Краткие сообщения

01

Расчет электростатического поля системы сферических сегментов

© Е.М. Виноградова, Н.В. Егоров, К.А. Кримская

Санкт-Петербургский государственный университет,
198904 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: vincat@rednet.ru

(Поступило в Редакцию 26 ноября 2007 г.)

Решена задача вычисления распределения электростатического потенциала системы осесимметричных электродов в виде неконцентрических сферических сегментов.

PACS: 41.20.Cv, 41.85.Ne

Постановка задачи

Рассмотрим осесимметричную задачу нахождения распределения электростатического потенциала системы, состоящей из произвольного числа неконцентрических сферических сегментов, расположенных между двумя сферами.

Данная осесимметричная задача будет решаться в бисферической системе координат. Связь бисферических координат (α, β) с цилиндрическими (r, z) определяется соотношением [1]

$$z + ir = ic \operatorname{ctg} \frac{\alpha + i\beta}{2},$$

$$0 \le \alpha \le \pi, \quad -\infty < \beta < \infty.$$

Координатные поверхности $\beta = \text{const}$ задают семейство непересекающихся неконцентрических сфер, уравнение которых имеет вид

$$r^2 + (z - c \operatorname{cth} \beta)^2 = \left(\frac{c}{\operatorname{sh} \beta}\right)^2.$$

Координационные поверхности $\alpha = \text{const}$ задают семейство веретенообразных поверхностей вращения, ортогональных к поверхностям $\beta = \text{const}$, и определяемых уравнением

$$(r - c \operatorname{ctg} \alpha)^2 + z^2 = \left(\frac{c}{\sin \alpha}\right)^2.$$

Параметры задачи: N — число сегментов; $\alpha_i \le \alpha \le \pi$, $\beta = \beta_i$ — поверхности сегментов $(i = \overline{1, N})$; $f_i(\alpha)$ — граничные условия первого рода на соответствующих сегментах $(i = \overline{1, N})$; $0 \le \alpha \le \pi$, $\beta = \beta_0$, $\beta = \beta_{N+1}$ — поверхности сфер; $f_0(\alpha)$, $f_{N+1}(\alpha)$ — граничные условия первого рода на сферах.

Не нарушая общности задачи, можно положить, что $\beta_i < \beta_k$ при $i < k$. Если произведение значений $\beta_0\beta_{N+1} = 0$, то одна из сфер размыкается в плоскость $\beta = 0$. В случае $\beta_0\beta_{N+1} > 0$ система сегментов находится внутри одной из замкнутых сфер, но вне другой (рис. 1). Если $\beta_0\beta_{N+1} < 0$, то сегменты расположены вне сфер (рис. 2).

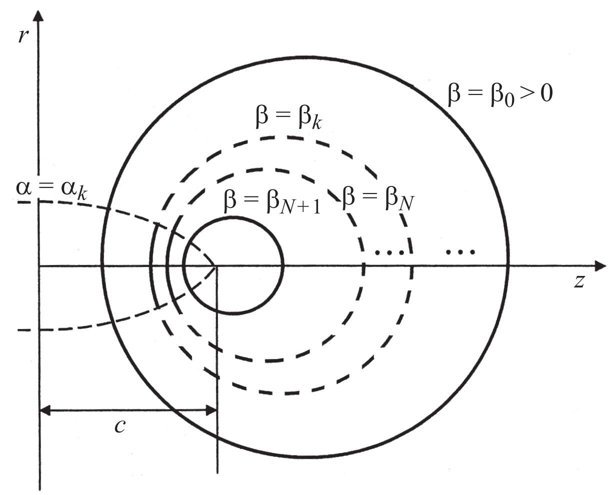

Рис. 1.

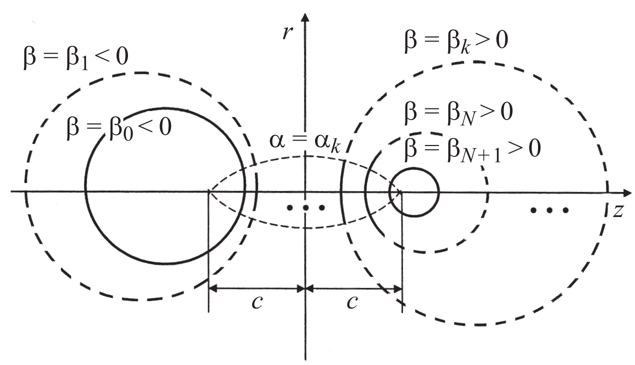

Рис. 2.

