

01;05

Деформация круговой мембраны из ферроэласта в однородном магнитном поле

© Ю.Л. Райхер,¹ О.В. Столбов,¹ Г.В. Степанов²¹ Институт механики сплошных сред УрО РАН,
614013 Пермь, Россия² Московский государственный научно-технический институт химии и технологии элементоорганических соединений,
111123 Москва, Россия
e-mail: sov@icmm.ru

(Поступило в Редакцию 15 октября 2007 г.)

В рамках континуальной модели нелинейной магнитоупругости рассмотрен эффект потери устойчивости плоской конфигурации тонкой пластины (мембраны) из мягкого ферроэласта, закрепленной по ободу, в магнитном поле, перпендикулярном ее поверхности. Найдена связь поля порога неустойчивости с магнитными и геометрическими параметрами мембраны, выполнен расчет надкритической формы (купол). Теоретические результаты хорошо согласуются с экспериментом без использования подгоночных параметров.

PACS: 46.25.Hf, 62.25.+g, 75.50.Tt, 81.05.Qk

Введение

Ферроэласты, или мягкие магнитные эластомеры (ММЭ), представляют собой композиционные магнитоуправляемые материалы, основным компонентом которых является слабосшитая высокоэластичная матрица с наполнителем из магнитных частиц микронного и субмикронного размера. Замечательным свойством этих материалов является гигантский магнитодеформационный эффект [1–5], наличием которого и обусловлен растущий интерес к их приложениям в практике [6–8]. В самом деле деформации ферроэластичных тел под действием приложенного магнитного поля на много порядков превосходят любые пьезо- и магнитострикционные эффекты в кристаллах и могут достигать десятков и даже сотен процентов. Это не должно удивлять, поскольку механизм явления не имеет отношения к кристаллофизике.

Магнитостатические напряжения (пондеромоторные силы), приложенные к диспергированным частицам (а через них — к матрице ММЭ), всегда стремятся растянуть тело вдоль направления однородного поля, а в неоднородном поле — сдвинуть и растянуть в направлении максимального градиента. Этой тенденции препятствуют упругие напряжения, стремящиеся сохранить исходную форму образца. Для ММЭ благодаря его мягкости сильное формоизменение (стрикция) в ответ на приложенное поле является „удобным“ способом понижения свободной энергии тела: пока не достигнута равновесная деформация, магнитостатический вклад снижается сильнее, чем растет упругий (высокоэластичный) [1,2,5,9–12].

Оценим значения модуля упругости, при которых магнитная стрижка в однородном и неоднородном полях достигает заметной величины. Пусть приложенное магнитное поле имеет порядок $H \sim 50\text{--}100\text{ кА/м}$ в однородном случае или имеет перепад ΔH того же по-

рядка на масштабе $l \sim 1\text{ см}$ — в неоднородном; все эти требования легко реализовать в лабораторных условиях.

В случае однородного поля заметный стрижонный эффект должен возникать в ситуации, когда магнитный и упругий вклады в плотность энергии становятся соизмеримыми. Иными словами, модуль Юнга ε и его намагниченность M в умеренных полях должны находиться в соотношении $\mu_0 M^2 \sim \varepsilon$. Принимая для намагниченности ММЭ оценку 100 кА/м , видим, что поставленное соотношение выполняется для материалов, модуль Юнга которых составляет $10\text{--}100\text{ кПа}$, т.е. на два–четыре порядка более мягких, чем обычная резина.

В неоднородном поле деформацию образца создают объемные силы. Приравняв их работу по смещению единицы объема материала на расстояние l возрастанию плотности упругой энергии, получим оценку модуля в виде $\varepsilon \sim M \Delta H$. Подстановка сюда указанных выше числовых значений дает $\varepsilon \sim 100\text{ кПа}$, что всего лишь на порядок превышает величину, найденную для случая однородного поля. Таким образом, снова приходим к выводу, что заметным деформационным откликом на умеренные магнитные поля обладают только достаточно мягкие материалы. Именно это обстоятельство и позволяет выделить ММЭ в отдельный класс, принципиально отличный от традиционных магнитных эластомеров (резины) [13,14]. Как показывают эксперименты, подходящими матрицами для создания ММЭ являются слабосшитые силиконовые каучуки [5,6,15] и полимерные гели, например, на основе поливинилового спирта [1,7] или полистирола [16].

Изучение свойств ММЭ в однородном магнитном поле наилучшим образом подходит для построения физически обоснованных моделей поведения среды, отработки численных алгоритмов расчета больших деформаций и сопоставления теоретических результатов с хорошо обусловленными измерениями, выполненными на реальных образцах.

Важно, что оба механизма, определяющие деформацию ММЭ, — магнитоэластический и упругий — по своей природе являются дальнедействующими. В результате наблюдаемые проявления магнитоэластического эффекта оказываются существенно зависящими от геометрии образца, подвергающегося намагничиванию, и от того, как направлено приложенное поле относительно геометрических осей. В работах [9–12] была рассмотрена магнитная стрижка сфер, эллипсоидов и сферических капсул из ММЭ.

В настоящей работе исследуется поведение закрепленной по ободу и намагничиваемой нормальным к ней магнитным полем H_0 круглой тонкой пластины (мембраны); далее всюду эти термины считаются синонимами.

