01;03

Модификация теории пограничного слоя для расчета осцилляций конечной амплитуды заряженного пузырька в вязкой жидкости

© А.Н. Жаров, А.И. Григорьев, И.Г. Жарова

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 12 июля 2007 г.)

Существующие представления о связанном с волновым движением в пограничном слое вблизи свободной поверхности вязкой жидкости модифицированы для расчета линейных осцилляций конечной амплитуды заряженного пузырька в вязкой жидкости. Выведены уравнения теории пограничного слоя в окрестности осциллирующей сферической свободной поверхности заряженного пузырька в диэлектрической жидкости, найдено их аналитическое решение, проведено сравнение с точным решением и оценена толщина пограничного слоя. Определена область применимости модифицированной теории.

PACS: 47.55.D-

Введение

В середине прошлого века Лонгет-Хиггинс [1] обратил внимание на то, что распространение волны по свободной плоской поверхности жидкости связано с генерированием вихревого движения, экспоненциально убывающего с увеличением расстояния до поверхности. Сходная ситуация имеет место и при расчете осцилляций конечной амплитуды пузырька в вязкой жидкости. Выполненные в последние годы аналитические асимптотические расчеты осцилляций заряженного пузырька в вязкой жидкости [2] продемонстрировали весьма значительную громоздкость необходимых расчетов и полученных результатов, существенно затрудняющую использование полученных результатов. В этой связи возникла идея проведения аналитического исследования осцилляций конечной амплитуды заряженного пузырька в вязкой жидкости на основе упрощенных уравнений теории пограничного слоя в надежде получить существенно менее громоздкие финальные выражения в рамках заранее определенной погрешности. Этой проблеме и посвящена настоящая работа.

1. Постановка задачи

Пусть в жидкости с диэлектрической проницаемостью ε_d, плотностью ρ, кинематической вязкостью ν, коэффициентом поверхностного натяжения σ, в области с давлением $p^{(0)}$ виртуально образовался сферический пузырек радиуса r_0, несущий электрический заряд Q на стенке. Будем считать, что в пузырьке находится газ с начальным давлением $p_g^{(0)}$, подчиняющийся политропическому закону с показателем политропы γ и насыщенный пар жидкости с давлением p_V.

При изменяющемся давлении внешней жидкости $p^{(0)}$, заряде на пузырьке Q, давлении насыщенного пара p_V или каких-либо других характеристиках жидкости или газа граница пузырька будет двигаться под действием суммарного давления

$$P(r) = -p^{(0)} + p_V + p_g^{(0)}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{3\gamma} + \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_d r^4} - \frac{2\sigma}{r}, \quad (1)$$

где r — текущий радиус пузырька. Так, если $P(r) > 0$ — то пузырек расширяется, если $P(r) < 0$ — сжимается, если $P(r) = 0$ — находится в равновесии. Из выражения (1) видно, что уравнение $P(r) = 0$ может иметь различное количество корней: один, два, ни одного [3], которые в дальнейшем будем обозначать $r = a$.

Рассмотрим капиллярные осцилляции пузырька, находящегося в одном из равновесных состояний, т.е. при $r = a$. Поле скоростей жидкости в окрестности пузырька обозначим $\mathbf{U}(r, \vartheta, t)$, поле давлений — $p(r, \vartheta, t)$, потенциалы электрического поля в окрестности пузырька и на его поверхности обозначим $\varphi(r, \vartheta, t)$ и $\varphi_S(t)$ соответственно. Уравнение поверхности пузырька, совершающего осесимметричные осцилляции в любой момент времени t, запишем в сферической системе координат r, ϑ, φ с началом в центре невозмущенного пузырька в виде

$$F(r, \vartheta, t) = r - a - R(t) - \xi(\vartheta, t) = 0 \quad (2)$$

с начальным условием

$$t = 0: \qquad R(t) = \varepsilon h_0 P_0(\mu); \quad \xi = \varepsilon \sum_{m\in\Omega} h_m P_m(\mu);$$

$$\mu = \cos(\vartheta); \quad \mathbf{U} = 0, \quad (3)$$

где ε — малый параметр, характеризующий амплитуду начального возмущения; $P_m(\mu)$ — полином Лежандра порядка m; Ω — множество индексов изначально возбужденных мод; h_0 и h_m — константы, учитывающие парциальный вклад m-й моды в формирование начальной формы пузырька, такие, что $h_0 + \sum_{m\in\Omega} h_m = O(a)$.

