

01;10

Эффект собственного заряда, когерентность зарядовых колебаний и эмиттанс

© С.В. Мигинский

Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера,
630090 Новосибирск, Россия
e-mail: S.V.Miginsky@inp.nsk.su

(Поступило в Редакцию 27 августа 2007 г.)

Эффект собственного заряда играет важную роль в инжекторах ускорителей, где энергия частиц относительно невелика. Техника „emittance compensation“ позволяет эффективно анализировать и оптимизировать такие каналы. С использованием этой техники получены аналитически и численно простые и надежные оценки роста эмиттанса в каналах с превалирующим эффектом собственного заряда и пушках. Учитывались продольная и поперечная неоднородности плотности заряда, ускорение и группировка. Приведены оценки параметров оптимальных каналов и пушек.

PACS: 41.75.-i, 41.85.-p, 29.17.+w, 29.27.Eg

Введение

Эффект собственного заряда может значительно ухудшить эмиттанс и даже изменить характер движения пучка заряженных частиц в канале с относительно низкой энергией и значительным током. Для оценки существенности влияния собственного заряда используем известные уравнения Капчинского–Владимирского

$$\begin{cases} a'' + k_x a - \frac{I}{I_0(\beta\gamma)^3} \frac{4}{a+b} - \frac{\epsilon_x^2}{a^3} = 0, \\ b'' + k_y b - \frac{I}{I_0(\beta\gamma)^3} \frac{4}{a+b} - \frac{\epsilon_y^2}{b^3} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где a и b — огибающие в плоскостях x и y ; k — нормализованная фокусировка; I — ток; $I_0 = 4\pi mc^2/Z_0 e \approx 17$ кА для электронов; $\beta\gamma$ — безразмерный импульс; а ϵ — канонический эмиттанс. Перепишем эти уравнения для среднеквадратичных величин:

$$\begin{cases} x'' = \frac{\epsilon_x^2}{x^3} + \frac{j}{x+y} - \frac{e}{p} G_x x, \\ y'' = \frac{\epsilon_y^2}{y^3} + \frac{j}{x+y} - \frac{e}{p} G_y y, \end{cases} \quad (2)$$

где x и y означают среднеквадратичные размеры в горизонтальной и вертикальной плоскостях, а в индексах — соответствующие проекции; $''$ — вторая производная по независимой координате z ; $j = I/I_0(\beta\gamma)^3$ — безразмерный ток; ϵ , G , e и p — среднеквадратичный эмиттанс, фокусирующий градиент, заряд частицы и ее продольный импульс соответственно; $G_x = -G_y = G$ для фокусирующего в горизонтальной плоскости квадруполя, $G_x = G_y = eB^2/4p$ — для соленоида и $G_x = pg^2/e$, $G_y = 0$ — при диполях, где g — кривизна траектории.

Если члены с током в (2) сравнимы или превышают таковые с эмиттансом, эффект собственного заряда

существенен. Им можно пренебречь, только если выполнено следующее неравенство [2]:

$$\frac{I}{I_0(\beta\gamma)^3} \frac{1}{x+y} \ll \frac{\epsilon_{x \text{ or } y}^2}{(x \text{ or } y)^3}. \quad (3)$$

Собственный заряд изменяет также фазу малых колебаний размера пучка. Если это важно, то возможность использования беззарядовой модели зависит от величины этого эффекта. Как показано в [3], эффект пренебрежимо мал, только если

$$\frac{I}{4\epsilon_x I_0(\beta\gamma)^3} \int \frac{j(2x+3y)x}{(x+y)^2} dz \ll 1, \quad (4)$$

или, в упрощенном виде,

$$\frac{5}{16} \frac{I}{\epsilon I_0(\beta\gamma)^3} L \ll 1, \quad (5)$$

где L — длина канала. Таким образом, при нарушении хотя бы одного из неравенств (3)–(5) беззарядовая модель дает неверный результат.

В описании процессов в каналах с превалирующим влиянием собственного заряда (в том числе в пушках) в англоязычной литературе используется термин „emittance compensation“. Впервые он был использован, по-видимому, в [4] при анализе высокочастотных (ВЧ) электронных пушек. Метод был существенно формализован и развит в [5] и более поздних работах. Некоторые результаты, обсуждаемые здесь, можно найти также в [3,6–8]. Упомянутый термин, по-видимому, не отражает сущности явления, а поскольку в русскоязычной литературе аналогично устоявшегося термина нет, предлагается использовать термин „когерентность зарядовых колебаний“ для обозначения колебаний эмиттанса под действием собственного заряда.

Основы метода

Продольная неоднородность: основной эффект и уравнения

Как и в [5], разделим заряженный сгусток на ряд поперечных сечений (слоев), причем каждый слой считаем однородно заряженным и движущимся независимо от других. Последнее приближение весьма точно, если сгусток длинный в сопровождающей системе координат: $\beta\gamma\tau \gg r$, где τ — его длительность, а r — поперечный размер. Влияние поперечной неоднородности будет рассмотрено ниже, а микроскопическим эмиттансом можно пренебречь, если $j \gg (\varepsilon/r)^2$. Подставив $I/I_0(\beta\gamma)^3 = j$, $G_x e/p = g$, $G_y e/p = h$ в (2), получим

$$\begin{cases} x'' = \frac{j}{x+y} - gx, \\ y'' = \frac{j}{x+y} - hy. \end{cases} \quad (6)$$

Продольный импульс и ток j пока считаются неизменными. Пусть (x, y) — решение (6) для некоторых значений j и начальных условий. Назовем такое решение *главным*. Тогда движение другого слоя с током $j + \delta j$ (все значения с δ полагаются малыми) будет *подобным*, если его размеры $\sqrt{(j + \delta j)/j}(x, y) \cong (1 + \delta j/2j)(x, y)$. Это главное решение для слоя $j + \delta j$. Эмиттанс сгустка не растет, если все слои подобны. Если сформировать сгусток таким образом, влияние продольной неоднородности на эмиттанс будет полностью подавлено.

Если начальные условия двух упомянутых слоев одинаковы (как обычно и бывает на эмиттере), размеры второго будут колебаться около главного решения. Линеаризованные уравнения для малых отклонений от главного решения будут тогда

$$\begin{cases} \delta x'' = -j \frac{\delta x + \delta y}{(x+y)^2} - g\delta x, \\ \delta y'' = -j \frac{\delta x + \delta y}{(x+y)^2} - h\delta y, \end{cases} \quad (7)$$

$$(\delta x, \delta y) = -\delta I/2I(x, y), \quad (\delta x', \delta y') = 0 \text{ при } z = 0.$$

Как показано в [3], два собственных решения (7) в аксиально-симметричном квазистационарном случае ($x = y = \text{const}$; $j/2x^2 = g = h$) — суть аксиально-симметричная ($\delta x = \delta y$) и антисимметричная ($\delta x = -\delta y$) моды, причем волновое число последней в $\sqrt{2}$ раз меньше. Если и канал, и начальные условия аксиально-симметричны, антисимметричная мода отсутствует. Тогда для минимизации эмиттанса в конце канала фаза аксиально-симметричных колебаний (зарядовая фаза или просто фаза в дальнейшем) должна быть кратной π . Можно сказать, что малые аксиально-симметричные колебания различных слоев полностью когерентны, и их фазовые портреты совмещаются дважды за период (рис. 1). При отсутствии аксиальной

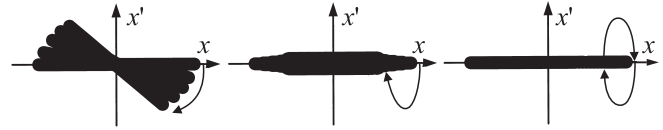


Рис. 1. Разворачивание и сворачивание фазовых портретов слоев.

симметрии оба типа колебаний должны иметь фазу, кратную π в конце канала, что вряд ли возможно.

