a^3}{16}\right)\bar{\Omega},$$

$$\dot{\bar{\Omega}} = -\left[q\left(\frac{a}{q^2} + \frac{1}{8}\right) + \frac{q^3}{16}\left(\frac{a}{q^2} + \frac{9}{18}\right)\right]\bar{\varphi} \qquad (86)$$

и решение (20)

$$\varphi = \bar{\varphi} + \frac{q^2}{128}\left[\bar{\varphi}\cos(4t) - 32\bar{\Omega}\sin(2t)\right],$$

$$\Omega = \bar{\Omega} - \frac{q}{32}\left[8\bar{\Omega}\cos(2t) + \bar{\varphi}\sin(4t)\right]$$

$$+ \frac{q^2}{4}\left[\frac{3}{32}\bar{\Omega}\cos(4t) - \left(\frac{5}{64} + \frac{a}{q^2}\right)\bar{\varphi}\sin(2t) - \frac{1}{192}\bar{\varphi}\sin(6t)\right], \qquad (87)$$

позволяющее по формулам (13) вычислить $z(t)$ и $\dot{z}(t)$.

Начальные значения для $\bar{\varphi}$ и $\bar{\Omega}$ равны

$$\bar{\varphi}(0) = z_0\left(1 - \frac{q}{4} + \frac{7q^2}{128}\right),$$

$$\bar{\Omega}(0) = \frac{\dot{z}_0}{q}\left(1 + \frac{q}{4} + \frac{5q^2}{128}\right). \qquad (88)$$

Они получены из выражений (87) при $t = 0$ с использованием формул (22), (16).

Из системы (86) следует уравнение осциллятора

$$\ddot{\bar{\varphi}} + \lambda\bar{\varphi} = 0, \qquad (89)$$

где

$$\lambda = a\left(1 + \frac{q^2}{8}\right) + \frac{q^2}{8} + \frac{25q^4}{2048}.$$

Уравнение $\lambda = 0$ имеет приближенное решение в виде ряда по степеням q

$$a = a_{c0} = -\frac{q^2}{8} + \frac{7q^4}{2048}, \qquad (90)$$

совпадающее с известной характеристической функцией [7]. На плоскости (a, q) кривая (90) является границей областей ограниченного и неограниченного решений уравнения (1).

С учетом начальных условий (88) на кривой (90) решение уравнения (89) (и систему (86)) имеет вид

$$\bar{\varphi} = \dot{z}_0\left(1 + \frac{q}{4} + \frac{13q^2}{128}\right)t + z_0\left(1 - \frac{q}{4} + \frac{7q^2}{128}\right),$$

$$\bar{\Omega} = \bar{\Omega}(0) = \frac{\dot{z}_0}{q}\left(1 + \frac{q}{4} + \frac{5q^2}{128}\right). \qquad (91)$$

Решение $z(t)$ уравнения (1) находим по формуле (13), где $\varphi(t)$ вычисляем по формуле (87) с использованием выражений (91) для средних. В результате простых преобразований получим

$$z(t) = Z_c(t)\left[1 + \frac{q}{4}\cos(2t) + \frac{q^2}{128}\cos(4t)\right]$$

$$+ Z_s(t)\left[\frac{q}{4}\sin(2t) + \frac{q^2}{32}\sin(4t)\right], \qquad (92)$$

где

$$Z_c(t) = z_0\left(1 - \frac{q}{4} + \frac{7q^2}{128}\right) + \dot{z}_0\left(1 + \frac{q}{4} + \frac{13q^2}{128}\right)t,$$

$$Z_s(t) = -\dot{Z}_c(t) = -\dot{z}_0\left(1 + \frac{q}{4}\right).$$

При начальногм значении $\dot{z}_0 = 0$ решение периодическое. При $\dot{z}_0 \neq 0$ решение непериодическое.