Математическая формулировка задачи о расчете капиллярных колебаний заряженного пузырька, форма которого определяется (2), (3), имеет вид [2]

$$\operatorname{div}\mathbf{U} = 0, \tag{4}$$

$$\partial_t \mathbf{U} + (\mathbf{U}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{U} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p + \nu\Delta\mathbf{U}, \tag{5}$$

$$r \to +\infty: \qquad \mathbf{U} \to 0, \tag{6}$$

$$\Delta\varphi = 0, \quad \boldsymbol{\nabla}\varphi \to 0, \tag{7}$$

$$r = a + R(t) + \xi(\vartheta, t): \qquad \varphi = \varphi_S(t);$$

$$\int\limits_S \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla}\varphi dS = -4\pi Q; \quad \partial_t F + (\mathbf{U}\cdot\boldsymbol{\nabla})F = 0; \tag{8}$$

$$\boldsymbol{\tau}\cdot(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{U} + \mathbf{n}\cdot(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{U} = 0;$$

$$-p + 2\rho\nu\mathbf{n}\cdot(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{U} + p_V + p_g + p_Q - p_\sigma = 0, \tag{9}$$

где символ ∂_t означает частную производную по переменной t; $\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\tau}$ — единичные вектора нормали и касательной к свободной поверхности пузырька; p_σ, p_Q, p_g — давления сил поверхностного натяжения, электрического поля собственного заряда, давление газа в пузырьке, определяющееся выражениями

$$p_\sigma = \sigma(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{n}), \quad p_Q = \frac{1}{8\pi\varepsilon_d}(\boldsymbol{\nabla}\varphi)^2, \quad p_g = p_{g0}\left(\frac{V_0}{V}\right)^\gamma;$$

V_0 и V — начальный и текущий объем пузырька.

2. Обоснование уравнений пограничного слоя

При решении системы (2)–(9) примем, что поле скоростей течения жидкости в окрестности пузырька, как любое векторное поле, можно представить в виде потенциальной и вихревой компонент [4]. Потенциальная компонента течения не изменяется при переходе к модели идеальной жидкости (при $\nu \to 0$), наличие вихревой компоненты течения всецело обусловлено вязкостью реальной жидкости.

В соответствии с начальными условиями (3) в начальный момент времени поверхность пузырька неподвижна и движение жидкости в окрестности пузырька отсутствует. При $t > 0$ под влиянием сил поверхностного натяжения, стремящихся вернуть пузырьку сферическую форму, жидкость в окрестности пузырька начнет двигаться, таким образом, чтобы были выполнены условия (8), (9). Движение стенки пузырька будет приводить к образованию потенциальных и вихревых движений в окружающей пузырек жидкости. Вихри скорости жидкости, рожденные у стенки пузырька, будут диффундировать в объем жидкости. Этот процесс может быть описан уравнением, которое несложно получить из линеаризованного уравнения Навье–Стокса (5), применяя к нему операцию ротора (5):

$$\partial_t\big(\operatorname{rot}(\mathbf{U})\big) = \nu\Delta\operatorname{rot}(\mathbf{U}).$$

Как видно из приведенного уравнения, процесс диффузии вихря скорости, рожденного на подвижной стенке пузырька, в объем жидкости определится величной коэффициента кинематической вязкости жидкости ν. При большом значении ν характерная глубина проникновения вихревого движения в объем жидкости (расстояние, на котором амплитуда вихря за период осцилляций затухает в 2.718 раза), пропорциональная $\sqrt{\nu}$, может быть значительной [1,5]. При малой вязкости вихревое движение будет локализовано в тонком слое, прилегающем к поверхности пузырька.