Распределение электростатического потенциала $U(\alpha,\beta)$ удовлетворяет уравнению Лапласа и граничным условиям:

$$\begin{cases} \Delta\ U(\alpha,\beta)=0, \\ U(\alpha,\beta_i)\big|_{\alpha_i\le\alpha\le\pi}=f_i(\alpha), \quad i=\overline{1,N}, \\ U(\alpha,\beta_0)=f_0(\alpha), \\ U(\alpha,\beta_{N+1})=f_{N+1}(\alpha). \end{cases} \tag{1}$$

Решение задачи

Для решения граничной задачи (1) вся область электронно-оптической системы разбивается на $N+1$ подобластей: $\beta_i\le\beta\le\beta_{i+1}$. Для каждой из подобластей распределения потенциала $U(\alpha,\beta)=U_i(\alpha,\beta)$ $(i=\overline{0,N})$ можно представить в виде разложения по полиномам Лежандра [1,2]:

$$U_i(\alpha,\beta)=\sqrt{\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\Bigg[\frac{\operatorname{sh}\big(n+\frac12\big)(\beta-\beta_i)}{\operatorname{sh}\big(n+\frac12\big)(\beta_{i+1}-\beta_i)}A_{i,n} + \frac{\operatorname{sh}\big(n+\frac12\big)(\beta_{i+1}-\beta)}{\operatorname{sh}\big(n+\frac12\big)(\beta_{i+1}-\beta_i)}A_{i+1,n}\Bigg]P_n(\cos,\alpha),$$
$$\beta_i<\beta<\beta_{i+1}, \quad i=\overline{1,N}. \tag{2}$$

Коэффициенты $A_{0,n}$, $A_{N+1,n}$ вычисляются из граничных условий (1) на сферах β_0, β_{N+1}:

$$A_{k,n}=\frac{2n+1}{2}\int\limits_0^{\pi}\frac{f_k(\alpha)}{\sqrt{\operatorname{ch}\beta_k-\cos\alpha}}P_n(\cos\alpha)\sin\alpha\,d\alpha, \quad k=0,\quad N+1. \tag{3}$$

Представление потнециала в виде (2) удовлетворяет уравнению Лапласа и условию непрерывности потенциала на границах раздела между областями. Граничные условия и условия непрерывности производной потенциала по нормали к границам раздела подобластей приводят к системе парных уравнений

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty}\big(n+\frac12\big)\Big[-\frac{1}{\operatorname{sh}(n+\frac12)(\beta_i-\beta_{i-1})}A_{i-1,n} \\ +\big(\operatorname{cth}\big(n+\frac12\big)(\beta_i-\beta_{i-1})+\operatorname{cth}\big(n+\frac12\big)(\beta_{i+1}-\beta_i)\big)A_{i,n} \\ -\frac{1}{\operatorname{sh}(n+\frac12)(\beta_{i+1}-\beta_i)}A_{i+1,n}\Big]P_n(\cos\alpha)=0, \quad 0\le\alpha\le\alpha_i, \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}A_{i,n}P_n(\cos\alpha)=\frac{f_i(\alpha)}{\sqrt{\operatorname{ch}\beta_i-\cos\alpha}}P_n(\cos\alpha)\sin\alpha\,d\alpha, \\ \qquad \alpha_i\le\alpha\le\pi, \quad i=\overline{1,N}. \end{cases}$$