Указанная задача существенно отличается от прежде изученных. Дело в том, что для свободных осесимметричных тел (сфера, эллипсоид) вопрос о том, как развивается магнитодеформационный эффект, в принципе тривиален: тело начинает вытягиваться в направлении H_0 уже в сколь угодно малом поле, степень удлинения $\lambda(H_0)$ — гладкая функция. В случае плоской мембраны симметрия по намагничиванию ($H_0 \leftrightarrow -H_0$) приводит к возникновению конечного порога: при $H_0 < H_{0c}$ деформация практически отсутствует, но резко возрастает при $H_0 > H_{0c}$. Иными словами, в полях, ниже критического, мембрана неподвижна и остается плоской. По достижении критического поля она начинает изгибаться, образуя купол, причем направление прогиба заранее не задано (вырождено).

1. Постановка задачи

В работе [10] построена система уравнений, описывающая мягкий магнитный эластомер как намагничивающийся упругий континуум, и в рамках этой модели предложен способ расчета равновесного магнитодеформационного поведения тел осесимметричной формы по методу конечных элементов. Выполненное рассмотрение сплошных сфер, эллипсоидов и круговых цилиндров, а также полых сфер [10–12] позволило построить качественно правильную картину формоизменения указанных объектов в однородном магнитном поле и объяснить ряд имеющихся экспериментальных данных.

В самых общих чертах, просуммировав теоретические результаты, можно сказать, что образец со свободной поверхностью (закрепленный), имеющий любую из перечисленных выше форм, при намагничивании удлиняется в направлении приложенного внешнего поля H_0 , сохраняя все элементы исходной группы симметрии. Последнее обстоятельство кажется очевидным, поскольку магнитодеформационный эффект, конечно, инвариантен относительно инверсии H_0 . Однако и в этих условиях оказывается возможной ситуация, когда при сохранении магнитной четности ($H_0 \leftrightarrow -H_0$) возникает спонтанное нарушение геометрической симметрии тела.

В настоящей работе решена задача определения формы, которую в ответ на приложенное однородное поле принимает плоская круглая мембрана из ММЭ, закрепленная без напряжения по внешнему ободу. Сила тяжести отсутствует, поле направлено перпендикулярно плоскости мембраны. Ограничимся, как и ранее, аксиально-симметричной относительно H_0 постановкой, т.е. исключим из рассмотрения возмущения формы по азимутальной координате. Тем самым предполагаем, что тело сохраняет осевую симметрию относительно H_0 как в начальном состоянии, так и при любом значении этого поля. Важно, однако, что условие вращательной инвариантности тела никак не связано с наличием у него плоскости симметрии, перпендикулярной оси вращения. Иными словами, решение задачи допускает как группу симметрии: $D_{\infty h}$ (вращение + плоскость симметрии), так и C_{∞} (только вращение на произвольный угол).¹ Тот факт, что во всех ранее решенных задачах реализовались исключительно ситуации, где сохранялась группа симметрии $D_{\infty h}$, фундаментального значения не имеет.

Рассмотрим круглую мембрану конечной толщины с неподвижной внешней границей. Геометрически она представляет собой круговой цилиндр с большим отношением диаметра основания d к высоте h . Противоположному аспектовому отношению ($d/h \ll 1$) отвечает длинный тонкий цилиндр. Вполне очевидно, что в тонком цилиндре, намагничиваемом вдоль оси, поле H_0 индуцирует внутреннее магнитное поле, создающее силы, способствующие дальнейшему уменьшению продольного размагничивающего фактора, т.е. способствует продольному растяжению. Именно к такому результату приводит и количественный расчет по нашей модели [18], при этом группой симметрии решения остается $D_{\infty h}$. В случае тонкого плоского цилиндра указанный магнитоэластический эффект, разумеется, также имеет место. Более того, если допустить, что на тело наложено требование сохранения группы симметрии $D_{\infty h}$, то указанная деформация будет единственно возможной. Однако в условиях, когда большая часть поверхности намагничиваемого тела расположена перпендикулярно направлению приложенного поля, имеется более эффективный способ минимизации магнитоэластической энергии. Поясним его на примере пленки или границы раздела магнитной жидкости. Поскольку оптимальным является вытягивание вдоль поля, то магнитная жидкость, пользуясь „энергетической дешевизной“ увеличения своей поверхности, образует пики или складки, т.е. конфигурации, которые своим основным измерением вытянуты вдоль направления поля (см. [19]). В плоской ячейке с магнитной жидкостью в нормальном поле деформация поверхности создается по типу мягкой неустойчивости, но иногда имеет и жесткий (гистерезисный) характер.

Для мембраны, закрепленной по ободу, образование складок затруднено граничными условиями. Однако и при этом ограничении легко указать выгодную моду

¹ В обозначениях групп симметрии мы следуем книге [17].

деформации — прогиб мембраны как целого. В этом случае касательная ν к поверхности повернута к полю под углом, меньшим $\pi/2$, и магнитоэластическая энергия локально уменьшается в меру проекции ν на H_0 . В то же время возникающие градиенты деформации имеют минимально возможную величину. При отсутствии силы тяжести (мы полагаем, что поле направлено по вертикали) прогибы мембраны вверх или вниз энергетически эквивалентны. Такое вырождение — оно имеет близкую аналогию с условием магнитного перехода Фредерикса в пленке нематического жидкого кристалла [20] — должно приводить к появлению конечного значения порогового поля H_{0c} . При этом в отсутствие внешних возмущений потерявшая устойчивость мембрана выберет направление прогиба случайным образом.