В соответствии с вышесказанным при модификации теории пограничного слоя для расчета осцилляций пузырька в маловязкой жидкости будем считать, что в основном объеме жидкости, вдали от стенки пузырька, движение жидкости является чисто отрицательным. В тонком пограничном слое у стенки пузырька движение жидкости будем представлять в виде суммы потенциального и вихревого, как это принято при расчете волновых течений вязкой жидкости [6–8]. При этом, согласно [9], будем учитывать, что амплитуда вихревой компоненты течения затухает по мере удаления от поверхности пузырька быстрее, чем по экспоненциальному закону, и заметно убывает на некотором характерном линейном масштабе δ, который и будем называть толщиной пограничного слоя.

Поля скоростей течения жидкости и давлений, связанных с течением окружающей пузырек жидкости, предствим в виде

$$\mathbf{U}(r, \vartheta, t) = \mathbf{U}^{(p)}(r, \vartheta, t) + \mathbf{U}^{(c)}(r, \vartheta, t); \tag{10}$$

$$p(r, \vartheta, t) \equiv p^{(p)}(r, \vartheta, t), \tag{11}$$

где индекс (p) соответствует потенциальному движению, а (c) — вихревому. При записи выражения для давления в жидкости учитывалось, что, согласно [2] в расчетах первого порядка малости давление в жидкости целиком определяется потенциальной компонентой поля скоростей; вклад вихревой компоненты поля скоростей в формирование поля давлений в жидкости пропорционален квадрату вихревой компоненты скорости и в расчетах первого порядка малости должен быть опущен.

Подставив (10), (11) в уравнение неразрывности (4) и линеаризованное уравнение Навье–Стокса (5), получим уравнения, описывающие потенциальное движение жидкости в окрестности осциллирующего пузырька

$$\operatorname{div}\mathbf{U}^{(p)} = 0, \quad \partial_t\mathbf{U}^{(p)} = -\frac{1}{2}\operatorname{grad}p^{(p)} \tag{12}$$

и уравнения для вихревой компоненты поля скоростей

$$\operatorname{div}\mathbf{U}^{(c)} = 0, \tag{13}$$

$$\partial_t\mathbf{U}^{(c)} = -\nu\operatorname{rot}\big(\operatorname{rot}\mathbf{U}^{(c)}\big). \tag{14}$$

Уравнения (13) и (14) выпишем в проекциях на орты сферической системы координат:

$$\frac{1}{r^2}\,\partial_r\big(r^2 U_r^{(c)}\big) + \frac{1}{r\,\sin(\vartheta)}\,\partial_\vartheta\big(\sin(\vartheta)U_\vartheta^{(c)}\big) = 0; \tag{15}$$

$$\partial_t U_r^{(c)} = \frac{\nu}{r\sin(\vartheta)} \times \partial_\vartheta \left(\sin(\vartheta) \left(\frac{1}{r}\, \partial_\vartheta U_r^{(c)} - \partial_r U_\vartheta^{(c)} - \frac{1}{r}\, U_\vartheta^{(c)} \right) \right); \quad (16)$$

$$\partial_t U_\vartheta^{(c)} = \nu \left(\partial_{rr} U_\vartheta^{(c)} + \frac{2}{r}\, \partial_r U_\vartheta^{(c)} - \frac{1}{r}\, \partial_{r\upsilon} U_r^{(c)} \right). \quad (17)$$

Несложно видеть, что в системе трех уравнений (15)–(17) определению подлежат лишь две неизвестные величины $U_r^{(c)}$ и $U_\vartheta^{(c)}$. Сказанное означает, что из уравнений (15)–(17) одно должно быть отброшено. Для разрешения этой проблемы, чтобы получить приближенные уравнения, описывающие вихревые компоненты поля скоростей внутри пограничного слоя, оценим отдельные слагаемые, входящие в уравнения (15)–(17). Для этого учтем, что вихревые составляющие поля скоростей как функции координаты r должны заметно изменяться на характерном линейном масштабе, равном толщине пограничного слоя δ, а как функции полярного угла ϑ, должны заметно меняться на характерном угловом масштабе, равном π. Следовательно, при оценке отдельных вихревых слагаемых производные по радиальной и угловой переменным будем оценивать на основе соотношений: $\partial_r \to 1/\delta$, $\partial_\vartheta \to 1/\pi$.