Поперечная неоднородность: основной эффект и уравнения

Поскольку в стационарных пучках продольная неоднородность отсутствует, эффект поперечной неоднородности выступает на первый план. Он может дать значительный вклад в эмиттанс и в сгустках. Рассмотрим поперечный слой нестационарного пучка или, что то же самое, стационарный пучок с неоднородным распределением заряда по радиусу. Угловой момент нулевой. Прочие предположения те же, что и в предыдущем разделе. Тогда уравнение движения частицы на расстоянии x от оси

$$x'' = \frac{\tilde{I}}{I_0(\beta\gamma)^3} \frac{2}{x} - gx = \frac{2\tilde{j}}{x} - gx, \quad (8)$$

где \tilde{I} — ток через цилиндр радиуса x . Допустим, что движение совершенно ламинарно, т.е. если для двух частиц в некотором месте $x_1 < x_2$, то это справедливо везде. Это условие не всегда соблюдается, но нарушается оно лишь в разреженном гало пучка, так что это нарушение мало влияет на оценку эмиттанса.

Если радиальное распределение заряда неоднородно, то \tilde{j} не пропорционально x^2 , и траектории частиц не подобны. Ситуация выглядит, как показано на рис. 2. Аналогично случаю продольной неоднородности можно рассмотреть набор *подобных главных* траекторий для разных частиц и их малые колебания вокруг этих траекторий. Линеаризованное уравнение для малых отклонений будет тогда

$$\delta x'' = -\left(\frac{2\tilde{j}}{x^2} + g\right)\delta x. \quad (9)$$

Совершенно аналогично предыдущему случаю эмиттанс исчезает, когда зарядовая фаза кратна π .

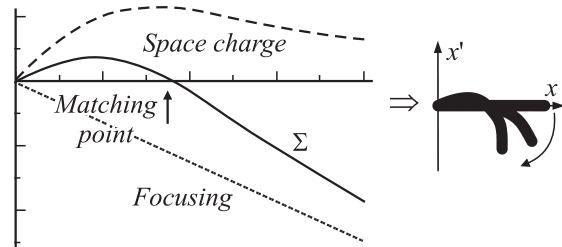


Рис. 2. Движение гауссова слоя.

Безразмерное уравнение малых колебаний

Для удобства рассмотрим безразмерное отклонение от главной траектории $\delta = \delta x/x$. Если круглый пучок однороден в поперечном сечении и его энергия и ток сохраняются, то среднеквадратичный размер выражается уравнением

$$x'' = \frac{j}{2x} - gx. \quad (10)$$

Для малого безразмерного отклонения от главной траектории можно записать следующее линеаризованное уравнение:

$$\begin{aligned} (x(1+\delta))'' &= \frac{j}{2x(1+\delta)} - gx(1+\delta) \\ \Rightarrow \delta'' + 2\frac{x'}{x}\delta' &= -\frac{j}{x^2}\delta. \end{aligned} \quad (11)$$

Если же энергия и(или) ток изменяются, уравнение для размера будет

$$\begin{cases} x' = \frac{x_1}{\beta\gamma} \\ x'_1 = \beta\gamma\left(\frac{j}{2x} - gx\right) \end{cases} \Rightarrow x' + \frac{(\beta\gamma)'}{\beta\gamma}x' = \frac{j}{2x} - gx, \quad (12)$$

где $x_1 = \beta\gamma x'$ — нормализованный наклон. Линеаризованное уравнение для δ будет

$$\delta'' + \left(2\frac{x'}{x} + \frac{(\beta\gamma)'}{\beta\gamma}\right)\delta' = -\frac{j}{x^2}\delta. \quad (13)$$

Заметим, что коэффициент в правой части при δ всегда отрицателен, т.е. движение устойчиво, и не зависит явно от фокусировки. Все главные траектории подобны, т.е. для любых двух из них $x'_1/x_1 = x'_2/x_2$, так что фазовые портреты слоев совмещаются (рис. 3), если

$$\frac{x'_1 + \delta x'_1}{x_1 + \delta x_1} = \frac{x'_2 + \delta x'_2}{x_2 + \delta x_2}. \quad (14)$$

Используя малость величин δ и свойство $\delta x' = x\delta' + x'\delta x/x$, получим отсюда

$$\delta'_1 = \delta'_2. \quad (15)$$

Поскольку для слоя, движущегося по главной траектории, $\delta' = 0$, то для минимизации эмиттанса то же условие должно быть выполнено и для остальных слоев.

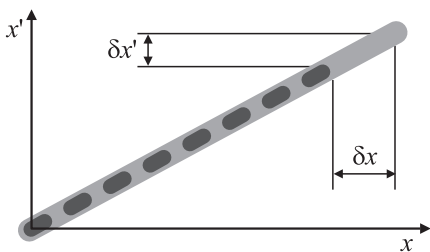


Рис. 3. Совмещение фазовых портретов.

Уравнение для случая поперечной неоднородности получается из (13) заменой $j \leftarrow 4j$:

$$\delta'' + \left(2\frac{x'}{x} + \frac{(\beta\gamma)'}{\beta\gamma}\right)\delta' = -\frac{4j}{x^2}\delta. \quad (16)$$

Матрица преобразования и фаза

Как и любое линейное обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) второго порядка, (13) (и (16)) определяет матрицу преобразования между двумя произвольными точками канала z_0 и z_1 :

$$\mathbf{M}(z_0, z_1) = \begin{pmatrix} C & S \\ C' & S' \end{pmatrix}, \quad (17)$$

где (C, C') и (S, S') — значения (δ, δ') в z_1 , если в z_0 они равнялись $(1, 0)$ и $(0, 1)$ соответственно. Это не что иное, как известные \cos - и \sin -подобные траектории. В общем случае коэффициенты в (13) и (16) при δ' не нулевые, так что $\det \mathbf{M}$ не обязательно равен единице (см. (4.29) в [9]):

$$\begin{aligned} \det \mathbf{M}(z_0, z_1) &= \exp\left(-\int_{z_0}^{z_1} \left(2\frac{x'}{x} + \frac{(\beta\gamma)'}{\beta\gamma}\right) dz\right) \\ &= \left(\frac{x_0}{x_1}\right)^2 \frac{(\beta\gamma)_0}{(\beta\gamma)_1}. \end{aligned} \quad (18)$$

Матрица преобразования однородного канала с $x = \text{const}$ и $\beta\gamma = \text{const}$:

$$\mathbf{M}(z_0, z_1) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \frac{x}{\sqrt{j}} \sin \varphi \\ -\frac{\sqrt{j}}{x} \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (19)$$

где $\varphi = (z_1 - z_0)\sqrt{j}/x$. Обратная матрица получается подстановкой $\varphi \rightarrow -\varphi$. По-видимому, это единственный случай, когда зарядовая фаза может быть определена абсолютно корректно, т.е. фазы двух участков канала аддитивны и коммутативны. Для нас, однако, важны лишь \cos -подобные траектории ($\delta' = 0$ на эмиттере), так что набег фазы в канале может быть определен сопоставлением его с „соответствующим“ однородным каналом. Однородный канал соответствует данному, если величины x , j и $\beta\gamma$ в первом равны таковым в конце второго и отношения элементов C' и C их матриц преобразования совпадают. Тогда набег фазы в канале

$$\varphi = \arctan\left(\frac{-C'x}{C\sqrt{j}}\right). \quad (20)$$

Квадрант выбран так, чтобы знаки $\cos \varphi$ и $-\sin \varphi$ совпадали с таковыми C и C' соответственно. Такая фаза не обязательно аддитивна и коммутативна, но отражает важнейшие параметры канала и обладает несколькими свойствами. Если к произвольному каналу с набегом фазы φ добавить однородный с набегом $\pi - \varphi$ (разумеется,

x , j и $\beta\gamma$ на стыке должны совпадать) общий набег фазы будет π

$$\begin{pmatrix} \cos(\pi - \varphi) & \frac{x}{\sqrt{j}} \sin(\pi - \varphi) \\ -\frac{\sqrt{j}}{x} \sin(\pi - \varphi) & \cos(\pi - \varphi) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \cos \varphi & * \\ -a \frac{\sqrt{j}}{x} \sin \varphi & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & * \\ 0 & * \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Для добавки $2\pi - \phi$ ситуация аналогична. Набег фазы составного канала из участков с набегами, кратными π , также кратен π , причем он равен их сумме по модулю 2π . Это следствие того факта, что произведение верхних треугольных матриц есть верхняя треугольная матрица и ее элемент m_{11} — произведение соответствующих элементов. Опять-таки, x , j и $\beta\gamma$ на стыках должны совпадать.

