

Краткие сообщения

01

К решению задачи гравиметрии на основе двухкомпонентного инерциального метода

© А.С. Девятисильный

Институт автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения РАН,
690041 Владивосток, Россия
e-mail: devyatis@iacp.dvo.ru

(Поступило в Редакцию 2 апреля 2007 г. В окончательной редакции 28 февраля 2008 г.)

Дана расширенная интерпретация двухкомпонентной инерциальной навигационной системы и предложен новый способ оценки значения напряженности гравитационного поля, допускающий отказ от использования традиционных гравиметров. Высокая эффективность способа подтверждается приводимыми результатами численного эксперимента.

PACS: 04.08.Cc

Как известно [1], задача традиционной, или классической, гравиметрии состоит в измерении значения напряженности гравитационного поля (GR -поля), для чего измерительный прибор — гравиметр — устанавливается на выставленную в горизонте специальную платформу. Наиболее полный взгляд на последнюю может быть связан с ее интерпретацией как физического элемента инерциальной навигационной системы (ИНС), с которым жестко связан координатный приборный трехгранник, в осях которого производятся инерциальные (с помощью гироскопов и ньютометров, или акселерометров [2]) и иные измерения. Здесь и далее будем иметь в виду двухкомпонентные (по числу ньютометров [3]) ВУС ($2D$ -ИНС) и соответственно $2D$ -платформы. Гравиметр — по сути ньютометр, установленный на такую платформу, можно рассматривать в качестве нефункционального элемента $2D$ -ИНС, причем роль последней в этом случае сводится к горизонтированию платформы.

Вместе с тем, и это показано в настоящей работе, решение задачи классической гравиметрии возможно исключительно средствами $2D$ -ИНС при отсутствии указанного нефункционального элемента.

Методологически предлагаемая работа близка к работе [4]; это означает, что в ней, так же как и в [4], реализуется концепция вычислительной гравиметрии, но в рамках традиционной задачи.

Сначала обратимся к уравнениям функционирования $3D$ -ИНС [4], ограничиваясь только динамической группой уравнений, записанной в гамильтоновых образах,

$$\begin{aligned} D_{ik}q_k &= p_i, & q_i(0) &= q_{i,0}, \\ D_{ik}p_k &= G_i(q) + F_i, & p_i(0) &= p_{i,0}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$i, j, k = \overline{1, 3},$$

где $q = (q_i)$, $p = (p_i)$, $G = (G_i)$, $F = (F_i)$ — соответственно векторы координат объекта, импульсов, напря-

женности гравитационного поля и удельных сил негравитационной природы в проекциях на оси жестко связанного с платформой приборного трехгранника (обозначим его через $ou = ou_1ou_2ou_3$); $D_{ik} = \delta_{ik} \frac{d}{dt} - e_{ijk}\omega_j$ — оператор абсолютного дифференцирования; δ_{ik} и e_{ijk} — символы соответственно Кронекера и Леви-Чивита; $\omega = (\omega_i)$ — вектор абсолютной угловой скорости вращения платформы в проекциях на оси трехгранника ou . Далее, не нарушая общности, примем, что ou является физической моделью географически ориентированного трехгранника, т.е. в идеальном случае его ось ou_1 направлена на восток, ou_2 — на север, ou_3 — по вектору q . Следует также обратить внимание на то, что в (1), как и всюду в настоящей работе, устанавливается правило Эйнштейна — суммирование по повторяющимся индексам.

Напомним, что модель обратной $3D$ -задачи (или задачи коррекции $3D$ -ИНС) [5], целью решения которой является оценка шести фазовых координат системы (1), формируется при условии, что доступна измерению величина $|q| = q_3 = r$, т.е. имеет место измерение

$$J = r + \varepsilon, \quad (2)$$

где ε — инструментальная погрешность измерителя. Собственно совокупность уравнений (1) и (2) и декларирует модель этой задачи.

Формальный переход к схеме $2D$ -ИНС конструктивен, если объект находится на траектории, для которой $r = \text{const}$ — известная величина, измеряемая в соответствии с (2). Тогда, учитывая (2) при формировании в (1) модели напряженности гравитационного поля (далее будем считать его центральным), а также полагая в (1) $i = \overline{1, 2}$, получим уравнения функционирования $2D$ -ИНС, которые, как известно [3,5], неасимптотически устойчивы. Соответствующие уравнения эволюции динамической группы погрешностей $2D$ -ИНС принимают