Оценив компоненты уравнения (15), найдем

$$\frac{1}{r_2}\, \partial_r (r^2 U_r^{(c)}) \sim O\left(\frac{U_r^{(c)}}{\delta} \right);$$

$$\frac{1}{r\sin(\vartheta)}\, \partial_\vartheta (\sin(\vartheta) U_\vartheta^{(c)}) \sim O\left(\frac{U_\vartheta^{(c)}}{a\pi} \right).$$

Приравняв порядки указанных величин, несложно найти оценку для угловой компоненты поля скоростей по сравнению с радиальной компонентой

$$U_\vartheta^{(c)} \sim O\left(\frac{a\pi}{\delta}\, U_r^{(c)} \right). \quad (18)$$

Из (18) видно, что, если толщина пограничного слоя $\delta \ll \pi a$, то проекция вихревой компоненты скорости на направление $\mathbf{e}_\vartheta$ существенно превосходит по величине проекцию вихревой компоненты скорости на направление $\mathbf{e}_r$, что является основным свойством пограничного слоя, прилегающего к свободной поверхности пузырька.

Для того чтобы иметь возможность оценить производные от вихревых компонент скорости по времени, содержащиеся в уравнениях (16), (17), выпишем уравнение для вихря скорости

$$\partial_t(\Omega) = \nu \left(\frac{1}{r^2}\, \partial_r (r^2 \partial_r \Omega) + \frac{1}{r^2 \sin(\vartheta)}\, \partial_\vartheta \left(\sin(\vartheta) \partial_\vartheta \Omega \right) - \frac{1}{r^2 \sin^2(\vartheta)}\, \Omega \right),$$

где $\Omega \equiv (\operatorname{rot} \mathbf{U})_\varphi$ — проекция ротора скорости на орт сферической системы координат $\mathbf{e}_\varphi$. Произведя оценку каждого слагаемого, найдем характерное время диффузии вихря скорости в объем жидкости, окружающей пузырек, $T \sim O(\delta^2/\nu)$.

Учитывая (18), а также оценку для характерного времени диффузии вихря T, оценим каждое слагаемое в уравнении (16)

$$\partial_t U_r^{(c)} \sim O\left(\frac{U_r^{(c)}}{T} \right) = O\left(\frac{\nu}{\delta^2}\, U_r^{(c)} \right);$$

$$\frac{\nu}{r\sin(\vartheta)}\, \frac{1}{r}\, \partial_\vartheta (\sin(\vartheta) \partial_\vartheta U_r^{(c)}) \sim O\left(\frac{\nu}{\pi^2 a^2}\, U_r^{(c)} \right);$$

$$\frac{\nu}{r\sin(\vartheta)}\, \partial_\vartheta \left(\sin(\vartheta) \partial_r U_\vartheta^{(c)} \right) \sim O\left(\frac{\nu}{\delta^2}\, U_r^{(c)} \right);$$

$$\frac{\nu}{r\sin(\vartheta)}\, \frac{1}{r}\, \partial_\vartheta \left(\sin(\vartheta) U_\vartheta^{c} \right) \sim O\left(\frac{\nu}{a\delta}\, U_r^{(c)} \right). \quad (19)$$

Примем во внимание, что, согласно сказанному выше (см. [1]), толщина пограничного слоя $\delta \sim \sqrt{\nu}$. Тогда из (19) видно, что в пределе $\nu \to 0$ первая и третья компоненты имеют порядок малости $\sim O(U_r^{(c)})$, а остальные стремятся к нулю.