2. Оценка критического поля магнитной деформации мембраны

Как было отмечено выше, принципиальный вывод о пороговом характере магнитоэластического эффекта в мембране следует из симметричных соображений. В этом разделе будет получена приближенная количественная оценка величины поля, при которой плоская конфигурация мембраны становится неустойчивой. Обозначим через ξ координату средней линии мембраны в направлении, перпендикулярном ее равновесному положению. Тогда, согласно классической теории [21] для упругой энергии (E_{el}) слабого изгиба тонкой несжимаемой пластины в цилиндрической системе координат, имеем

$$E_{el} \sim \varepsilon h^3 \int_0^{d/2} [\xi''(\rho)]^2 \rho d\rho, \quad (1)$$

где штрих обозначает производную по ρ . С другой стороны, для намагничивающейся пластины магнитоэластическая энергия локально уменьшается с увеличением угла α между нормалью к мембране и приложенным полем H_0 , а именно $E_{magn} \sim -\alpha^2$. Учитывая, что при малых прогибах мембраны $\alpha \approx \xi'$, магнитную энергию можно записать в виде

$$E_{magn} \sim -hM^2(H) \int_0^{d/2} (\xi')^2 \rho d\rho, \quad (2)$$

где H — поле внутри пластины, а функция $M(H)$ — намагниченность материала, который полагается магнитомягким. В результате суммарная энергия мембраны при нарушении плоской конфигурации принимает вид

$$E \sim h \int_0^{d/2} (\varepsilon h^2 \xi''^2 - A^2 M^2 \xi'^2) \rho d\rho, \quad (3)$$

где A — числовой коэффициент.

Учитывая, что края мембраны закреплены, подставим возмущение поверхности в виде цилиндрической волны $\xi = \xi_0 \cos(\pi n/d)$, где n — целое нечетное число. После интегрирования имеем

$$E \sim \left[\varepsilon h^2 \frac{(\pi n)^2}{d^2} - A^2 M^2 \right] (\pi n \xi_0)^2 h. \quad (4)$$

Видно, что выражение в квадратных скобках может стать отрицательным, т.е. плоская мембрана может потерять устойчивость, только при конечных значениях магнитного поля. Минимальному критическому полю соответствует мода возмущения с $n = 1$, так что для оценки первого порогового значения получим уравнение

$$M(H_c) = k \sqrt{\varepsilon} \frac{h}{d}, \quad (5)$$

где $k \sim 1/A$. В случае линейного закона намагничивания $M = \chi H$ из (5) сразу находим

$$H_c = k \frac{\sqrt{\varepsilon} h}{\chi}. \quad (6)$$

Выше магнитная энергия была представлена в терминах внутреннего поля H , которое в случае пластины как раз наиболее сильно отличается от приложенного H_0 . Принимая, что размагничивающий фактор пластины в поперечном направлении (вдоль магнитного поля) равен единице, находим, что внутреннее и приложенное поля связаны соотношением $H = H_0/(1 + \chi)$. Применительно к внешнему полю оценка (6) принимает вид

$$H_{0c} = k \sqrt{\varepsilon} (1 + \chi^{-1}) \frac{h}{d}, \quad (7)$$

который более удобен для сопоставления с результатами измерений и численных расчетов. Заметим, что предсказываемая формулой (7) связь критического поля с основными параметрами задачи вполне соответствует интуитивным ожиданиям, а именно — пороговое значение понижается с ростом магнитной восприимчивости материала и диаметра тела и, напротив — H_{0c} увеличивается при возрастании упругого модуля и толщины мембраны.

3. Численный расчет магнитной деформации мембраны

Запишем общую систему уравнений равновесия сплошной намагничивающейся среды, связав в ней две задачи: магнитоэластическую и упругую. При рассмотрении конечных деформаций необходимо ввести две конфигурации: начальную (недеформированную) и актуальную (после деформации) [22]. Соответственно радиус-вектор начальной конфигурации \mathbf{r} , а текущей — $\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{u}$, где \mathbf{u} — вектор перемещений. Векторы основного базиса в начальной конфигурации имеют вид $\epsilon_i = \partial \mathbf{r} / \partial q_i$, а в текущей — $\hat{\epsilon}_i = \partial \mathbf{R} / \partial q_i$, где

q_i — обобщенные координаты. Определим операторы Гамильтониана соотношениями $\nabla = \epsilon^i \partial / \partial q_i$ в начальной конфигурации и $\hat{\nabla} = \hat{\epsilon}^i \partial / \partial q_i$ в текущей конфигурации. Введем фундаментальную кинематическую величину — градиент места

$$\mathbf{F} = (\nabla \mathbf{R})^T = \hat{\epsilon}_i \epsilon^i = \mathbf{g} + \nabla \mathbf{u}^T, \quad (8)$$

где \mathbf{g} — метрический тензор; обратная величина имеет вид

$$\mathbf{F}^{-1} = (\hat{\nabla} \mathbf{r})^T = \epsilon_i \hat{\epsilon}^i = \mathbf{g} - \hat{\nabla} \mathbf{u}^T. \quad (9)$$

Начнем с магнитоэлектростатической части задачи. При отсутствии токов вектор напряженности магнитного поля \mathbf{H} можно представить через градиент скалярной функции ψ . Закон намагничивания ММЭ предполагаем линейным: $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$, где χ — магнитная восприимчивость. Используя условие соленоидальности магнитной индукции, имеем