Необходимо подчеркнуть, что:

- (i) зарядовая фаза — это не то же самое, что известная бетатронная фаза;
- (ii) определение (20) не единственно возможное, оно приведено здесь, потому что удобно для анализа когерентных зарядовых колебаний.

Различные типы каналов

Однородный канал: продольная неоднородность

Оценим ухудшение эмиттанса поперечно-однородного сгустка в однородном канале. Вся система аксиально-симметрична, энергия и пиковый ток сохраняются. Повидимому, это простейший случай. В предыдущем разделе рассмотрены линейные, т.е. полностью когерентные, колебания. На самом деле зарядовые колебания нелинейны, и их волновые числа различаются. Линеаризованное уравнение (13) дает одинаковые фазы для всех слоев, так что используем приближение более высокого порядка:

$$\delta'' + \frac{j}{x^2} \delta = \frac{j}{2x^2} \delta^2 - \frac{j}{2x^2} \delta^3 \Leftrightarrow \delta'' + 2g\delta = g\delta^2 - g\delta^3. \quad (22)$$

Члены выше кубического здесь опущены. Аналогичное уравнение рассмотрено в [10] (28.9) и найден сдвиг частоты из-за нелинейности (28.13). В нашем случае относительный сдвиг частоты составит $a^2/12$, где a — амплитуда колебаний [3] (3.2–3.6), т.е.

$$\Delta\varphi \cong \frac{1}{12} \varphi a^2, \quad (23)$$

где φ — общий набег фазы.

Зададим начальные условия сгустка $x = r$ и $x' = 0$ для всех слоев и продольное распределение тока по Гауссу $j = j_0 \exp(-\xi^2)$, где ξ — продольная координата в сгустке.

Положим, что условие стационарности $j_0 \exp(-\xi_0^2) = 2r^2 g$ выполнено для некоторого слоя ξ_0 , и набег фазы в канале для этого слоя равен $\sqrt{2gL} = 2\pi n$, где n целое. Тогда размеры соседних слоев в конце канала приблизительно те же, а фазы отличаются из-за нелинейных членов в (22). Интегрированием вдоль сгустка можно найти его эмиттанс в приближении (23) (подробности см. в [3] 3.1). Далее для каждого n можно определить оптимальное значение ξ_0 . Зависимости оптимальной ξ_0 и эмиттанса от n для сгустка с $r = 1$, $j = 1$ и $\beta\gamma = 1$ приведены на рис. 4. Таким образом, эмиттанс растет от

$$\varepsilon \approx 0.049 r \sqrt{j} \quad (24)$$

в первом $2\pi n$ -минимуме до $\varepsilon \approx 0.12 r \sqrt{j}$ при $n \rightarrow \infty$. Оптимальная фокусировка в канале $g \approx j \exp(-1.175n^{-0.340})/2r^2$.

Точность этого аналитического результата оставляет желать лучшего, так как использованное приближение $a \ll 1$ выполняется лишь для близких к ξ_0 слоев. Для больших ξ , наоборот, $a \gg 1$. Можно лишь быть уверенным, что зависимость ε от r и j верна и найденный коэффициент по порядку величины совпадает с истинным. Уточним этот коэффициент численно. Для этой цели был разработан код „Butterfly“, который моделирует движение слоев в гауссовом сгустке в соответствии с нелинейным уравнением (10) (подробности см. в [3] 3.1); $r = 1$, $j = 1$ и $\beta\gamma = 1$. Было найдено, что оптимальная фокусировка для $n = 1$ составляет $g \approx 0.09$ и заметно отличается от аналитического предсказания 0.168. Движение такого сгустка через канал показано на рис. 5.

Первый $2\pi n$ -минимум достигается в точке $z \approx 14.2$ ($\varphi = \sqrt{2gz} \approx 1.92\pi$), а его значение составляет $\varepsilon \approx 0.023$, что значительно меньше аналитической оценки. Биения размера весьма велики, т.е. канал не согласован со сгустком „в целом“. Значения в $(2n + 1)\pi$ -минимумах намного выше, чем в окружающих $2\pi n$ -минимумах. Канал, в котором биения размера минимальны ($g \approx 0.374$), оказался оптимальным для значений эмиттанса в максимумах. Полученная величина

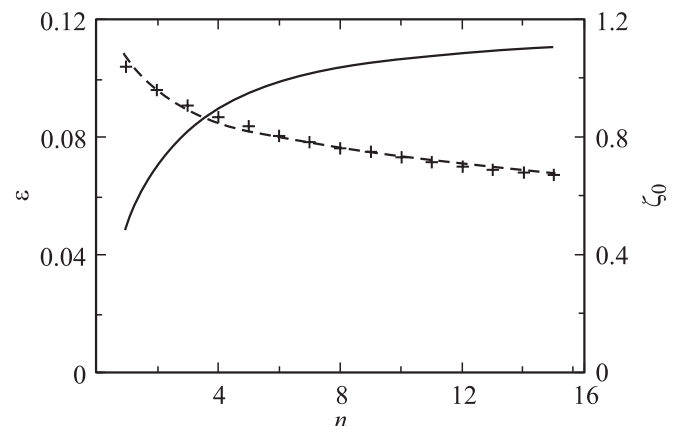


Рис. 4. Продольная неоднородность: ε (сплошная линия) и ξ_0 (крестики) в зависимости от числа периодов. Пунктир — $1.084n^{-0.170}$.

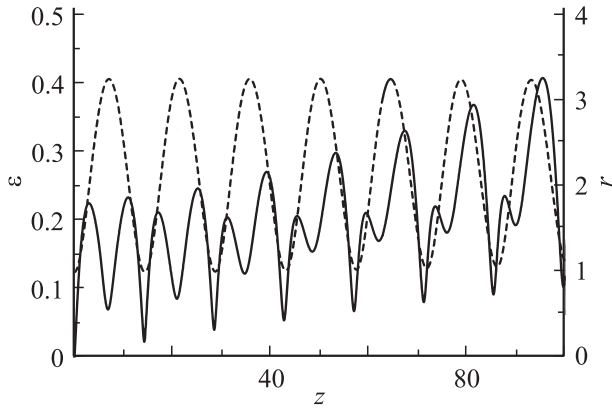


Рис. 5. Продольная неоднородность: ϵ (сплошная линия) и среднеквадратичный размер r (пунктир) сгустка в канале с $g = 0.09$.

$\epsilon \approx 0.15$. Оптимум для минимумов с большими n лежит в пределах $g = 0.2-0.3$, значение эмиттанса тогда $\epsilon \approx 0.07$.

Однородный канал: поперечная неоднородность

Оценим теперь эффект поперечной неоднородности. Рассмотрим гауссово поперечное распределение заряда в пучке с током j и среднеквадратичным размером r . Пучок движется в однородном канале с фокусировкой g . Прочие предположения те же, что и в предыдущих разделах. Начальный радиус частицы y , а наклон $y' = 0$, тогда

$$\tilde{j} = j(1 - \exp(-y^2/2r^2)) \quad (25)$$

и, если $gr^2/j < 1$, существует неподвижная частица, радиус которой x_0 удовлетворяет следующему уравнению:

$$(1 - \exp(-x_0^2/2r^2))/x_0^2 = g/2j. \quad (26)$$

Главный (равновесный) радиус другой частицы будет

$$x_e = \sqrt{\frac{2j(1 - \exp(-y^2/2r^2))}{g}}. \quad (27)$$

Аналогично предыдущему разделу можно записать сдвиг фазы зарядовых колебаний частицы из-за нелинейных членов в уравнении движения в момент $\varphi = 2\pi$, отсюда получить зависимость $y'(y)$, вычислить соответствующие интегралы в выражении для эмиттанса и, наконец, найти оптимальное значение g (подробности см. в [3]). Оптимальная фокусировка составляет $g \approx 0.353j/r^2$, а эмиттанс