Оценив слагаемые в уравнении (17), с учетом (18) и характерного времени диффузии вихря $T = O(\delta^2/\nu)$, найдем

$$\partial_t U_\vartheta^{(c)} \sim O\left(\frac{U_\vartheta^{(c)}}{T} \right) = O\left(\frac{\nu a \pi}{\delta^3}\, U_r^{(c)} \right);$$

$$\nu \partial_{rr} U_\vartheta^{(c)} = O\left(\frac{\nu a \pi}{\delta^3}\, U_r^{(c)} \right);$$

$$\frac{2\nu}{r}\, \partial_r U_\vartheta^{(c)} \sim O\left(\frac{2\nu\pi}{\delta^2}\, U_r^{(c)} \right);$$

$$\frac{\nu}{r}\, \partial_{r\vartheta} U_r^{(c)} \sim O\left(\frac{\nu}{a\pi\delta}\, U_r^{(c)} \right).$$

Несложно видеть, что в уравнении (17) наиболее значимыми слагаемыми являются $\partial_t U_\vartheta^{(c)}$ и $\nu \partial_{rr} U_\vartheta^{(c)}$, имеющие порядок $O(\nu a \pi U_r^{(c)} \delta^3)$ и растущие в пределе $\nu \to 0$. Остальные компоненты уравнения (17) в пределе $\nu \to 0$ либо убывают, либо не изменяются.

Таким образом, из проведенных оценок следует, что в системе дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка (15)–(17), описывающих вихревую компоненту течения жидкости в окрестности пузырька, уравнение (16) включает в себя в пределе $\nu \to 0$, много меньшие наиболее значимых компонент уравнения (17). В итоге в асимптотике малой вязкости уравнение (16) должно быть отброшено, а в уравнении (17) оставлены лишь два слагаемых, значения возрастают при $\nu \to 0$:

$$\partial_t U_\vartheta^{(c)} = \nu \partial_{rr} U_\vartheta^{(c)}. \quad (20)$$

Уравнения (15) и (20) дают нам искомую систему уравнений пограничного слоя в окрестности осциллирующей свободной поверхности пузырька в вязкой жидкости.

3. Решение уравнений пограничного слоя

Решение сформулированной задачи будем искать методом прямого разложения по малому параметру ε, имея в виду, что R, ξ, $U_\vartheta^{(c)}$, $U_r^{(c)}$, $U_r^{(p)}$, $U_\vartheta^{(p)}$ являются величинами первого порядка малости по ε, а давление жидкости и электростатический потенциал имеют компоненты и нулевого порядка малости. Поэтому давление и потенциалы представим в виде асимптотических разложений

$$p^{(p)}(t,\vartheta,t)=p^{(0)}+p^{(p)(1)}(r,\vartheta,t)+O(\varepsilon^2);$$

$$\varphi(r,\vartheta,t)=\varphi^{(0)}(r,t)+\varphi^{(1)}(r,\vartheta,t)+O(\varepsilon^2);$$

$$\varphi_S(t)=\varphi_S^{(0)}(t)+\varphi_S^{(1)}(t)+O(\varepsilon^2),$$

где параметра с индексом „0“ имеют нулевой порядок малости, а с индексом „1“ — первый. Подставив данные разложения в систему уравнений (2), (3), (6)–(9), (12), (15), (20) и выделив слагаемые нулевого порядка малости, получим задачу для расчета равновесного состояния:

$$\Delta\varphi^{(0)}=0;\quad r\to+\infty:\quad \nabla\varphi^{(0)}\to 0;\ \ \varphi^{(0)}(a,t)=\varphi_S^{(0)}(t);$$

$$\int\limits_{-1}^{1}a^2\partial_r\varphi^{(0)}(r,t)d(\cos\vartheta)=-2Q;$$

$$-p^{(0)}+p_V+p_g^{(0)}\left(\frac{r_0}{a}\right)^{3\gamma}+\frac{1}{8\pi\varepsilon_d}\left(\partial_r\varphi^{(0)}(r,t)\right)^2-\frac{2\sigma}{a}=0. \tag{21}$$