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 - \hat{\nabla} \psi, \quad \hat{\nabla} \cdot \hat{\nabla} \psi = 0, \quad (10)$$

причем уравнение Лапласа должно выполняться как внутри мембраны, так и снаружи. Действуя стандартным образом, из непрерывности соответствующих компонент векторов поля получаем граничные условия для магнитоэлектростатического потенциала

$$(1 + \chi) \frac{\partial \psi^{(i)}}{\partial N} \Big|_{\Gamma} - \frac{\partial \psi^{(e)}}{\partial N} \Big|_{\Gamma} = \chi \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{N} \Big|_{\Gamma}, \quad \psi^{(i)} \Big|_{\Gamma} = \psi^{(e)} \Big|_{\Gamma}, \quad (11)$$

где $\psi^{(e)}$ и $\psi^{(i)}$ — магнитные потенциалы во внешней области и внутри образца, а \mathbf{N} — вектор внешней нормали к границе тела Γ в текущей конфигурации.

В вариационной формулировке задача магнитоэлектростатики имеет вид

$$\int_V \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{H} dV = 0. \quad (12)$$

Подставив сюда линейный закон намагничивания и связь между магнитным полем и потенциалом (10), получим

$$\int_V (1 + \chi) \nabla \psi \cdot \nabla \delta \psi dV = \int_{V^{(i)}} \chi \mathbf{H}_0 \cdot \nabla \delta \psi dV, \quad (13)$$

где интегрирование правой части проводится только по объему мембраны.

Перейдем к рассмотрению упругой задачи, используя теорию конечных деформаций несжимаемой среды. Уравнение равновесия безграничного континуума записывается в виде условия равенства нулю потока импульса по любой пробной поверхности. В дифференциальной форме, применительно к магнитоэлектростатическому материалу, получим

$$\hat{\nabla} \cdot \mathbf{T} + \mu_0 \mathbf{M} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{H} = 0. \quad (14)$$

Граничные условия ставятся на поверхности образца, которая заранее неизвестна

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{T} \Big|_{\Gamma} = \frac{1}{2} \mu_0 M_N^2 \mathbf{N} \Big|_{\Gamma}, \quad (15)$$

где $M_N = \mathbf{M} \cdot \mathbf{N}$ — нормальная компонента вектора намагниченности \mathbf{M} .

Упругий потенциал среды, которая в отсутствие деформаций и поля изотропна, с учетом зависимости параметров материала от намагниченности можно представить в виде

$$W = W(I_1(\mathbf{C}), I_2(\mathbf{C}), I_3(\mathbf{C}), M^2), \quad (16)$$

где I_1, I_2, I_3 — главные инварианты тензора. В качестве упругого потенциала для несжимаемого материала ($I_3(\mathbf{F}) = 1$) выберем потенциал Муни–Ривлина [22]:

$$W = C_1(I_1(\mathbf{C}) - 3) + C_2(I_2(\mathbf{C}) - 3) - \frac{1}{2} p(I_3(\mathbf{C}) - 1), \quad (17)$$

где p — среднее давление. Располагая выражением для упругого потенциала, можно найти тензор Пиолы–Кирхгофа II рода и тензор напряжений Коши [22]. Получаем

$$\mathbf{P}_2 = -p \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^T + 2C_1 \mathbf{g} + C_2(\mathbf{g} I_1 - \mathbf{C}),$$

$$\mathbf{T} = -p \mathbf{g} + 2(C_1 + C_2 I_1) \mathbf{B} - 2C_2 \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}, \quad (18)$$

где $\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$ — мера деформации Фингера. Применив к изучаемой системе принцип виртуальной работы, т.е. условие баланса магнитных и упругих сил, приходим к уравнению

$$\int_{V^{(i)}} \delta W = \frac{1}{2} \mu_0 \int_{\Gamma} (M_N^2 + \chi H^2) \mathbf{N} \cdot \delta \mathbf{u} dS - \frac{1}{2} \mu_0 \int_{V^{(i)}} \chi H^2 \hat{\nabla} \cdot \delta \mathbf{u} dV. \quad (19)$$

Представим напряжения в виде суммы $\mathbf{T} = \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2$, где $\mathbf{T}_1 = -p \mathbf{g} + 4C_2 \hat{\epsilon}$ — линейная по перемещениям часть тензора напряжений, а $\hat{\epsilon} = \frac{1}{2}(\hat{\nabla} \mathbf{u} + \hat{\nabla} \mathbf{u}^T)$; из инварианта $I_3(\mathbf{F})$ также выделим линейную часть.

Для интерационного решения задачи упругости запишем линеаризованную вариационную постановку:

$$\begin{aligned} & \int_{V^{(i)}} (\mathbf{T}_1 \cdot \delta \hat{\epsilon} + I_1(\hat{\epsilon}) \delta p) dV \\ & = - \int_{V^{(i)}} ((\mathbf{T}' - \mathbf{T}'_1) \cdot \delta \hat{\epsilon} + (I_3(\mathbf{F}') - I_1(\hat{\epsilon}') - 1) \delta p) dV \\ & + \frac{1}{2} \mu_0 \int_{\Gamma} (M_N^2 \mathbf{N} + \chi H^2) \delta \mathbf{u} dS - \frac{1}{2} \mu_0 \int_{V^{(i)}} \chi H^2 \hat{\nabla} \delta \mathbf{u} dV, \end{aligned} \quad (20)$$

где штрихом $(\cdot)'$ обозначено решение задачи упругости на предыдущем шаге. Таким образом, на каждом шаге процедуры решается линейная задача, но с дополнительными эффективными нагрузками, вычисляемыми по решению предыдущего шага.