При $\lambda > 0$, т.е. когда $a > a_{c0}$, получим решение уравнения (89) (и системы (86)) для параметров a, q вблизи характеристической кривой. Оно имеет вид

$$\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(0)\cos\left(\sqrt{\lambda t}\right) + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\dot{\bar{\varphi}}(0)\sin(\sqrt{\lambda t}),$$

$$\bar{\Omega} = \frac{1}{q}\left(1 - \frac{q^2}{16}\right)\dot{\bar{\varphi}}, \qquad (93)$$

где

$$\dot{\bar{\varphi}}(0) = \bar{\Omega}(0)q\left(1 + \frac{q^2}{16}\right) = \dot{z}_0\left(1 + \frac{q}{4} + \frac{13q^2}{128}\right). \qquad (94)$$

Решение (93) — ограниченное периодическое с малой ($\sim q$) частотой колебаний. И здесь решение $z(t)$ находим по формуле (13) с использованием функции $\varphi(t)$ (87), однако теперь средние $\bar{\varphi}$, $\bar{\Omega}$ описываются выражениями (93), а начальные значения $\bar{\varphi}(0)$, $\dot{\bar{\varphi}}(0)$ — выражениями (88), (94). В результате для $z(t)$ получим формулу (92), в которой медленно меняющиеся функции теперь имеют вид

$$Z_c(t) = z_0\left(1 - \frac{q}{4} + \frac{7q^2}{128}\right)\cos(\sqrt{\lambda}t)$$

$$+ \frac{\dot{z}_0}{\sqrt{\lambda}}\left(1 + \frac{q}{4} + \frac{13q^2}{128}\right)\sin(\sqrt{\lambda}t),$$

$$Z_s(t) = -\dot{Z}_c(t) = z_0\sqrt{\lambda}\left(1 - \frac{q}{4}\right)\sin(\sqrt{\lambda}t)$$

$$- \dot{z}_0\left(1 + \frac{q}{4}\right)\cos(\sqrt{\lambda}t).$$

Охарактеризуем решение $z(t)$. Для этого формулу (92) перепишем в виде

$$z(t) = Z_c + \frac{q}{4}\sqrt{Z_c^2 + Z_s^2}\cos\bigl(2t + \beta_1(t)\bigr)$$
$$+ \frac{q^2}{128}\sqrt{Z_c^2 + 16Z_s^2}\cos\bigl(4t + \beta_2(t)\bigr),$$

где $\operatorname{tg}\beta_1 = -Z_s/Z_c$, $\operatorname{tg}\beta_2 = -4Z_s/Z_c$. Отсюда следует, что $z(t)$ имеет медленно меняющуюся с частотой $\sqrt{\lambda}$ составляющую, на которую наложены малые быстрые колебания с модуляцией фаз. Мгновенные частоты колебаний равны $2 + \dot\beta_1(t)$ и $4 + \dot\beta_2(t)$, где

$$\dot\beta_1 = -\frac{\lambda Z_c^2 + Z_s^2}{Z_c^2 + Z_s^2}, \quad \dot\beta_2 = -4\,\frac{\lambda Z_c^2 + Z_s^2}{Z_c^2 + 16Z_s^2}.$$

При $\lambda > 0$ решение уравнения (89) (и системы (86)) имеет вид

$$\bar\varphi = \bar\varphi(0)\operatorname{ch}(\sqrt{-\lambda}t) + \frac{\dot{\bar\varphi}(0)}{\sqrt{-\lambda}}\operatorname{sh}(\sqrt{-\lambda}t),$$
$$\bar\Omega = \frac{1}{q}\left(1 - \frac{q^2}{16}\right)\dot{\bar\varphi}, \qquad (95)$$

где $\bar\varphi(0)$ определяется формулой (88), $\dot{\bar\varphi}(0)$ — выражением (94). Решение (95) имеет место для значений параметров $a < a_{c0}$ и q в области, примыкающей к границе (90). Оно является неограниченным, кроме случая, когда начальные значения z_0, $\dot z_0$ удовлетворяют условию $\sqrt{-\lambda}\bar\varphi(0) + \dot\varphi(0) = 0$. Тогда в (95) отсутствует растущая экспонента, и получим неустойчивое, по Ляпунову, экспоненциально затухающее решение. Решение $z(t)$ (13) находим, используя формулы (87), (95), (88), (94). Оно имеет вид (92), где медленно меняющиеся множители равны

$$Z_c(t) = z_0\left(1 - \frac{q}{4} + \frac{7q^2}{128}\right)\operatorname{ch}(\sqrt{-\lambda}t)$$
$$+ \frac{\dot z_0}{\sqrt{-\lambda}}\left(1 + \frac{q}{4} + \frac{13q^2}{128}\right)\operatorname{sh}(\sqrt{-\lambda}t),$$
$$Z_s(t) = -\dot Z_c(t) = -z_0\sqrt{-\lambda}\left(1 - \frac{q}{4}\right)\operatorname{sh}(\sqrt{-\lambda}t)$$
$$- \dot z_0\left(1 + \frac{q}{4}\right)\operatorname{ch}(\sqrt{-\lambda}t). \qquad (96)$$