Решив систему (21), найдем

$$\varphi^{(0)}=\frac{Q}{r};\qquad \varphi_S^{(0)}=\frac{Q}{a};$$

$$P(a)=-p^{(0)}+p_V+p_g^{(0)}\left(\frac{r_0}{a}\right)^{3\gamma}+\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_d a^4}-\frac{2\sigma}{a}=0. \tag{22}$$

Выделив слагаемые первого порядка малости по ε, получим задачу для расчета полей скоростей, давления жидкости и электростатических потенциалов, связанных с линейными осцилляциями пузырьяка в жидкости:

$$\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2U_r^{(p)})+\frac{1}{r\sin(\vartheta)}\partial_\vartheta(\sin(\vartheta)U_\vartheta^{(p)})=0;$$

$$\partial_tU_r^{(p)}=-\frac{1}{\rho}\partial_r p^{(p)(1)};\qquad \partial_tU_\vartheta^{(p)}=-\frac{1}{\rho r}\partial_\vartheta p^{(p)(1)};$$

$$\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2U_r^{(c)})+\frac{1}{r\sin(\vartheta)}\partial_\vartheta(\sin(\vartheta)U_\vartheta^{(c)})=0;$$

$$\partial_tU_\vartheta^{(c)}=\nu\partial_{r,r}U_\vartheta^{(c)};$$

$$t=0:\quad R=h_0P_0(\mu);\ \xi=\sum_{m\in\Omega}h_mP_m(\mu);\ \mathbf{U}^{(p)}+\mathbf{U}^{(c)}=0;$$

$$r\to+\infty:\quad \mathbf{U}^{(p)}\to 0,\quad \mathbf{U}^{(c)}\to 0;\ \ \Delta\varphi^{(1)}=0;$$

$$r\to+\infty:\qquad \nabla\varphi^{(1)}\to 0;$$

$$r=a:\qquad \varphi^{(1)}+(R+\xi)\partial_r\varphi^{(0)}=\varphi_S^{(1)}(t);$$

$$\int\limits_{-1}^{1}\Big(a\partial_r\varphi^{(1)}+(R+\xi)(a\partial_{rr}\varphi^{(0)}+2\partial_r\varphi^{(0)})\Big)d(\mu)=0;$$

$$\partial_tR+\partial_t\xi=U_r^{(p)}+U_r^{(c)};$$

$$\partial_r(U_\vartheta^{(p)}+U_\vartheta^{(c)})+\frac{1}{r}\partial_\vartheta(U_r^{(p)}+U_r^{(c)})-\frac{1}{r}\big(U_\vartheta^{(p)}+U_\vartheta^{(c)}\big)=0;$$

$$-p^{(p)(1)}+2\rho\nu(\partial_rU_r^{(p)}+\partial_rU_r^{(c)})-p_g^{(0)}\left(\frac{r_0}{a}\right)^{3\gamma}\frac{3\gamma}{a}R$$

$$+\frac{1}{4\pi\varepsilon_d}\partial_r\varphi^{(0)}\big(\partial_r\varphi^{(1)}+(R+\xi)\partial_{rr}\varphi^{(0)}\big)$$

$$+\frac{2\sigma}{a^2}R+\frac{\sigma}{a^2}(2+\Delta_\Omega)\xi=0, \tag{23}$$

где Δ_Ω — угловая часть оператора Лапласа.

В системе (23) выполним преобразование Лапласа по времени, т.е. от функций перейдем к их изображениям [9]

$$f(S)=\int\limits_0^{+\infty}f(t)\exp(-St)dt,$$

$$f=\big\{U_r^{(p)},U_\vartheta^{(p)},U_r^{(c)},U_\vartheta^{(c)},p^{(p)(1)},R,\xi,\varphi^{(1)},\varphi_S^{(1)}\big\}.$$