Численное решение задачи магнитоупругости (уравнения (19) и (13)) проводилось посредством итерационного алгоритма, реализованного на языке метода конечных элементов FreeFEM++ (открытый код). Каждая итерация содержит следующие шаги.

1. Решение вариационного уравнения магнитостатики (13) во всей области на исходной сетке; граница расчетной области назначается на достаточно большом расстоянии от объекта, в качестве условия для потенциала выбирается дипольное приближение

$$\psi^{(e)}(\mathbf{r} \rightarrow \infty) = \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{r}/r^3, \quad \boldsymbol{\mu} = \int_{V^{(i)}} \chi \mathbf{H} dV. \quad (21)$$

Тем самым находится распределение магнитного поля как вне, так и внутри образца.

2. Решение вариационного уравнения (20) для упругих сил, линеаризованного по методу дополнительных нагрузок на той же сетке.

3. Изменение исходной сетки, получаемое сдвигом положения узловых точек в соответствии с найденными перемещениями.

При каждом значении приложенного поля указанная процедура проводится до достижения сходимости. Величина погрешности задавалась как $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}'\|$. Типичные результаты, получаемые в расчетах, показаны на рис. 1. Приведенные кривые характеризуют величину безразмерного смещения $|\Delta L|/h$ центральной точки мембраны от исходной плоскости. Для примера выбраны мембраны с одинаковым геометрическим отношением $d/h = 20$ и близкими к реальным значениями магнитной восприимчивости материала: $\chi = 2, 3$ и 4 . Как видно, во всех случаях расчет указывает на то, что прогиб возникает пороговым образом. При увеличении магнитной восприимчивости ММЭ, как и предсказывает формула (7), критическое значение поля снижается.

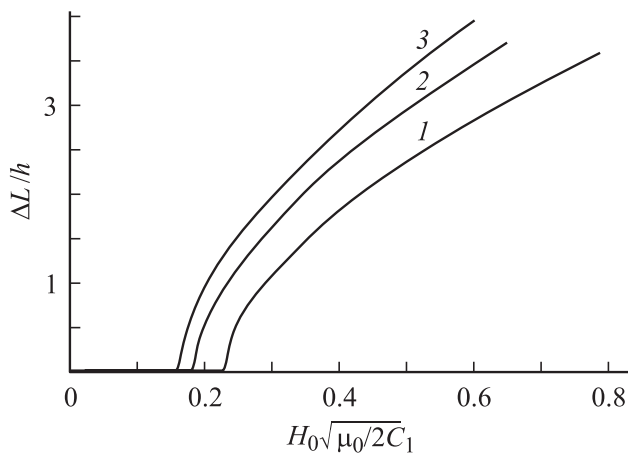


Рис. 1. Расчет абсолютной величины смещения центральной точки мембраны из начального положения равновесия в зависимости от величины приложенного поля; $d/h = 20$, магнитная восприимчивость $\chi = 2$ (1), 3 (2), 4 (3).

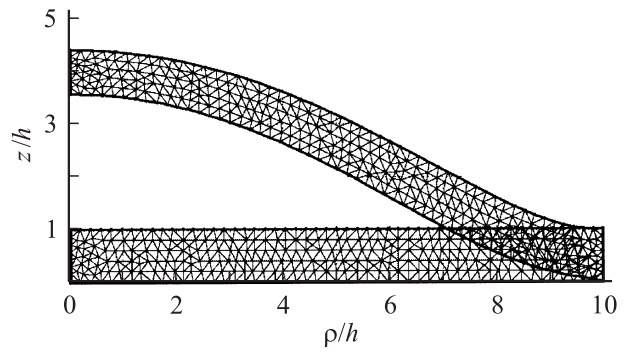


Рис. 2. Профиль осевого сечения мембраны с параметрами $\chi = 3$ и $d/h = 20$ в отсутствие поля и в поле $H_0\sqrt{\mu_0/2C_1} = 0.6$.

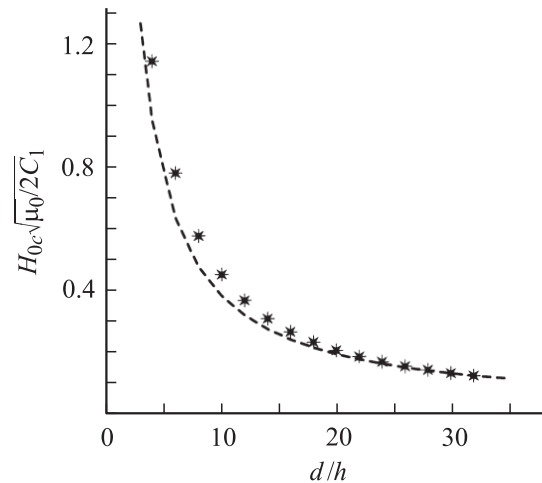


Рис. 3. Зависимость критического поля прогиба от соотношения геометрических измерений мембраны при $\chi = 2.5$: точки — численный расчет, кривая — формула (4).