В рассматриваемом случае неограниченного решения ($\lambda < 0$) существует фазовая группировка быстрых колебаний. Она наступает по мере завершения переходного процесса, описываемого убывающими экспонентами в формулах (96). Убедимся в этом, вычислив z (92) с использованием (96). Если пренебречь вкладом убывающих экспонент и оставить слагаемые $\sim q$, то получим формулу, справедливую для больших t

$$z = \frac{1}{2}\left(z_0 + \frac{\dot z_0}{\sqrt{-\lambda}}\right)e^{\sqrt{-\lambda}t}\left[1 + \frac{q}{4}\cos(2t + \xi_1)\right],$$

где в слагаемом, содержащем колебания, постоянное приращение фазы ξ_1 определяется выражением $\operatorname{tg}\xi_1 = \sqrt{-\lambda}$, и это приращение не зависит от начальных значений z_0, $\dot z_0$. Группировка δ-образная без последующей разгруппировки.

8. Пример. Колебания зарядов в узле электрического поля стоячей волны

Рассмотрим релятивистское движение заряда — e в высокочастотном линейно поляризованном стоячем поле, образованном однородным волнами, бегущими вдоль оси z декартовой системы координат x, y, z. Уравнения движения в безразмерном виде записываются как [3]

$$Z'' = W^2(n^{-2}Z'\sin T\sin Z - \cos T\cos Z)(q_x + \cos T\sin Z),$$
$$X' = W(q_x^z + \cos T\sin Z), \quad Y' = q_y W,$$
$$W' = W^3 n^{-2}(q_x + \cos T\sin Z)\sin T\sin Z. \qquad (97)$$

Здесь $T = \omega t$ (ω — частота поля, t — время), $Z = hz$, $X = h(x - x_0)$, $Y = h(y - y_0)$ — безразмерные координаты частицы, в которых x_0, y_0 — начальные (при $T = T_0 = \omega t_0$) координаты, $h = n\omega/c$ (n — показатель преломления немагнитной среды, c — скорость света в вакууме), $W = neE_0/(m_0c\omega\gamma)$ — функция, обратно пропорциональная энергия частицы (E_0 — амплитуда электрического поля, m_0 — масса покоя заряда, $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ — релятивистский фактор, v — величина скорости). Постоянный параметр в (97) $q_z = m_0\omega\gamma_0 v_{x0}/(eE_0)$ — $\sin Z_0\cos T_0$ выражается через начальные значения релятивистского фактора γ_0, координаты $Z_0 = hz_0$, составляющей скорости v_{x0} по оси x. Параметр $q_y = m_0\omega\gamma_0 v_{y0}/(eE_0)$ содержит составляющую скорости v_{y0} по оси y. Штрихи над переменными величинами в (97) означают дифференцирование по T. Начальными условиями для системы (97) являются значения: $T = T_0$, $Z = Z_0$, $Z' = Z'_0$, $X = Y = 0$, $W = W_0 = neE_0/(m_0c\omega\gamma_0)$.

Ограничимся здесь случаем $q_x = q_y = 0$. Это значит, что частица инжектируется в узле электрического поля ($Z_0 = 0$) и при этом не имеет составляющей начальной скорости, поперечной направлению распространения волн ($v_{x0} = v_{y0} = 0$, $Z'_0 \neq 0$). Линейная по своим переменным система следует из (97) и имеет вид

$$Z'' + a(1 + \cos(2T))Z = 0, \quad a' = 0,$$
$$X' = \sqrt{2a}Z\cos T, \quad Y' = 0, \qquad (98)$$

где обозначено $a = W^2/2$. Как видно, движение по z определяется уравнением Матье с $a = q$, причем второе уравнение имеет постояное решение $a = a_0 = W_0^2/2$. В нашем частном случае одного параметра в уравнении Матье известные области неустойчивости на плоскости становятся интервалами на оси значений a. Принятая в настоящей работе точность решения уравнения Матье позволяет вычислить с небольшой погрешностью из алгебраических уравнений (37), (45) при $q = a$ обе границы $a_{1\,\min}$, $a_{1\,\max}$ первого интервала неустойчивости