$$\epsilon \approx 0.0177nr\sqrt{\tilde{j}}. \quad (28)$$

Для численного уточнения коэффициента в (28) код „Butterfly“ был модифицирован. Главные отличия — другое уравнение движения,

$$x'' = \frac{2\tilde{j}}{x} - gx, \quad (29)$$

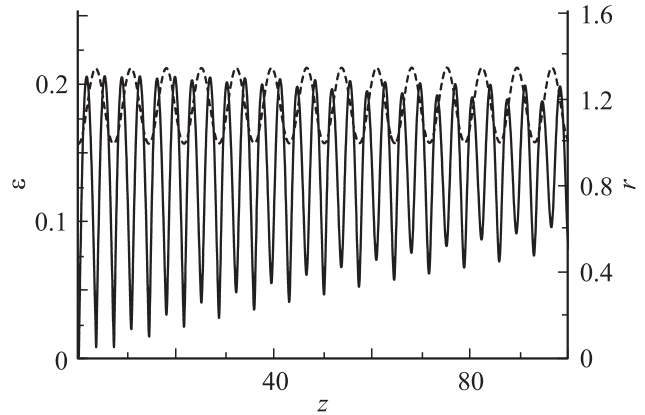


Рис. 6. Поперечная неоднородность: ϵ (сплошная линия) и среднеквадратичный размер r (пунктир) пучка в канале с $g = 0.38$.

где \tilde{j} определяется (25), и интегрирование проводится по поперечному сечению [3]. Оптимальная фокусировка оказалась $g = 0.38$, что весьма близко к аналитическому результату. При этом 2π -минимум достигается в точке $z \approx 7.15$ ($\varphi = \sqrt{2gz} \approx 1.98\pi$), а значение эмиттанса в нем $\epsilon = 0.0079$, что примерно вдвое меньше аналитической оценки. Движение такого пучка в канале изображено на рис. 6. По-прежнему, значения эмиттанса в $(2n+1)\pi$ -минимумах намного больше, чем в окружающих $2n\pi$ -минимумах. Биения размера пучка при такой фокусировке значительны, т.е. канал не согласован с пучком в целом. Фокусировка $g \approx 0.55$ является согласованной с пучком и одновременной оптимальной для эмиттанса в максимумах. Это точно соответствует аналитической оценке. Асимптотическое значение в максимумах ≈ 0.16 , что несколько меньше аналитической оценки 0.178.

Таким образом, поперечная неоднородность значительно меньше влияет на эмиттанс пучка. Кроме того, оптимальная фокусировка в этом случае намного слабее.

Однородный канал: совместный эффект

Теперь рассмотрим совместный эффект продольной и поперечной неоднородностей. Мы должны ожидать больших значений эмиттанса, чем в обоих рассмотренных случаях, и компромиссного значения оптимальной фокусировки. Аналитическая оценка здесь вряд ли полезна, так что сразу найдем искомые значения численно. Для этой цели предназначен код „2D“, аналогичный „Butterfly“ и „Hook“. Уравнение движения — (29), интегрирование ведется по всему объему сгустка (подробности см. [3,3.3]). Было найдено, что оптимальная фокусировка для 2π -минимума составляет $g \approx 0.13$. При этом минимум достигается в точке $z \approx 11.85$ ($\varphi = \sqrt{2gz} \approx 1.92\pi$), а значение в нем составляет $\epsilon \approx 0.037$ (рис. 7). Фокусирующее поле $g \approx 0.45$ согласовано со сгустком в целом (минимальные колеба-

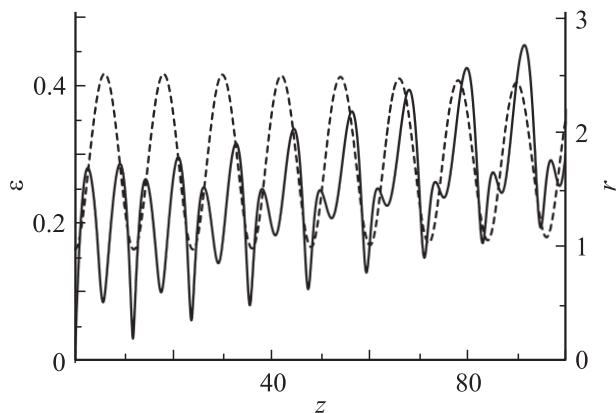


Рис. 7. Совместный эффект: ϵ (сплошная линия) и среднеквадратичный размер (пунктир) r сгустка в канале с $g = 0.13$.

ния размера) и оптимально для эмиттанса в максимумах. Полученное значение $\epsilon \approx 0.2$.

Неоднородный канал

Простейший неоднородный канал состоит из двух одинаковых пустых промежутков длиной z_0 каждый и тонкой фокусирующей линзы между ними силой D (рис. 8). Для упрощения анализа зафиксируем главную траекторию $x = 1, x' = 0$ на входе и выходе. Аналогично однородному каналу будем считать, что слой с координатой ξ движется по главной траектории. Основное отличие тут в том, что решение не может быть найдено аналитически. Можно, однако, найти x' соседних слоев в конце канала с точностью до главного члена ([3, 3.4]) и далее, вычислив интеграл по ξ от $\langle x'x' \rangle$ и $\langle x'^2 \rangle$, оценить эмиттанс. Наконец, надлежит найти оптимум эмиттанса по ξ , что тут же даст оптимальные значения D и z_0 . Полученные значения: $D \approx 0.251\sqrt{j}/r$, $z_0 \approx 10.24r/\sqrt{j}$ и $\epsilon \approx 0.0245r\sqrt{j}$.

Для уточнения коэффициентов, как обычно, был модифицирован код „Butterfly“. Отличие нового кода „ButterflyN“ в том, что сгусток движется в пустом пространстве, а в середине канала — фокусируется тонкой линзой. Кроме того, для каждой заданной полудлины оптимизировалась сила линзы. Задавалось лишь начальное состояние пучка, но не конечное. Результат численного моделирования представлен на рис. 9. Видно, что оптимальная полудлина составляет $z_0 \approx 7$, при этом оптимальная сила линзы $D \approx 0.381$, а значение эмиттанса $\epsilon \approx 0.030$. Заметим, что оптимальная длина ($2z_0$) и значение эмиттанса близки к таковым в однородном канале, 14.2 и 0.023 соответственно. Оптимальный эмиттанс мало изменяется в пределах $z_0 = 6-15$. Оптимальная сила линзы хорошо аппроксимируется выражением $D = 3.184/(z_0 + 0.7153)$ (ромбы на рис. 9).

Чтобы получить аналогичные результаты для пучка, неоднородного только в поперечном сечении, был модифицирован код „Hook“. Новый код „HookN“ отличается

от старого тем же, чем „ButterflyN“ от „Butterfly“. Результаты моделирования показаны на рис. 10. Оптимальная полудлина канала составляет $z_0 \approx 4$, сила линзы при этом $D \approx 0.688$, а эмиттанс в конце канала $\epsilon \approx 0.0144$. В отличие от предыдущего случая минимум эмиттанса выражен более ярко. Если z_0 лежит в пределах 3.5–10 и сила линзы оптимальна, $D = 2.966/(z_0 + 0.7174)$ (ромбы на рис. 10), эмиттанс мало отличается от оптимального.

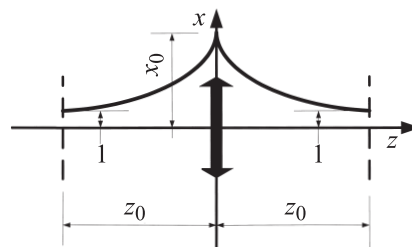


Рис. 8. Движение сгустка в простейшем неоднородном канале.