На рис. 2 приведен рассчитанный указанным выше методом профиль осевого сечения мембраны с размерами $d/h = 20$ и восприимчивостью $\chi = 3$ в поле $H_0\sqrt{\mu_0/2C_1} = 0.6$, втрое превышающем оценку критического, определенную из численного расчета. Для сравнения там же представлен невозмущенный профиль, достигаемое смещение центра z/d составляет около 30%. Расчет выполнен в цилиндрических координатах с полярной осью Oz , направленной вдоль приложенного поля. Как и предсказывает качественный анализ, наблюдается односторонний прогиб мембраны (здесь — вверх), в результате чего один из элементов симметрии исходной конфигурации (отражение в плоскости $z = 0$) исчезает: деформация переводит мембрану в конфигурацию с пониженной симметрией.

Зависимость величины критического поля первой моды неустойчивости (купол) от соотношения геометрических параметров мембраны показана на рис. 3. Численный расчет выполнен при значении магнитной восприимчивости $\chi = 2.5$. Константа пропорциональ-

ности в аппроксимационной формуле определена из привязки гиперболы (7) к точке $d/h = 8$, поскольку оценка получена в приближении тонкой пластины. Как видно, имеется хорошее согласие между рассчитанными значениями и оценкой. Заметное расхождение возникает лишь для весьма „толстых“ образцов ($d/h < 4$), т.е. формула (7) имеет достаточно широкую область применимости. Последний факт нетривиален, если учесть, что в цилиндрической пластине ММЭ конечной толщины с необходимостью имеется неоднородное распределение подемоторных сил и локальных деформаций. Так, например, еще до наступления рассматриваемой неустойчивости пластина, как любой цилиндр, намагничиваемый вдоль оси, претерпевает отличную от нуля беспороговую деформацию, соответствующую вытяжке вдоль поля при заданных граничных условиях. Именно на фоне этой предварительной деформации происходят в реальности зарождение и рост купола. Успешность приближенного анализа, где пренебрегается указанным эффектом, связана, по-видимому, со следующими обстоятельствами. Во-первых, значение начальной магнитной деформации относительно мало и, во-вторых, что принципиально, деформация не нарушает инверсионную четность конфигурации мембраны. Иными словами, имеет другой тип симметрии по сравнению с изучаемым возмущением (купол).

Как видно, представленные в разд. 2 и 3 результаты приближенного и численного расчетов вполне согласуются между собой. Они доказывают, что при намагничивании закрепленной по ободу плоской мембраны из начально изотропного несжимаемого магнитоэласта прогиб является пороговым эффектом, развивающимся по типу мягкой неустойчивости (переход второго рода).

4. Эксперимент

Измерения были выполнены на серии мембран из ММЭ, представляющего собой композицию слабосшитого силиконового каучука и порошка карбонильного железа с размером частиц 2–5 μm . Синтез материала подробно описан в [5,15], измеренная кривая намагничивания представлена на рис. 4. Она слабо насыщается даже при 150 кА/м, что позволяет в этом диапазоне заменить реальный закон намагничивания квазилинейным. Для этого ход кривой $M(H)$ был спрямлен указанным на рисунке образом, найденное таким образом значение магнитной восприимчивости составило $\chi = 2.14$.

Материал изготавливался в виде лент толщиной 1–2 мм, из которых затем вырезались круги диаметрами 20–50 мм. Эти образцы вставлялись без зазора в отверстие соответствующего диаметра в листе оргстекла и крепились клеем по внешней границе ММЭ. Такая плоская ячейка в сборе закреплялась вертикально в середине межполюсного зазора лабораторного электромагнита, диаметр полюсных башмаков которого составлял 80 мм при ширине зазора 40 мм.

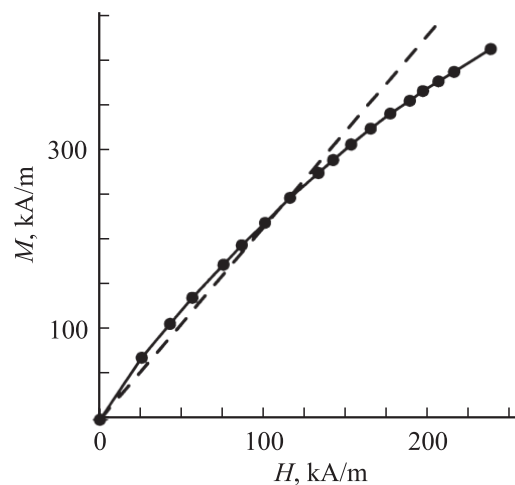


Рис. 4. Кривая намагничивания изучаемого ММЭ.

Схема эксперимента приведена на рис. 5. Как видно, средняя точка пластины из ММЭ помещена на линии, проходящей через центры полюсов электромагнита. Поскольку межполюсный зазор довольно широк, в наилучших условиях по однородности поля находятся мембраны минимального диаметра. Однако и для больших мембран (до 50 мм) подемоторные силы в объеме ММЭ, во-первых, невелики и, во-вторых, как показали наши наблюдения, благодаря симметричному размещению образца они с хорошей точностью уравниваются вдоль направления $H_0 \leftrightarrow -H_0$. В результате в подкритических полях ($H_0 < H_{0c}$) действие подемоторных сил сводится к некоторой малой (в наших измерениях — неразличимой) симметричной деформации мембраны.