вид

$$D_{ik}\delta q_k = \delta p_i - e_{ik}v_k q_j, \quad \delta q_i(0) = \delta q_{i,0},$$

$$D_{ik}\delta p_k = -\omega_0^2 \delta q_i + f_i - e_{ik}v_k p_j, \quad \delta p_i(0) = \delta p_{i,0}, \quad (3)$$

$$i = \overline{1, 2}; \quad k, j = \overline{1, 3},$$

где $\omega_0 = \left(\frac{\mu}{r^3}\right)^{1/2}$ — частота Шулера; μ — гравитационный параметр Земли; $v_k, k = \overline{1, 3}$ — инструментальные погрешности гироскопических измерителей, $f_i, i = \overline{1, 2}$ — инструментальные погрешности ньютонометров. Дополнительно уточним, что в соответствии с вышеизложенной процедурой перехода к схеме 2D-ИНС в уравнениях (3) следует считать, что $q_1 = q_2 = 0, q_3 = r, \delta q_3 = \varepsilon, p_1 = \omega_2 r, p_2 = -\omega_1 r, p_3 = 0$; заметим также, что в силу данного ранее определения трехгранника ou значения δq_1 и δq_2 связаны с компонентами вектора малого угла $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)^T$, на который плоскость ou_1u_2 (платформа) уклоняется от нормального к вектору q (горизонтального) положения, следующими соотношениями: $\alpha_1 = \delta q_2/r, \alpha_2 = -\delta q_1/r$.

Изложенным по сути исчерпывается существующий взгляд на роль радиальной информации при формировании 2D-ИНС.

Вместе с тем необходимо отметить, что геометрическое условие на траекторию ($r = \text{const}$), столь важное при преобразовании 3D-ИНС в 2D-ИНС, может быть дополнено не рассматриваемым прежде физическим условием — равенством нулю суммы проекций на радиус-вектор q всех сил, действующих на объект, что формально записывается следующим образом:

$$W = \delta_{ij} q_i \dot{p}_j = 0. \quad (4)$$

Учет условия (4) — это качественно новый взгляд на 2D-ИНС. Действительно, воспроизводство условия (4) на основе представлений о движении объекта, формируемых 2D-ИНС с учетом измерения (2), и представлений об удельной силе F_3 , приводит к текущей невязке вида

$$\delta W = \omega_2 \delta p_1 - \omega_1 \delta p_2 + 2\omega_0^2 \varepsilon + f_3 + \omega_1 v_1 r + \omega_2 v_2 r, \quad (5)$$

которую можно интерпретировать как измерение, что дает основание рассматривать (3) и (5) в качестве модели обратной задачи для получения текущих оценок динамической группы погрешностей 2D-ИНС. Входящая в (5) величина f_3 — погрешность представлений о силе F_3 — может рассматриваться как инструментальная погрешность ньютонометра, соосного с координатной осью ou_3 и измеряющего F_3 (полагаем, что только этим и ограничивается его роль в ИНС, выше мы называли такой ньютонометр нефункциональным, отождествляя его с гравиметром), но это может быть и отклонение значения силы F_3 от некоторого априорно оцененного ее значения. Именно эта, последняя, интерпретация f_3 используется в настоящей работе, и она, подчеркнем, не только непосредственно не связана с использованием традиционных гравиметров, но и допускает их отсутствие.

Ограничимся случаем наземной гравиметрии на неподвижном основании и примем следующую гипотезу о погрешностях: v, f_1, f_2 — несмещенные „белые шумы“; ε и f_3 — неизвестные постоянные. Тогда вводя новую переменную $a = 2\omega_0^2 \varepsilon + f_3 = \text{const}$ и расширяя уравнения состояния (5) уравнением $\dot{a} = 0$, придем к модели обратной задачи, целью решения которой является оценка вектора состояния $s = (\delta q_1, \delta p_1, \delta q_2, \delta p_2, a)^T$.

Выполненное аналитическое исследование корректности постановки этой расширенной обратной задачи, отождествляемое здесь с проверкой условия калмановской наблюдаемости [6], указывает на ее разрешимость, если только не принимать во внимание весьма незначительное число исключений, не влияющих на прикладную перспективу задачи. Более того, заметим, что выполнение названного условия свидетельствует о том, что предложенная концепция преобразования 3D-ИНС в 2D-ИНС, в отличие от традиционной [2], приводит к возможности реализации как устойчивых точечных (например, метод наименьших квадратов — МНК), так и асимптотически устойчивых алгоритмов оценивания значений переменных расширенной динамической группы уравнений погрешностей работы 2D-ИНС.

Если рассматриваемая обратная задача решена, и в конечном итоге получены оценки векторов q, p, F , то из (4) находится оценка G_3 , значение которой, в силу того что при выбранной ориентации приборного трехгранника $G_1 = G_2 = 0$, отождествляется со значением напряженности GR -поля в пункте наблюдения. Здесь существенно отметить следующее: полученная оценка оказывается смещенной на величину $\omega_0^2 \varepsilon$ (например, при $r = 6.371 \cdot 10^6$ м и $\varepsilon = 1$ м $\omega_0^2 \varepsilon \approx 1.5 \cdot 10^{-6}$ м/с²), но она, очевидно, сохраняет свою актуальность при малых значениях ε в качестве абсолютной оценки, а независимо от ε — в случаях, когда речь идет об оценке возникающих аномалий напряженности GR -поля, например, вследствие землетрясений [4].

Как и в [4], процедурная компонента рассматриваемой обратной задачи связана с приведением ее к виду, характерному для задачи МНК, и решением этим методом с накоплением измерений на расширяющемся временном интервале.