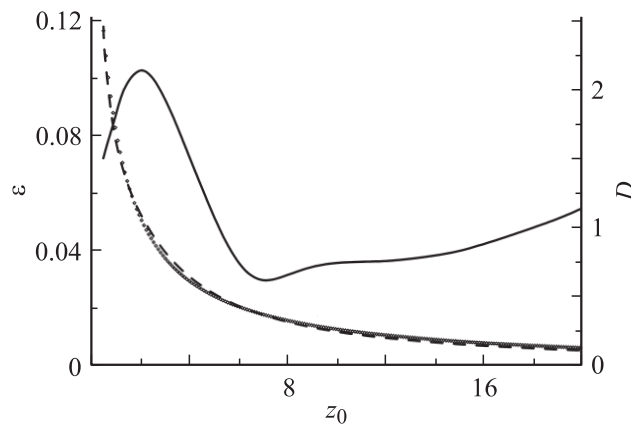


Рис. 9. Продольная неоднородность: оптимальная сила линзы D (пунктир) и ϵ в конце канала (сплошная линия) в зависимости от его полудлины.

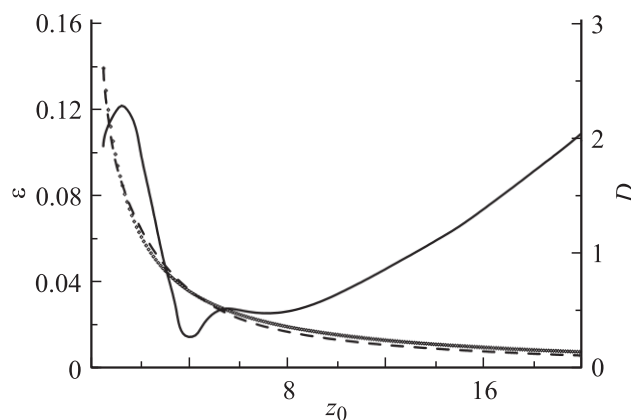


Рис. 10. Поперечная неоднородность: оптимальная сила линзы D (пунктир) и ϵ в конце канала (сплошная линия) в зависимости от его полудлины.

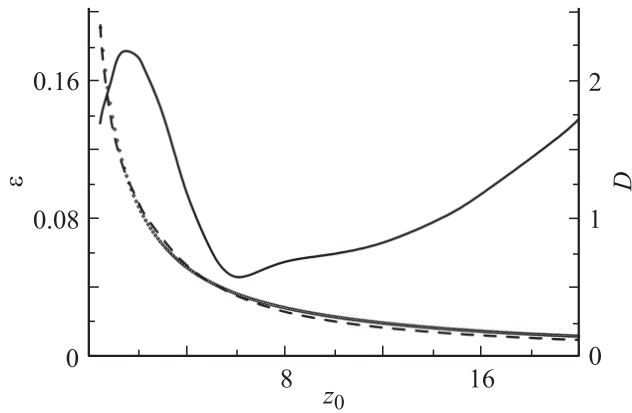


Рис. 11. Совместный эффект: оптимальная сила линзы D (пунктир) и ϵ в конце канала (сплошная линия) в зависимости от его полудлины.

Совместный эффект в неоднородном канале промоделирован с помощью кода „2DN“ — модификации „2D“ для неоднородного канала. Результаты показаны на рис. 11. Оптимальное значение $z_0 \approx 6$, сила линзы тогда $D \approx 0.445$, а эмиттанс $\epsilon \approx 0.0461$. Как и следовало ожидать, значение эмиттанса в оптимуме хуже, чем в обоих предыдущих случаях. Отметим, что оптимальная длина канала ($2z_0$) и эмиттанс близки к таковым, полученным с помощью „2D“ для однородного канала — 11.85 и 0.0373 соответственно. Если z_0 лежит в пределах 5–11 и сила линзы оптимальна, $D = 3.118/(z_0 + 0.8080)$ (ромбы на рис. 11), эмиттанс мало отличается от оптимального.

Группировка в согласованном канале

Группировка часто применяется в инжекторах, и потому было бы весьма полезно проанализировать ее эффект. В процессе группировки ток пучка j в (10) и (13) или \tilde{j} в (8) и (16) меняется вдоль канала. Тем не менее можно рассмотреть канал с фокусировкой, согласованной всюду с некоторым слоем (продольная неоднородность) или частицей (поперечная неоднородность или совместный эффект), т.е. пропорциональной току. В этом случае в линеаризованных уравнениях малых колебаний (13) и (16) коэффициент в правой части уже не постоянный, а при δ' по-прежнему нулевой. Аналитическое решение такого уравнения в общем случае не известно, однако возможен его анализ в адиабатическом приближении, т.е. если $\Delta j/j \ll 1$ за период малых колебаний. В результате такого анализа (подробности см. в [3, 3.7]) получено, что эмиттанс не зависит в первом приближении от коэффициента группировки $v = j_{\text{end}}/j_{\text{start}}$.

На самом деле, условие адиабатичности редко выполняется, так что аналитический результат подлежит численной проверке. Для этой цели код „Butterfly“ был модифицирован. Новый код „ButterflyJ“ варьирует ток и фокусировку вдоль канала по экспоненциальному

закону. Как обычно, $j = 1$, $x = 1$, $x' = 0$ в начале канала, причем j и g увеличиваются в v раз к его концу вне зависимости от длины L . Структура минимумов эмиттанса оказалась весьма сложной, поэтому пришлось добавить поиск минимума в области. Поиск производился спуском из узлов равномерной в логарифмическом масштабе сетки в плоскости $g-L$. Шаг сетки $\eta_{i+1}/\eta_i = 1.1$. Начальная фокусировка ограничивалась $g < 0.5$, а набег фазы в канале $4.5 < \phi < 7.9$, где

$$\begin{aligned} \phi &= \int_0^L \frac{\sqrt{j \exp(\ln(v)z/L)}}{x} dz = \int_0^L \sqrt{2g \exp(\ln(v)z/L)} dz \\ &= 2\sqrt{2g}L \frac{\sqrt{v}-1}{\ln(v)}. \end{aligned} \quad (30)$$

Результаты счета приведены на рис. 12. Оптимальная длина канала падает как $15.7/\sqrt[3]{v}$, а оптимальная начальная фокусировка колеблется в диапазоне 0.08–0.11. Если расширить область поиска, $g < 5$ и $1.5 < \phi < 12$, то результат не изменится — по-видимому, 2π -минимум глобален.

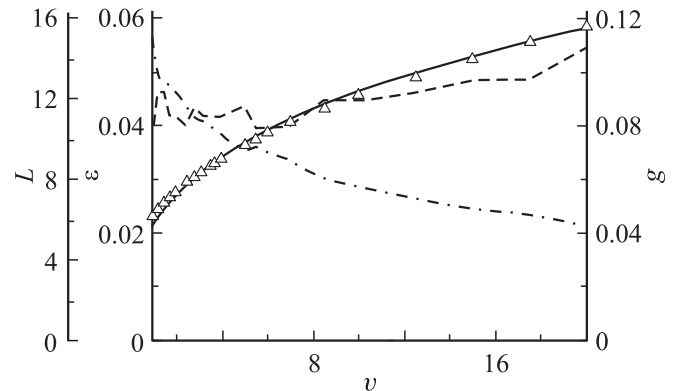


Рис. 12. Продольная неоднородность: ϵ в 2π -минимуме (треугольники; сплошная линия — $0.0215v^{1/3}$), оптимальные фокусировка g (пунктир) и длина канала L (штрихпунктир) в зависимости от коэффициента группировки.

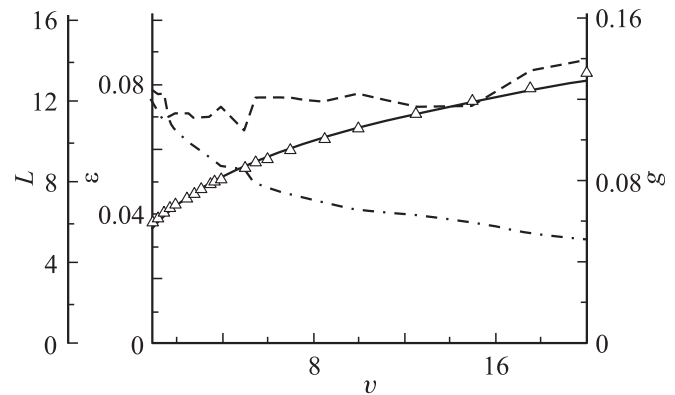


Рис. 13. Совместный эффект: ϵ в 2π -минимуме (треугольники; сплошная линия — $0.0349v^{0.28}$), оптимальные фокусировка g (пунктир) и длина канала L (штрихпунктир) в зависимости от коэффициента группировки.