Перед каждым измерением сердечник электромагнита размагничивался по стандартной процедуре для создания начального состояния с $H_0 = 0$. Точность измерения поля составляла 2%. Ток электромагнита изменялся шагами, эквивалентными повышению (понижению) поля на 10 кА/м. В процессе измерения производилось фотографирование образца с фиксированной точки „в профиль“, геометрические параметры поверхности мембраны определялись по цифровым представлениям этих

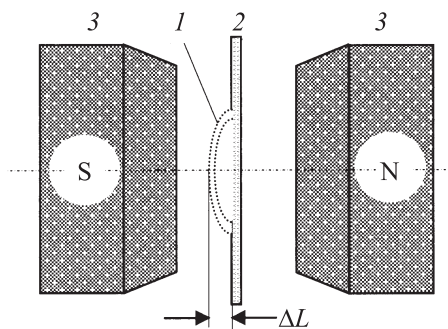


Рис. 5. Схема измерения деформации мембраны: 1 — пластинка из ММЭ, 2 — панель крепления, 3 — полюса электромагнита.

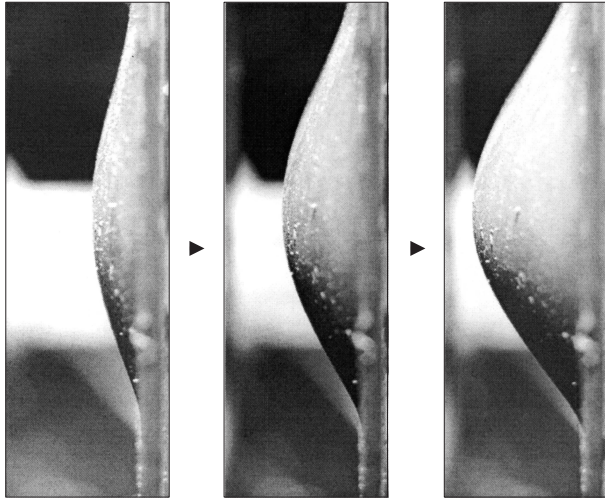


Рис. 6. Фотограмма процесса деформации мембраны; слева направо: напряженность поля равна 50, 80 и 110 кА/м.

снимков, примеры которых приведены на рис. 6. Расчет величины абсолютной деформации проводился по анализу фотографии мембраны относительно калибровочного образца с заданными размерами. Точность измерения деформации была не хуже 0.1 мм.

Цикл измерений — повышение (понижение) поля — для каждого образца повторялся несколько раз. Каждое значение поля выдерживалось постоянным в течение 30 с. Как показали контрольные наблюдения, этого достаточно, чтобы с точностью измерения образец пришел в равновесное по деформации состояние.

5. Результаты и обсуждение

Для проверки пригодности постренной теории был выбран эксперимент, проведенный с мембраной минимального диаметра — 20 мм. Как указывалось, в этом случае влияние неоднородности поля в зазоре электромагнита минимально. Из результатов разд. 3 видно, что входными параметрами модели являются значения начальной магнитной восприимчивости ММЭ, его начальный модуль упругости и аспектное отношение мембраны.

Первые два значения были найдены из независимых экспериментов. Магнитные замеры (см. рис. 4) дали $\chi = 2.14$, а из непосредственного механического измерения было получено $\varepsilon = 30$ кПа. Для нахождения первой константы Муни–Ривлина (см. формулу (17)) мы используем соотношение $C_1 = \varepsilon/6$, справедливое при малых деформациях, откуда для исследуемого ММЭ получаем $C_1 = 5$ кПа. Во вспомогательных тестах было установлено, что наш материал имеет очень низкое значение второй константы Муни–Ривлина. Это позволяет редуцировать упругий потенциал к одноконстантному приближению, положив $C_2 = 0$. Указанный набор значений был использован в численной процедуре для расчета

индуцированного однородным полем прогиба круговой мембраны с размерами $d = 20$ и $h = 1.95$ мм. Полученные результаты представлены на рис. 7 в сопоставлении и экспериментальными данными. Подчеркнем, что проведенный расчет не содержит подгоночных параметров.

Как видно, в части определения величины критического поля имеется удовлетворительное согласие теории и эксперимента: различие в значениях порогового поля не превышает 15%. Что касается зависимости высоты ΔL „купола“ от напряженности H_0 поля, рассчитанного по току в катушках электромагнита, то здесь согласие оказалось ниже. Мы видим две главные причины такого расхождения. Во-первых, поле реального электромагнита не полностью однородно. В подкритической области (пока образец остается плоским) распределение градиентных сил является симметричным и практически не изменяет значения порога неустойчивости. Однако в надкритической области (когда мембрана изогнута) действие магнитных градиентных сил оказывается нескомпенсированным. Таким образом, к расчетному распределению напряжений добавляется неучтенная часть, вызванная собственной неоднородностью поля в зазоре электромагнита. Очевидно, что эта часть способствует усилению прогиба. Второй причиной отличия между теорией и экспериментом является изменение модуля упругости ММЭ (и его вероятная анизотропия) в присутствии намагничивающего поля. Существование этого эффекта в ММЭ доказано экспериментально [5], но в теорию пока не включено.