Введем следующие обозначения:

$$C_{1,n}=\Big(\operatorname{cth}\Big(n+\frac12\Big)(\beta_1-\beta_0)+\operatorname{cth}\Big(n+\frac12\Big)(\beta_2-\beta_1)\Big)A_{1,n} - \frac{1}{\operatorname{sh}\big(n+\frac12\big)(\beta_2-\beta_1)}A_{2,n},$$

$$C_{i,n}=-\frac{1}{\operatorname{sh}\big(n+\frac12\big)(\beta_i-\beta_{i-1})}A_{i-1,n}+\Big(\operatorname{cth}\Big(n+\frac12\Big) \times(\beta_i-\beta_{i-1})+\operatorname{cth}\Big(n+\frac12\Big)(\beta_{i+1}-\beta_i)\Big)A_{i,n} - \frac{1}{\operatorname{sh}\big(n+\frac12\big)(\beta_{i+1}-\beta_i)}A_{i+1,n}, \quad i=\overline{2,N-1},$$

$$C_{N,n}=-\frac{1}{\operatorname{sh}\big(n+\frac12\big)(\beta_N-\beta_{N-1})}A_{N-1,n}+\Big(\operatorname{cth}\Big(n+\frac12\Big) \times(\beta_N-\beta_{N-1})+\operatorname{cth}\Big(n+\frac12\Big)(\beta_{N+1}-\beta_N)\Big)A_{N,n}. \tag{5}$$

Уравнения (5) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $A_{i,n}$ $(i=\overline{1,N})$. Подобная система была решена в работе [3] для частного случая $\beta_0=-\infty$, $\beta_{N+1}=\infty$. В общем случае [4], решив систему (5), получим

$$A_{i,n}=\frac{\operatorname{sh}\big(n+\frac12\big)(\beta_{N+1}-\beta_i)}{\operatorname{sh}\big(n+\frac12\big)(\beta_{N+1}-\beta_0)}\sum_{k=1}^{i}\operatorname{sh}\Big(n+\frac12\Big)(\beta_k-\beta_0)C_{k,n} + \frac{\operatorname{sh}\big(n+\frac12\big)(\beta_i-\beta_0)}{\operatorname{sh}\big(n+\frac12\big)(\beta_{N+1}-\beta_0)}\sum_{k=i+1}^{N}\operatorname{sh}\Big(n+\frac12\Big)(\beta_k-\beta_0)C_{k,n},$$
$$i=\overline{1,N}. \tag{6}$$

Для удобства дальнейших вычислений введем новые коэффициенты $B_{k,n}$:

$$\begin{gathered} B_{1,n}=-\frac{1}{\operatorname{sh}\big(n+\frac12\big)(\beta_1-\beta_0)}+C_{1,n}, \\ B_{i,n}=C_{i,n}, \qquad i=\overline{2,N-1}, \\ B_{N,n}=-\frac{1}{\operatorname{sh}\big(n+\frac12\big)(\beta_{N+1}-\beta_N)}+C_{N,n}. \end{gathered} \tag{7}$$

Тогда система парных сумматорных уравнений (4) приводится к виду:

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty}\big(n+\frac12\big)B_{i,n}P_n(\cos\alpha)=0, \quad 0\le\alpha\le\alpha_i, \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\Big[\sum\limits_{k=1}^{i-1}g_{ik}^nB_{k,n}+\big(\frac12+g_{ii}^n\big)B_{i,n}+\sum\limits_{k=i+1}^{N}g_{ki}^nB_{k,n}\Big] \\ \times P_n(\cos\alpha)=F_i(\alpha), \qquad \alpha_i\le\alpha\le\pi, \end{cases} \tag{8}$$

где

$$g_{ii}^n=-\frac12\Big[e^{-(n+\frac12)(\beta_{N+1}-\beta_i)}\operatorname{sh}\Big(n+\frac12\Big)(\beta_i-\beta_0) + e^{-(n+\frac12)(\beta_i-\beta_0)}\operatorname{sh}\Big(n+\frac12\Big)(\beta_{N+1}-\beta_i)\Big] \times\frac{1}{\operatorname{sh}\big(n+\frac12\big)(\beta_{N+1}-\beta_0)}, \tag{9}$$

$$g_{ik}^n = -\frac{\mathrm{sh}\big(n+\frac{1}{2}\big)(\beta_{N+1}-\beta_i)\,\mathrm{sh}\big(n+\frac{1}{2}\big)(\beta_k-\beta_0)}{\mathrm{sh}\big(n+\frac{1}{2}\big)(\beta_{N+1}-\beta_0)}, \quad k < i, \tag{10}$$