Однородный в продольном направлении пучок не может быть сгруппирован, так что эффект поперечной неоднородности вряд ли может представлять интерес в данном случае. Поэтому перейдем к совместному эффекту при группировке. Для моделирования эффекта код „2D“ был модифицирован точно так же, как „Butterfly“ в предыдущем случае. Результаты, полученные с помощью нового кода „2DJ“, приведены на рис. 13. Ограничения по g и ϕ — те же, что и в предыдущем случае. Оптимальная длина канала падает как $12.7 v^{-0.28}$, а оптимальная начальная фокусировка изменяется в диапазоне 0.10–0.14. Значительное расширение области поиска не изменяет результат.

Ускорение в согласованном канале

Ускоряющая секция, установленная после группирователя или пушки, также вносит вклад в эмиттанс вплоть до энергии, определяемой из (3)–(5). Как и в предыдущем разделе, рассмотрим канал с ускорением, фокусировка в котором всюду согласована с одним слоем или одной частицей. В данном случае $g \propto (\beta\gamma)^{-3}$. В уравнении малых колебаний будут теперь как правая часть, так и член с δ' , причем все коэффициенты переменные. Опять-таки, в адиабатическом приближении, если $\Delta(\beta\gamma)/(\beta\gamma) \ll 1$ за период малых колебаний, можно проанализировать это уравнение (подробности см. в [3]). В таком приближении нормализованный эмиттанс $\varepsilon_n \propto \alpha^{-1/4}$, где $\alpha = (\beta\gamma)_{\text{end}}/(\beta\gamma)_{\text{start}}$ — коэффициент ускорения.

Для численной проверки этого результата код „Butterfly“ был модифицирован. Новый код „ButterflyA“ увеличивает продольный импульс частиц линейно вдоль канала. Как обычно, $j = 1$, $\beta\gamma = 1$, $x = 1$, $x' = 0$ в начале канала; $\beta\gamma$, j и g изменяются следующим образом:

$$\beta\gamma = 1 + (\alpha - 1)z/L, \quad (31)$$

$$j = \frac{I}{I_0(\beta\gamma)^3} = \frac{j_0}{(\beta\gamma)^3},$$

$$g = \frac{g_0}{(\beta\gamma)^3}.$$

Для каждого слоя решается следующая нелинейная система уравнений:

$$\begin{cases} x' = \frac{x_1}{\beta\gamma}, \\ x_1' = \beta\gamma \left(\frac{j}{2x} - gx \right) = \frac{1}{(\beta\gamma)^2} \left(\frac{j_0}{2x} - g_0 x \right). \end{cases} \quad (32)$$

Нормализованный наклон $x_1 \equiv \beta\gamma x'$ используется для вычисления нормализованного эмиттанса. В остальном код подобен „ButterflyJ“. Результаты моделирования для 2π -минимумов приведены на рис. 14.

Оптимальная длина канала растет как $L \approx 11.96 + 6.05\alpha$, а начальная фокусировка колеблется в пределах 0.10–0.16. Как и в двух предыдущих случаях, расширение области поиска результат не меняет.

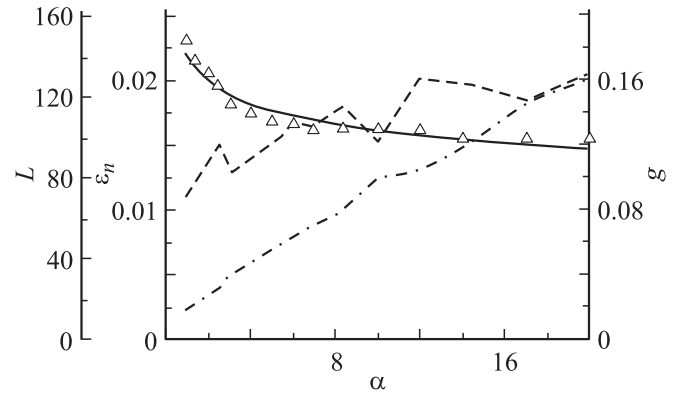


Рис. 14. Продольная неоднородность: ε_n в 2π -минимуме (треугольники; сплошная линия — $0.0220\alpha^{-0.136}$), оптимальные фокусировка g (пунктир) и длина канала L (штрихпунктир) в зависимости от коэффициента ускорения.

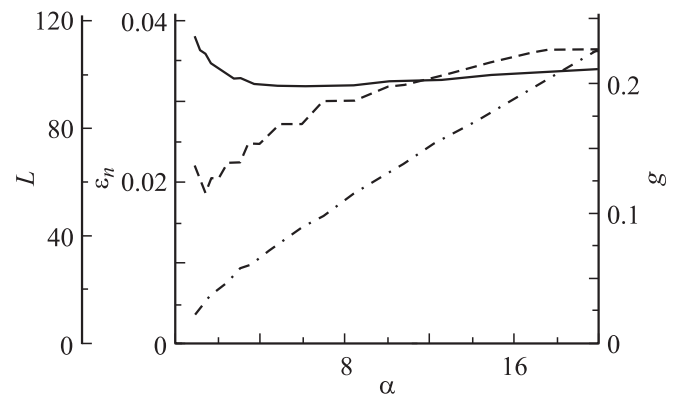


Рис. 15. Совместный эффект: ε_n в 2π -минимуме (сплошная линия) и оптимальные фокусировка g (пунктир) и длина канала L (штрихпунктир) в зависимости от коэффициента ускорения.

Рассмотрим теперь совместный эффект в том же приближении. Для этого код „2D“ был модифицирован в точности так же, как и „Butterfly“ в предыдущем случае. Результаты нового кода „2DA“ показаны на рис. 15. Оптимальная длина канала растет как $L \approx 10.89 + 5.03\alpha$, а оптимальная начальная фокусировка как $g \approx 0.115\alpha^{0.227}$. При этом нормализованный эмиттанс практически не зависит от α и составляет ≈ 0.035 .

Параметры оптимальных каналов

Для удобства восприятия формулы и для всех описанных выше каналов собраны в данном разделе, а численные коэффициенты в них сведены в табл. 1. Нормализованный эмиттанс в 2π -минимуме может быть оценен как

$$\varepsilon_n \approx \varepsilon^c r \sqrt{\frac{|I|}{I_0\beta\gamma}}. \quad (33)$$

Таблица 1. Параметры оптимальных каналов

Параметр	Однородный канал		
	Продольная неоднородность	Поперечная неоднородность	Совместный эффект
ϵ^c	0.023	0.0079	0.037
g^c	0.09	0.38	0.13
L^c	14.2	7.15	11.85
Простейший неоднородный канал			
ϵ^c	0.030	0.0144	0.0461
D^c	0.381	0.688	0.445
L^c	14.0	8.0	12.0
Распределенная фокусировка: группировка			
ϵ^c	0.0215 $\sqrt[3]{v}$		0.0349 $v^{0.28}$
g^c	0.08–0.11		0.10–0.14
L^c	15.7/ $\sqrt[3]{v}$		12.7 $v^{-0.28}$
Распределенная фокусировка: ускорение			
ϵ^c	0.0220 $\alpha^{-0.136}$		0.035
g^c	0.1–0.16		0.115 $\alpha^{0.227}$
L^c	11.96 + 6.05 α		10.89 + 5.03 α

Длина оптимального канала составляет

$$L \cong L^c r \sqrt{\frac{|I|}{I_0(\beta\gamma)^3}}. \quad (34)$$

Распределенная фокусировка в согласованном канале должна быть

$$g \cong \frac{g^c}{r^2} \frac{|I|}{I_0(\beta\gamma)^3}. \quad (35)$$

Для силы линзы в середине простейшего неоднородного канала справедливо выражение

$$D \cong \frac{D^c}{r} \sqrt{\frac{|I|}{I_0(\beta\gamma)^3}}. \quad (36)$$

Если энергия или ток пучка изменяются вдоль канала, все параметры относятся к его началу. Приведенные формулы и коэффициенты могут быть также использованы в качестве начального приближения для прецизионной численной оптимизации каналов.