Еще одним механизмом, играющим важную роль в отклике ММЭ на приложенное поле, является наличие у материала вязкоупругих свойств — релаксации напряжений. Он приводит к тому, что при изменении приложенного поля стационарный профиль мембраны устанавливается достаточно медленно. По нашим наблюдениям, за время порядка 30 с протекает тот этап релаксационного процесса, после которого изменение

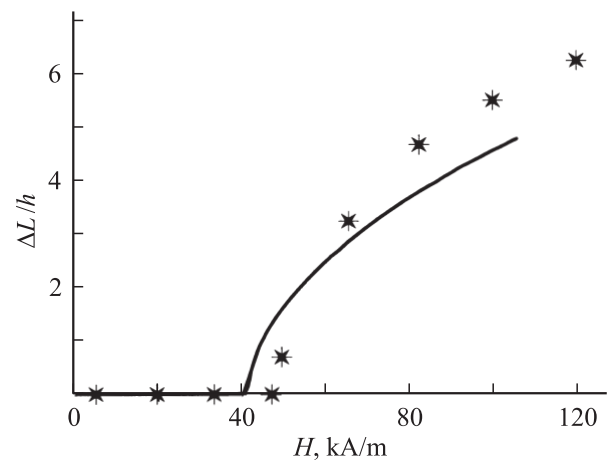


Рис. 7. Сравнение теоретической и экспериментальной зависимостей прогиба мембраны с $d = 20$ и $h = 1.95$ мм в приложенном магнитном поле; точки — эксперимент, кривая — расчет; параметры образца: $\chi = 2.14$ и $C_1 = 5$ кПа.

формы оказывается меньшим, чем погрешность измерения профиля. Тест, проведенный с большей точностью, показал, что релаксационный процесс в использованном материале занимает не менее 300 с.

Выводы

Построена простая модель равновесного деформирования тонкой пластины (мембраны) из мягкого магнитоэласта в однородном поле, нормальном к ее поверхности. Предложен алгоритм решения соответствующей краевой задачи и разработана его численная реализация. Получающаяся расчетная модель содержит минимальное количество макроскопических параметров материала и образца.

Показано, что намагничивание мембраны, закрепленной по ободу, приводит к магнитомеханическому эффекту, развивающемуся по типу мягкой неустойчивости: прогиб возникает пороговым образом при конечном значении приложенного поля. Найдена масштабная зависимость, характеризующая этот порог.

Численный расчет был выполнен применительно к конкретной мембране без использования подгоночных параметров. Он позволил получить хорошее количественное согласие по величине поля потери устойчивости и удовлетворительное — относительно формы надкритических деформаций.

Анализ расхождений между теорией и экспериментом показывает, что при дальнейшем развитии модели необходим учет изменения упругих свойств ММЭ при намагничивании и конечности времени релаксации напряжений в материале.

Авторы благодарят А.А. Адамова за проведение механических испытаний материала в релаксационном режиме.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке со стороны проектов РФФИ № 05-02-16949 и 06-01-00723 и Программы сотрудничества ECUNET между ИМСС УрО РАН и Университетом Пьера и Марии Кюри.

Список литературы

- [1] *Zrinyi M., Barsi L., Büki A.* // J. Chem. Phys. 1996. Vol. 104. P. 8750–8756.
- [2] *Zrinyi M., Barsi L., Büki A.* // Polymer Gels and Networks. 1997. Vol. 5. P. 415–427.
- [3] *Bednarek S.* // J. Magn. Magn. Mater. 1997. Vol. 166. P. 91–96.
- [4] *Mitsumata T., Ikeda K., Gong P., Osada Y., Szabo D., Zrinyi M.* // J. Appl. Phys. 1999. Vol. 85. P. 8451–8455.
- [5] *Никитин Л.В., Миронова Л.С., Миронова Г.В., Самусь А.Н.* // Высокомолекулярные соединения. А. 2001. Т. 43. № 4. С. 698–706.
- [6] *Farshad M., Benine A.* // Polymer Testing. 2004. Vol. 23. P. 347–353.
- [7] *Farshad M., Le Roux M.* // Polymer Testing. 2005. Vol. 24. P. 163–168.
- [8] *Ramanujan R.V., Lao L.L.* // Smart Materials & Structures. 2006. Vol. 15. P. 952–956.
- [9] *Райхер Ю.Л., Столбов О.В.* // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26. С. 47–53.
- [10] *Райхер Ю.Л., Столбов О.В.* // Прикл. механ. и техн. физика. 2005. № 3. С. 153.
- [11] *Stolbov O.V., Raikher Yu.L.* // J. Magn. Magn. Mater. 2005. Vol. 289. P. 62.
- [12] *Stolbov O.V., Raikher Yu.L.* // J. Magn. Magn. Mater. 2006. Vol. 300. P. 199–202.
- [13] *Алексеев А.Г., Корнев А.Е.* Эластичные магнитные материалы. М.: Химия, 1976.
- [14] *Алексеев А.Г., Корнев А.Е.* Магнитные эластомеры. М.: Химия, 1987.
- [15] *Stepanov G.V., Abramchuk S.S., Grishin D.A., Nikitin L.V., Kramarenko E.Yu., Khokhlov A.R.* // Polymer. 2007. Vol. 48. P. 488–495.
- [16] *Lattermann G., Krekhova M.* // Macromolecules: Rapid Commun. 2006. Vol. 27. P. 1373–1379.
- [17] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. М.: Наука, 1987.
- [18] *Столбов О.В., Райхер Ю.Л., Степанов Г.В.* Тр. Междунар. шк.-семинара „Новые магнитные материалы микроэлектроники“ (НМММ-20). М.: МГУ, 2006. С. 1065–1066.
- [19] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. М.: Наука, 1987.
- [20] *Блум Э.Я., Цеберс А.О., Майоров М.М.* Магнитные жидкости. Рига: Зинатне, 1989.
- [21] *Де Жен П.* Физика жидких кристаллов. М.: Мир, 1977.
- [22] *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.