$$g_{ki}^n = -\frac{\mathrm{sh}\big(n+\frac{1}{2}\big)(\beta_{N+1}-\beta_k)\,\mathrm{sh}\big(n+\frac{1}{2}\big)(\beta_i-\beta_0)}{\mathrm{sh}\big(n+\frac{1}{2}\big)(\beta_{N+1}-\beta_0)}, \quad i < k, \tag{11}$$

$$F_1(\alpha) = \frac{f_1(\alpha)}{\sqrt{\mathrm{ch}\,\beta_1 - \cos\alpha}} - \sum_{n=0}^{\infty}\Bigg[-\frac{1}{2}\Bigg(\frac{\mathrm{sh}\big(n+\frac{1}{2}\big)(\beta_1-\beta_0)\mathrm{e}^{-(n+\frac{1}{2})(\beta_{N+1}-\beta_1)}}{\mathrm{sh}\big(n+\frac{1}{2}\big)(\beta_{N+1}-\beta_0)} + \frac{\mathrm{sh}\big(n+\frac{1}{2}\big)(\beta_{N+1}-\beta_1)\mathrm{e}^{-(n+\frac{1}{2})(\beta_1-\beta_0)}}{\mathrm{sh}\big(n+\frac{1}{2}\big)(\beta_{N+1}-\beta_0)}\Bigg)A_{0,n} + \frac{\mathrm{sh}\big(n+\frac{1}{2}\big)(\beta_1-\beta_0)}{\mathrm{sh}\big(n+\frac{1}{2}\big)(\beta_{N+1}-\beta_0)}A_{N+1,n}\Bigg]P_n(\cos\alpha),$$

$$F_i(\alpha) = \frac{f_i(\alpha)}{\sqrt{\mathrm{ch}\,\beta_i - \cos\alpha}} - \sum_{n=0}^{\infty}\Bigg(\frac{\mathrm{sh}\big(n+\frac{1}{2}\big)(\beta_{N+1}-\beta_i)}{\mathrm{sh}\big(n+\frac{1}{2}\big)(\beta_{N+1}-\beta_0)}A_{0,n} + \frac{\mathrm{sh}\big(n+\frac{1}{2}\big)(\beta_I-\beta_0)}{\mathrm{sh}\big(n+\frac{1}{2}\big)(\beta_{N+1}-\beta_0)}A_{N+1,n}\Bigg)P_n(\cos\alpha),$$
$$i = \overline{1, N}. \tag{12}$$

$$F_N(\alpha) = \frac{f_N(\alpha)}{\sqrt{\mathrm{ch}\,\beta_N - \cos\alpha}} - \sum_{n=0}^{\infty}\Bigg[\frac{\mathrm{sh}\big(n+\frac{1}{2}\big)(\beta_{N+1}-\beta_N)}{\mathrm{sh}\big(n+\frac{1}{2}\big)(\beta_{N+1}-\beta_0)}A_{0,n} - \frac{1}{2}\Bigg(\frac{\mathrm{sh}\big(n+\frac{1}{2}\big)(\beta_N-\beta_0)\mathrm{e}^{-(n+\frac{1}{2})(\beta_{N+1}-\beta_N)}}{\mathrm{sh}\big(n+\frac{1}{2}\big)(\beta_{N+1}-\beta_0)} + \frac{\mathrm{sh}\big(n+\frac{1}{2}\big)(\beta_{N+1}-\beta_N)\mathrm{e}^{-(n+\frac{1}{2})(\beta_N-\beta_0)}}{\mathrm{sh}\big(n+\frac{1}{2}\big)(\beta_{N+1}-\beta_0)}\Bigg)A_{N+1,n}\Bigg]P_n(\cos\alpha).$$

Для решения системы парных уравнений (8) введем вместо коэффициентов $B_{i,n}$ новые неизвестные функции $\phi_i(t)$ с помощью подстановки

$$B_{i,n} = \int_{\alpha_i}^{\pi}\phi_i(t)\sin\Big(n+\frac{1}{2}\Big)t\,dt. \tag{13}$$