Эффект собственного заряда в электронных пушках

Нормализованный ток j и, следовательно эффект собственного заряда, наиболее сильны у эмиттера, где энергия частиц минимальна. К сожалению, модель малых зарядовых колебаний, описанная выше, не работает в этой области по следующим причинам.

1. Вблизи эмиттера всегда расположены проводящие электроды, формирующие оптику источника. Распределение заряда на них зависит от распределения заряда в

пучке, а поле, ими создаваемое, сравнимо с собственным полем пучка.

2. Если пучок нестационарный (состоит из сгустков), то всегда найдется область, где энергия частиц достаточно мала, и длина сгустка в сопровождающей системе сравнима с поперечным размером.

3. Голова и хвост сгустка движутся в разных условиях: когда голова уже появилась, хвоста еще нет, т. е. вблизи эмиттера хвост испытывает влияние собственного заряда головы, но не наоборот. Когда сгусток уже сформировался, в каждый момент времени энергия головы выше, чем хвоста, так что влияние хвоста на голову сильнее, чем наоборот.

Если эмиттер круглый и однородный, а пучок стационарный, геометрия пушки может быть оптимизирована так, чтобы собственный заряд вовсе не ухудшал эмиттенс. Пример — известная пушка Пирса [11]. Продольная неоднородность заряда всегда ухудшает эмиттанс, так как пушка оптимальна только для одного значения тока, и фазовые портреты слоев с другими токами искривлены и развернуты относительно оптимального.

Траектории частиц в пушке сохраняются, если напряжение и ток меняются в соответствии с законом „трех вторых“ $I \propto U^{3/2}$ (в нерелятивистском случае). Тогда эмиттанс (не нормализованный!) не зависит от тока, а нормализованный ток

$$\beta\gamma \cong \sqrt{2eU/mc^2} \propto \sqrt{U} \Rightarrow j = \frac{I}{I_0(\beta\gamma)^3} \propto \frac{U^{3/2}}{U^{3/2}} = \text{const}, \quad (37)$$

т. е. коэффициент качества пушки $\epsilon/(r\sqrt{j})$ определяется только ее геометрией и не зависит от напряжения. В то же время яркость $I/\epsilon_n^2 \propto \sqrt{U}$. Если все размеры изменяются пропорционально и плотность тока с эмиттера фиксирована, $\epsilon \propto r$, $I \propto r^2$, $U \propto r^{4/3}$, где r — радиус эмиттера, так что показатель качества

$$\frac{\epsilon}{r\sqrt{j}} \propto \frac{r(\beta\gamma)^{3/2}}{r\sqrt{I}} \propto \frac{U^{3/4}}{r} = \text{const}. \quad (38)$$

Яркость в этом случае $\propto \sqrt{U}/r^2$, но напряжение и плотность тока ограничены электропрочностью и эмиссионной способностью.

Так как основной масштаб уже известен, остается лишь определить коэффициент при $r\sqrt{j}$ в выражении для эмиттанса и оптимальное отношение длины пушки и размера эмиттера. Другой важный параметр — зарядовая фаза на выходе из пушки, поскольку суммарный набег фазы до высокоэнергетической части ускорителя должен составлять $2\pi n$.

Используем SAM [12] — двумерный стационарный код — для определения названных параметров пушек. С помощью него вычислим, как меняется фазовый портрет пучка на выходе пушки в зависимости от тока. Сопоставим каждый такой портрет со слоем, несущим соответствующий ток, а отсюда найдем искомые параметры сгустка с заданным пиковым током.

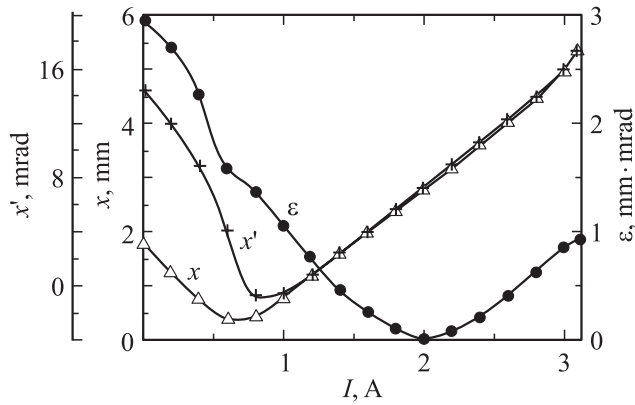


Рис. 16. Параметры пучка пушки в зависимости от силы тока: среднеквадратичный размер x ; наклон x' и эмиттанс ε .

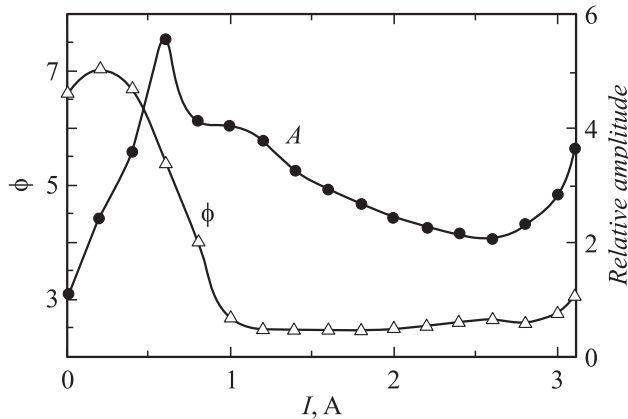


Рис. 17. Зарядовая фаза ϕ и относительная амплитуда A на выходе пушки в зависимости от силы тока.

Первый объект для исследования — диодная пушка с расстоянием между электродами 123 mm и диаметром эмиттера 10 mm; пучок наблюдался на расстоянии 200 mm от катода. Геометрия подобрана так, чтобы первеанс соответствовал „естественному“ и оптика была идеальна для „естественного“ тока. Параметры пучка такой пушки показаны на рис. 16. Из этих зависимостей можно извлечь фазу и относительную амплитуду малых зарядовых колебаний

$$\phi = \arctan\left(\frac{-C'x}{C\sqrt{j}}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{\partial x'}{\partial I} - \frac{x'}{x} \frac{\partial x}{\partial I}}{\left(\frac{1}{2I} - \frac{1}{x} \frac{\partial x}{\partial I}\right)\sqrt{j}}\right), \quad (39)$$

$$A = \sqrt{\left(\frac{2I}{x} \frac{\partial x}{\partial I} - 1\right)^2 + j \left(2I \left(\frac{\partial x'}{\partial I} - \frac{x'}{x} \frac{\partial x}{\partial I}\right)\right)^2}, \quad (40)$$

а затем и эмиттанс сгустка с заданным пиковым током (подробности см. в [3]).

Фаза и амплитуда показаны на рис. 17, а эмиттанс гауссова сгустка — на рис. 18. Видно, что фаза практически постоянна при изменении тока от 1 до 3 А и составляет $\approx 2.5\pi$. Тогда следует ожидать, что, добавив идеальный однородный канал с набегом фазы $\approx 1.2\pi$,

минимизируем эмиттанс сгустка. Для согласования расходящегося пучка с каналом нужно добавить тонкую линзу.

Остается ответить на три вопроса:

- (i) какой пиковый ток сгустка оптимален в данной системе;
- (ii) какой слой должен быть согласован с дополнительным каналом;
- (iii) какой набег фазы канала оптимален.