$(a_{1\,\min} \le a \le a_{1\,\max})$ и из уравнения (38) при $q = a$ левую границу $a_{2\,\min}$ второго интервала неустойчивости. В результате получим $a_{1\,\min} = 0.6580$, $a_{1\,\max} = 1.7793$, $a_{2\,\min} = 3.7166$. Решение $Z(T)$ первого уравнения (98) строится по формулам разд. 2, 3 настоящей работы. При этом во всех выражениях начальное значение аргумента $t = 0$ следует заменить на начальное значение $T = T_0$. Поскольку рассматривается инжекция частиц в узле электрического поля $(Z(T_0) = 0)$, то $\psi(T_0) = \pm\pi/2$ и $\theta_1(T_0) = \pi - 2T_0$, $\theta_2(T_0) = \pi - 4T_0$. Кроме того, так как $b^2 = Z^2 + Z'^2/\omega_0^2$, то имеем начальное значение амплитуды $b(T_0) = \beta_{z0}/\sqrt{a}$, где $\beta_{z0} = v_{z0}/c$ (v_{z0} — начальное значение скорости при инжекции).

При движении по z справедливы выводы, сделанные в разд. 4–6, о группировке осцилляторов с различными моментами влета T_0 в интервалах неустойчивости $(a_{1\,\min} \le a \le a_{1\,\max}$, $a \ge a_{2\,\min})$ и в интервалах устойчивости вблизи границ с областями неустойчивости, т.е. при $a < a_{1\,\min}$, $a > a_{1\,\max}$, $a < a_{2\,\min}$.

Скорость поперечного движения X' (98) оценим здесь в областях устойчивости, примыкающих к границам $a_{1\,\max}$, $a_{1\,\max}$, в первом приближении метода усреднения. Для этого с учетом формулы (2) запишем X' в виде

$$X' = b\sqrt{\frac{a}{2}}\left[\cos\frac{\theta_1}{2} + \cos(\psi + T)\right]$$

и правую часть усредним по быстрой фазе $\psi + T$. Используя затем выражения (68), (77), после простых преобразований получим формулу

$$\beta_x = \frac{v_x}{c} = X'$$
$$= \pm\frac{\beta_{z0}}{2}\left[\frac{\gamma_1 + \cos\theta_1(T_0) + (1 + \gamma_1\cos\theta_1(T_0))\cos(2\nu_1 T)}{1 + \gamma_1}\right.$$
$$\left. + \frac{r_1(1-\gamma_1)}{2\nu_1}\sin\theta_1(T_0)\sin(2\nu_1 T)\right]^{1/2}, \qquad (99)$$

из которой следует, что скорость поперечного к оси z движения изменяется не с частотой поля ω, направленного по x, а имеет периодическую медленно меняющуюся $(\nu_1 \ll 1)$ составляющую, на которую наложены быстрые колебания. Их можно учесть в более высоких приближениях метода усреднения. Как известно [12], при движении в узле электрического поля заряды, оставаясь в слабом электрическом поле, ускоряются незначительно, что подтверждается также формулой (99). Ускорение от тепловых до релятивистских скоростей возможно в пучности электрического поля стоячей волны в областях устойчивости колебаний по z [4]. При этом заряды, оставаясь в пучности, ускоряются сильным электрическим полем.

Список литературы

[1] *Гапонов А.В., Петелин М.И., Юлпатов В.К.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1967. Т. 10. Вып. 9–10. С. 1414–1453.
[2] *Курин А.Ф.* // Изв. вузов. Радиофизика. 2002. Т. 35. Вып. 7. С. 1–12.
[3] *Курин А.Ф.* // Письма в ЖТФ. 2007. Вып. 3. С. 8–14.
[4] *Курин А.Ф.* // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31. Dып. 13. С. 1–9.
[5] *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 328 с.
[6] *Гребеников Е.А.* Метод усреднения в прикладных задачах. М.: Наука, 1986. 256 с.
[7] *Хаяси Т.* Нелинейные колебания в физических системах. М.: Мир, 1968. 432 с.
[8] *Моисеев Н.Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981. 400 с.
[9] *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.
[10] *Двайт Г.В.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1977. 224 с.
[11] *Шевчук В.Н., Трубецков Д.И.* Аналитические методы расчета в электронике СВЧ. М.: Сов. радио, 1970. 584 с.
[12] *Аскарьян Г.А.* // ЖЭТФ. 1959. Т. 36. Вып. 2. С. 619–621.