Изображения Лапласа разложим по бесконечному набору полиномов Лежандра

$$U_r^{(p)}(r,\vartheta,S)=U_{r0}^{(p)}(r,S)P_0(\mu)+\sum_{n=1}^{+\infty}U_{r,n}^{(p)}(r,S)P_n(\mu);$$

$$U_r^{(c)}=(r,\vartheta,S)=\sum_{n=1}^{+\infty}U_{r,n}^{(c)}(r,S)P_n(\mu);$$

$$U_\vartheta^{(p)}(r,\vartheta,S)=\sum_{n=1}^{+\infty}U_{\vartheta n}^{(p)}(r,S)\partial_\vartheta P_n(\mu);$$

$$U_\vartheta^{(c)}(r,\vartheta,S)=\sum_{n=1}^{+\infty}U_{\vartheta n}^{(c)}(r,S)\partial_\vartheta P_n(\mu);$$

$$\xi(\vartheta,S)=\sum_{n=1}^{+\infty}\xi_n(S)P_n(\mu);$$

$$\varphi^{(1)}(r,\vartheta,S)=\varphi_0^{(1)}(r,S)P_{(0)}(\mu)+\sum_{n=1}^{+\infty}\varphi_n^{(1)}(r,S)P_n(\mu);$$

$$p^{(p)(1)}(r,\vartheta,S)=p_0^{(p)(1)}(r,S)P_0(\mu)+\sum_{n=1}^{+\infty}p_n^{(p)(1)}(r,S)P_n(\mu).$$

В результате из системы (23) можно выделить системы уравнений, описывающие радиальные и поверхностные колебания пузырька, первая из которых имеет вид

$$\partial_rU_{r0}^{(p)}(r,S)+\frac{2}{r}U_0^{(p)}(r,S)=0;$$

$$SU_{r0}^{(p)}(r,S)=-\frac{1}{\rho}\partial_r p_0^{(p)(1)}(r,S); \tag{24}$$

$$\partial_{rr}\varphi_0^{(1)}(r,S) + \frac{2}{r}\,\partial_r\varphi_0^{(1)}(r,S) = 0; \tag{25}$$

$$r \to +\infty: \qquad U_{r0}^{(p)}(r,S) \to 0; \quad \partial_r\varphi_0^{(1)}(r,S) \to 0;$$
$$\varphi_0^{(1)}(r,S) \to 0; \tag{26}$$

$$r = a: \quad \int\limits_{-1}^{1} \big(a\,\partial_r\varphi_0^{(1)}(r,S)$$
$$+ R(S)(a\,\partial_{rr}\varphi^{(0)} + 2\partial_r\varphi^{(0)})\big)P_0(\mu)d(\mu) = 0; \tag{27}$$

$$\varphi_0^{(1)}(r,S) + R(S)\partial_r\varphi^{(0)} = \varphi_S^{(1)}(S); \tag{28}$$

$$SR(S) - h_0 = U_{r0}^{(p)}(r,S); \tag{29}$$

$$-\,p_0^{(p)(1)}(r,S) + 2\rho\nu\,\partial_r U_{r0}^{(p)}(r,S) - p_g^{(0)}\left(\frac{r_0}{a}\right)^{3\gamma}\frac{3\gamma}{a}\,R(S)$$
$$+ \frac{1}{4\pi\varepsilon_d}\,\partial_r\varphi^{(0)}\big(\partial_r\varphi_0^{(1)}(r,S) + R(S)\partial_{rr}\varphi^{(0)}\big)$$
$$+ \frac{2\sigma}{a^2}\,R(S) = 0, \tag{30}$$

а вторую можно записать в виде

$$\partial_r U_{rn}^{(p)}(r,S) + \frac{2}{r}\,U_{rn}^{(p)}(r,S) - \frac{n(n+1)}{r}\,U_{\vartheta n}^{(p)}(r,S) = 0; \tag{31}$$

$$SU_{rn}^{(p)}(r,S) = -\frac{1}{\rho}\,\partial_r p_n^{(p)(1)}(r,S);$$

$$SU_{\vartheta n}^{(p)}(r,S) = -\frac{1}{\rho r}\,p_n^{(p)(1)}(r,S); \tag{32}$$

$$\partial_r U_{rn}^{(c)}(r,S) + \frac{2}{r}\,U_{rn}^{(c)}(r,S) - \frac{n(n+1)}{r}\,U_{\vartheta n}^{(c)}(r,S) = 0; \tag{33}$$