Для заданного пикового тока варьируем набег фазы в канале и согласованный ток, и находим минимум эмиттанса такой системы. Эти данные представлены на рис. 19, ε/\sqrt{j} в данном случае почти не зависит от пикового тока в пределах 1–3 А и составляет $\approx 2 \cdot 10^{-4}$ м без учета эмиттансов слоев и $\approx 4 \cdot 10^{-4}$ м с ними. Так как среднеквадратичный размер пучка у эмиттера составляет $x = r/2 = 2.5$ mm, коэффициент качества пушки ≈ 0.08 и ≈ 0.16 соответственно. Влияние неидеальности дополнительного канала можно оценить

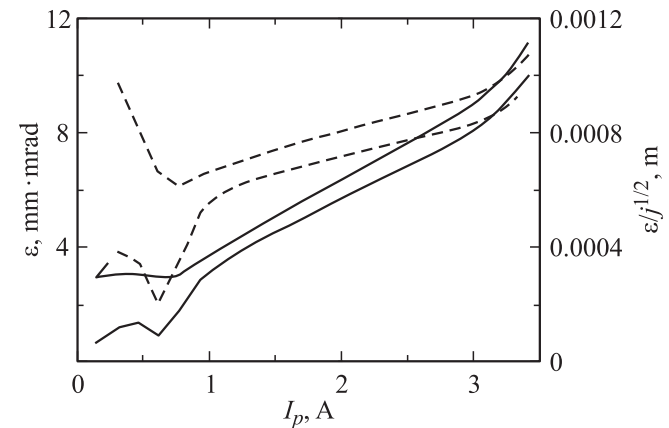


Рис. 18. Эмиттанс гауссова сгустка ε на выходе пушки (сплошная линия) и ε/\sqrt{j} (пунктир) в зависимости от пикового тока. Верхние кривые учитывают эмиттансы слоев.

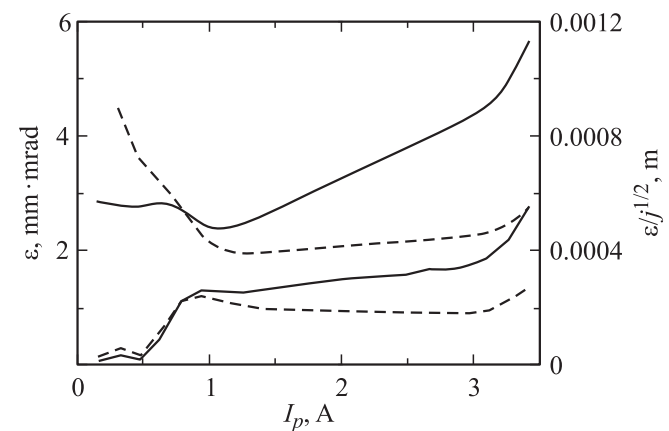


Рис. 19. Эмиттанс гауссова сгустка на выходе оптимальной системы (сплошная линия) и ε/\sqrt{j} (пунктир) в зависимости от пикового тока. Верхние кривые учитывают эмиттансы слоев.

Таблица 2. Параметры оптимальных пушек

Пушка	Длина, mm	Точка наблюдения, mm	U , kV	ϕ	ε/\sqrt{J} , m	ε/\sqrt{J} (слой), m
Основная	123	200	300	2.5	$2 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$
Короткая	61.5	100	150	2.2	$7.5 \cdot 10^{-5}$	$4.8 \cdot 10^{-4}$
Короткая 2	61.5	100	300	2	$2.5 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$
Длинная	246	400	850	2.5	$4 \cdot 10^{-4}$	$5.4 \cdot 10^{-4}$
Длинная 2	246	400	300	3.1	$1.2 \cdot 10^{-4}$	$4.6 \cdot 10^{-4}$

из (23), (33) и табл. 1:

$$0.023 \frac{x_1}{x} a^3 \frac{\varphi}{2\pi} \approx 0.27, \quad (41)$$

где x_1 — размер согласованного слоя на выходе пушки, a — относительная амплитуда зарядовых колебаний, а ϕ — набег фазы в канале. Таким образом, ухудшение эмиттанса в „фазирующем“ канале больше, чем в самой пушке, но это ухудшение обусловлено самой пушкой, а именно несогласованной фазой на ее выходе и большой амплитудой зарядовых колебаний.

Для оценки влияния геометрии на эмиттанс были рассмотрены еще четыре пушки — модификации описанной. Размер катода у всех одинаков, а расстояние между электродами и их форма — разные. В каждом случае геометрия оптимизирована для тока 2 А. Результаты по всем пушкам с присоединенным идеальным каналом сведены в табл. 2. Последняя колонка учитывает эмиттансы слоев. Фаза на выходе варьируется от 2 до 3.1, а эмиттанс $\varepsilon/\sqrt{J} = (4.7 \pm 0.7) \cdot 10^{-4}$ м. Все это справедливо в диапазоне пиковых токов 1–3 А.

Таким образом, эмиттанс пушки может быть значительно улучшен добавлением оптимального канала. Ожидаемый нормализованный эмиттанс такой системы с неидеальным каналом составляет

$$\varepsilon_n \approx 0.45 x_e \sqrt{\frac{I}{I_0 \beta \gamma}} = 0.225 r_e \sqrt{\frac{I}{I_0 \beta \gamma}}, \quad (42)$$

где r_e — радиус эмиттера, а x_e — среднеквадратичный размер пучка на катоде. Набег фазы в „фазирующем“ канале должен быть 1.05 – 1.35π . Он должен быть согласован с током 0.5 – 0.75 от пикового тока сгустка.

Выводы

1. Эмиттанс пучка на выходе аксиально-симметричного канала с преобладанием собственного заряда может быть значительно уменьшен оптимизацией параметров канала из-за когерентности зарядовых колебаний.

2. Наименьший эмиттанс достигается при набеге зарядовой фазы в канале $\approx 2\pi$. Эмиттанс растет примерно как n в $2n\pi$ -минимумах. Эмиттанс в $(2n + 1)\pi$ -минимумах всегда больше, чем в $2n\pi$ -минимумах.

3. Как правило, продольная неоднородность заряда сильнее влияет на эмиттанс, чем поперечная.

4. Результат почти не зависит от типа фокусировки — распределенной или сосредоточенной.

5. Нормализованный эмиттанс слабо зависит от группировки или ускорения в канале, как $v^{0.28-0.33}$ или $\alpha^{-0.136-0}$, где v и α — коэффициенты группировки и ускорения соответственно.

6. Действие продольной неоднородности заряда также превалирует в пушках. Эмиттанс пучка в этом случае может быть значительно улучшен добавлением оптимального канала на выходе пушки.

7. Параметры оптимального канала, полученные по приведенным формулам, могут быть использованы как начальные приближения при численной оптимизации реального канала.

Работа финансировалась Институтом ядерной физики им. Г.И. Будкера СО РАН.

Список литературы

- [1] *Kapchinskii I.M., Vladimirovskii V.V.* // Proc. Int. Conf. on High-Energy Acc. and Instrum. CERN. Geneva, 1959. P. 274.
- [2] *Miginsky S.V.* // NIM. A. 2006. Vol. 558. P. 127.
- [3] *Miginsky S.V.* Space charge effect, coherence of charge vibration and emittance. Prepr. Budker INP N 2007-11. Novosibirsk, 2007. 56 p.
- [4] *Carlsten B.E.* // NIM. A. 1989. Vol. 285. P. 313.
- [5] *Serafini L., Rosenzweig J.* // Phys. Rev. E. 1997. Vol. 90. P. 7565.
- [6] *Miginsky S.V.* // NIM. A. 2007. Vol. 575. P. 234.
- [7] *Miginsky S.V.* // XX Russ. Conf. on Charged Particle Accelerators RuPAC-2006. Novosibirsk, Russia, 2006. P. 106–108.
- [8] *Miginsky S.V.* // Asian Particle Accelerator Conf. APAC 2007. Indore, India, 2007. P. 360–362.
- [9] *Брук Г.* Циклические ускорители заряженных частиц. М.: Атомиздат, 1970. 313 с. (*H. Bruck. Accélérateurs Circulaires de Particules. Presses Universitaires de France, 1966*).
- [10] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика: Механика. Т. 1. М.: Наука, 1988. 215 с.
- [11] *Pierce J.R.* Theory and Design of Electron Beams. Princeton, New Jersey: Van Nostrand, 1954. 222 p.
- [12] *Fomel B.M., Tiunov M.A., Yakovlev V.P.* SAM — an Interactive Code for Evaluation of Electron Guns. Prepr. Budker INP N 96-11. Novosibirsk, 1996. 56 p.