Ниже приводятся результаты численного эксперимента, в котором работа 2D-ИНС имитируется для случая, когда ее платформа предварительно выставлена в горизонте с угловыми погрешностями α_1 и α_2 , не меняющимися далее в процессе эксперимента, т.е. речь идет о стационарной платформе. Это позволяет в качестве оцениваемого вектора рассматривать начальный (при $t = 0$) вектор состояния системы (s). Результаты приводятся для следующих условий: широта места гравиметрической съемки $\varphi = 45^\circ$; среднеквадратические значения инструментальных погрешностей ньютонометров и гироскопов соответственно равны 0.001 м/с² и 0.001°/h; углы $\alpha_1 = 3 \cdot 10^{-4}$, $\alpha_2 = -3 \cdot 10^{-4}$ rad (или соответственно $\delta q_1 = 2, \delta q_2 = 2$ км); $a = 1$ м/с².

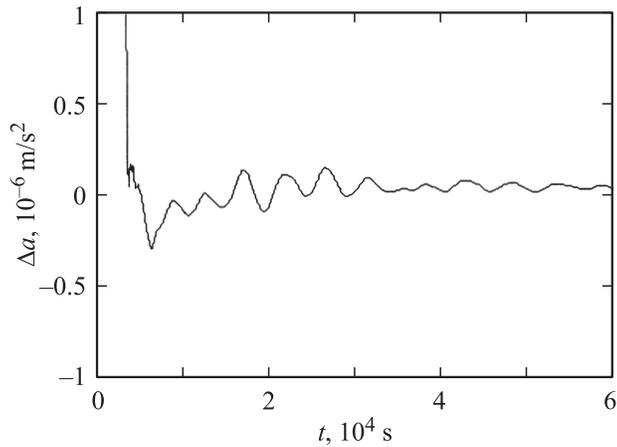


Рис. 1.

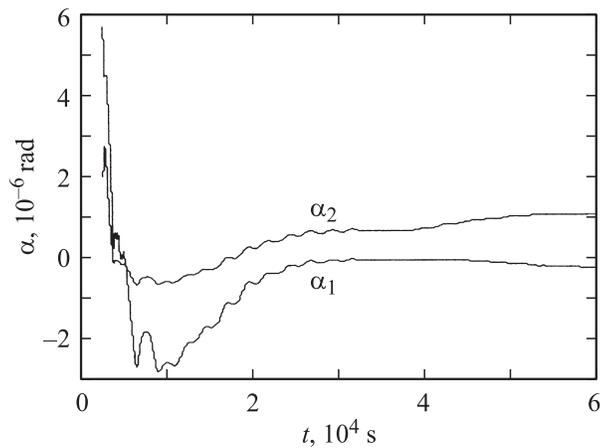


Рис. 2.

Прежде всего, необходимо отметить, что оператор решаемой МНК-задачи на всем интервале наблюдения (и это было выявлено в эксперименте) характеризуется значениями числа обусловленности порядка $\mu \approx 10^7$, которое легко уменьшается до значений $\mu < 10^2$ при его — оператора — постолбцовой нормировке (или соответствующем масштабировании переменных). Это обеспечивает возможность поддержания весьма высокой степени устойчивости задачи при погружении ее в вычислительную среду.

На рис. 1 и 2 представлены графики эволюции погрешностей (Δa , $\Delta \alpha_1$, $\Delta \alpha_2$) значений a , α_1 и α_2 при накоплении текущих измерений с шагом по времени $\Delta t = 1$ с; значения этих погрешностей ($\Delta a \approx 10^{-8} - 10^{-7}$ м/с², $\Delta \alpha \approx 10^{-7} - 10^{-6}$ рад) и вид графиков хорошо подтверждают теоретические выкладки, связанные с устойчивостью (сходимостью) алгоритма решения.

В заключение сформулируем основные результаты работы, а именно:

— предложена новая концепция преобразования 3D-ИНС в 2D-ИНС при наличии дополнительной радиальной информации, отличающаяся от существующей

тем, что на ее основе могут быть реализованы не только устойчивые, но и асимптотические устойчивые алгоритмы работы динамической компоненты 2D-ИНС;

— показано, что традиционная задача наземной гравиметрии как задача локального измерения напряженности GR -поля Земли может быть успешно решена исключительно средствами двухкомпонентных (с двумя планарными ньютонометрами) ИНС без использования традиционных гравиметров.

Список литературы

- [1] Гравиразведка. Справочник геофизика / Под ред. Е.А. Мудрецов. М.: Недра, 1981. 397 с.
- [2] Ишлинский А.Ю. Классическая механика и силы инерции. М.: Наука, 1987. 320 с.
- [3] Андреев В.Д. Теория инерциальной навигации. Корректируемые системы. М.: Наука, 1967. 648 с.
- [4] Девятисильный А.С. // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 7. С. 121–123.
- [5] Девятисильный А.С., Числов К.А. // Изв. РАН. ТиСУ. 2004. № 5. С. 149–153.
- [6] Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971. 400 с. (Kalman R.E., Falb P.L., Arbib M.A. Topics in mathematical system theory. N.Y.: McGraw-Hill, 1969).