Вторые из парных уравнений системы (8) с помощью подстановки (13) обращаются в тождество [1]. При подстановке (13) в первые из уравнений (8) получается система связанных интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода относительно функций $\phi_i(t)$;

$$\frac{1}{2}\phi_i(x) + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\int_{\alpha_k}^{\pi}\phi_k(T)K_{ik}(x,t)dt = \Phi_i(x),$$
$$\alpha_i < x < \pi, \tag{14}$$

$$\Phi_i(x) = \frac{2}{\pi}\frac{d}{dx}\int_x^{\pi}\frac{F_i(\alpha)\sin\alpha}{\sqrt{2(\mathrm{ch}\,x - \cos\alpha)}}\,d\alpha, \quad i = \overline{1, N}. \tag{15}$$

Ядра уравнений (14) $K_{ik}(x,t)$ являются симметричными и могут быть выписаны в явном виде:

$$K_{ik}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,k}^n \sin\Big(n+\frac{1}{2}\Big)x\,\sin\Big(n+\frac{1}{2}\Big)t. \tag{16}$$

Итак, для решения граничной задачи (1) требуется решить систему уравнений Фредгольма 2-го рода (14) с правыми частями, задаваемыми формулами (12), (15) и симметричными ядрами (16). Таким образом, формулы (2), (3), (6), (7), (13) дают аналитическое решение во всей области исходной граничной задачи о распределении электростатического потенциала.

Случай постоянных значений потенциала на электродах

Если на всех электродах системы заданы постоянные значения потенциалов $f_i(\alpha) = f_i = \mathrm{const}$ $(i = \overline{0, N+1})$, то коэффициенты $A_{0,n}$ и $A_{N+1,n}$, определяемые по формулам (3), имеют вид

$$A_{k,n} = \sqrt{2}\,f_k\mathrm{e}^{-(n+\frac{1}{2})|\beta_k|}, \quad k = 0, N+1.$$

В этом случае правые части системы (14) вычисляются явным образом:

$$\Phi_i(x) = \frac{2}{\pi}\Bigg(-\frac{1}{2}f_i\frac{\sin\frac{x}{2}\,\mathrm{ch}\frac{\beta_i}{2}}{\mathrm{ch}\frac{\beta_i}{2} - \cos\frac{x}{2}} + \sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}\Bigg(\frac{\mathrm{sh}\big(n+\frac{1}{2}\big)(\beta_{N+1}-\beta_i)}{\mathrm{sh}\big(n+\frac{1}{2}\big)(\beta_{N+1}-\beta_0)}f_0\,\mathrm{e}^{-(n+\frac{1}{2})|\beta_0|} + \frac{\mathrm{sh}\big(n+\frac{1}{2}\big)(\beta_i-\beta_0)}{\mathrm{sh}\big(n+\frac{1}{2}\big)(\beta_{N+1}-\beta_0)}f_{N+1}\,\mathrm{e}^{-(n+\frac{1}{2})|\beta_{N+1}|}\Bigg) \times \sin\Big(n+\frac{1}{2}x\Big)\Bigg), \quad i = \overline{1, N}.$$

Если в исходной системе электродов отсутствует одна из сфер, что соответствует $\beta_0 = -\infty$ или $\beta_{N+1} = \infty$, то формулы (15), (16) вычисления ядер и правых частей системы связанных интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода (14) значительно упрощаются.

Пусть $\beta_{N+1} = \infty$, тогда из (9)–(11) имеем:

$$g_{ii}^n = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-(2n+1)(\beta_i-\beta_0)},$$

$$g_{ik}^n = -\frac{1}{2}\Big(\mathrm{e}^{-(n+\frac{1}{2})|\beta_i-\beta_k|} - \mathrm{e}^{-(n+\frac{1}{2})((\beta_i-\beta_0)+(\beta_k-\beta_0))}\Big), \quad k \neq i.$$

Введем обозначения

$$\mu_{ik} = |\beta_i - \beta_k|,$$

$$\nu_{ik} = (\beta_i - \beta_0) + (\beta_k - \beta_0).$$

Используя суммирование тригонометрических рядов [5], ядра $K_{ik}(x,t)$ и правые части $\Phi_i(x)$ системы (14), определяемые формулами (15), (16), представим в виде

$$K_{ik}(x,t) = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\operatorname{sh}\frac{1}{2}\mu_{ik}}{\operatorname{sh}\mu_{ik} - \cos(x-t)} - \frac{\operatorname{sh}\frac{1}{2}\nu_{ik}}{\operatorname{ch}\nu_{ik} - \cos(x-t)}\right)\right.$$
$$\times \cos\frac{1}{2}(x-t) - \left(\frac{\operatorname{sh}\frac{1}{2}\mu_{ik}}{\operatorname{sh}\mu_{ik} - \cos(x+t)}\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\operatorname{sh}\frac{1}{2}\nu_{ik}}{\operatorname{ch}\nu_{ik} - \cos(x+t)}\right)\cos\frac{1}{2}(x+t)\right], \quad i \neq k,$$

$$K_{ii}(x,t) = -\frac{1}{2}\operatorname{sh}(\beta_i - \beta_0)\left[\frac{\cos\frac{1}{2}(x-t)}{\operatorname{ch}2(\beta_i - \beta_0) - \cos(x-t)}\right.$$
$$\left. - \frac{\cos\frac{1}{2}(x+t)}{\operatorname{ch}2(\beta_i - \beta_0) - \cos(x+t)}\right],$$

$$\Phi_i(x) = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{2}f_i\frac{\sin\frac{x}{2}\operatorname{ch}\frac{\beta_i}{2}}{\operatorname{ch}\frac{\beta_i}{2} - \cos\frac{x}{2}}\right.$$
$$\left. + \sqrt{2}f_0\sin\frac{x}{2}\frac{\operatorname{ch}\frac{1}{2}\big((\beta_i - \beta_0) + |\beta_0|\big)}{\operatorname{ch}\big((\beta_i - \beta_0) + |\beta_0|\big) - \cos x}\right).$$

Если в исходной системе электродов отсутствуют обе сферы, то $\beta_0 = -\infty$ и $\beta_{N+1} = \infty$. Тогда формулы (15), (16) вычисления ядер и правых частей системы (14) имеют вид

$$K_{ik}(x,t) = \frac{1}{4}\operatorname{sh}\frac{1}{2}\mu_{ik}\left(\frac{\cos\frac{1}{2}(x-t)}{\operatorname{ch}\mu_{ik} - \cos(x-t)}\right.$$
$$\left. - \frac{\cos\frac{1}{2}(x+t)}{\operatorname{ch}\mu_{ik} - \cos(x+t)}\right),$$

$$\Phi_i(x) = -\frac{1}{\pi}f_i\frac{\sin\frac{x}{2}\operatorname{ch}\frac{\beta_i}{2}}{\operatorname{ch}\frac{\beta_i}{2} - \cos\frac{x}{2}}.$$

Заключение

В данной работе найдено распределение электростатического потенциала в системе, содержащей произвольное число осесимметричных электродов в виде неконцентрических сферических сегментов, расположенных между двумя замкнутыми сферическими поверхностями. При этом задача нахождения неизвестных коэффициентов в разложении потенциала сведена к решению системы связанных интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода. Все геометрические размеры и потенциалы сегментов и сфер являются параметрами задачи. Подобные системы могут служить для моделирования электронной пушки с полевым острием. Нахождение распределения потенциала в таких системах представляет собой наиболее сложную часть задачи, так как геометрические размеры электродов отличаются на несколько порядков, что затрудняет применение численных методов расчета.

Список литературы

[1] *Уфлянд Я.С.* Метод парных уравнений в задачах математической физики. Л.: Наука, 1977. 220 с.

[2] *Egorov N.V., Vinogradova E.M.* // Vacuum. 2004. Vol. 72. P. 103.

[3] *Кузькин Ю.Н.* // ЖТФ. 1970. Т. 40. Вып. 11. С. 2276.

[4] *Виноградова Е.М., Егоров Н.В., Баранов Р.Ю.* // РиЭ. 2007. Т, 45. № 4. С. 638.

[5] *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.