$$SU_{\vartheta n}^{(c)}(r,S) = \nu\,\partial_{r,r}U_{\vartheta n}^{(c)}(r,S); \tag{34}$$

$$r \to +\infty: \qquad U_{rn}^{(p)}(r,S) \to 0; \quad U_{rn}^{(c)}(r,S) \to 0;$$
$$U_{\vartheta n}^{(p)}(r,S) \to 0; \quad U_{\vartheta n}^{(c)}(r,S) \to 0; \tag{35}$$

$$\partial_{rr}\varphi_n^{(1)}(r,S) + \frac{2}{r}\,\partial_r\varphi_n^{(1)}(r,S) - n(n+1)\varphi_n^{(1)}(r,S) = 0; \tag{36}$$

$$\partial_r\varphi_n^{(1)}(r,S) \to 0; \qquad \varphi_n^{(1)}(r,S) \to 0; \tag{37}$$

$$\varphi_n^{(1)}(r,S) + \xi_n(S)\partial_r\varphi^{(0)} = 0; \tag{38}$$

$$S\xi_n(S) - h_n = U_{rn}^{(p)}(r,S) + U_{rn}^{(c)}(r,S); \tag{39}$$

$$\partial_r\left(U_{\vartheta n}^{(p)}(r,S) + U_{\vartheta n}^{(c)}(r,S)\right) + \frac{1}{r}\left(U_{rn}^{(p)}(r,S) + U_{rn}^{(c)}(r,S)\right)$$
$$- \frac{1}{r}\left(U_{\vartheta n}^{(p)}(r,S) + U_{\vartheta n}^{(c)}(r,S)\right) = 0; \tag{40}$$

$$-p_n^{(p)(1)}(r,S) + 2\rho\nu\big(\partial_r U_{rn}^{(p)}(r,S) + \partial_r U_{rn}^{(c)}(r,S)\big)$$
$$+ \frac{1}{4\pi\varepsilon_d}\,\partial_r\varphi^{(0)}\big(\partial_r\varphi_n^{(1)}(r,S) + \xi_n(S)\partial_{rr}\varphi^{(0)}\big)$$
$$- \frac{\sigma}{a^2}\,(n+2)(n-1)\xi_n(S) = 0. \tag{41}$$

3a. Решение уравнений пограничного слоя (24), (25), описывающих радиальные пульсации пузырька без изменения его формы

Решив систему (24), (25) с учетом условия ограниченности (26), с граничными условиями (27)–(30) и принимая во внимание решения задачи нулевого порядка (22), найдем

$$U_{r0}^{(p)}(r,S) = \frac{A_0(S)}{r^2}; \quad p_0^{(p)(1)}(r,S) = \rho S\,\frac{A_0 S}{r};$$
$$\varphi_0^{(1)}(r,S) = 0; \qquad \varphi_S^{(1)}(S) = -\frac{Q}{a^2}\,R(S), \tag{42}$$

где $A_0(S)$ — константа.

Подставив (42) в (29), (30), получим систему для определения двух констант $A_0(S)$, $R(S)$

$$SR(S) - h_0 = \frac{A_0(S)}{a^2};$$
$$S\,\frac{A_0(S)}{a^2} + 4\nu\,\frac{A_0(S)}{a^4} + \omega_0^2 R(S) = 0, \tag{43}$$

где ω_0 — частота радиальных колебаний пузырька, определяющаяся выражением

$$\omega_0^2 = \frac{3\gamma}{\rho a^2}\,p_g^{(0)}\left(\frac{r_0}{a}\right)^{3\gamma} - \frac{2\sigma}{\rho a^3} + \frac{Q^2}{2\pi\varepsilon_d\rho a^6}.$$

Из систему (43) несложно найти коэффициенты $A_0(S)$, $R(S)$, которые примут вид

$$R(S) = h_0\left(S + \frac{4\nu}{a^2}\right)\left(S^2 + \frac{4\nu}{a^2}\,S + \omega_0^2\right)^{-1};$$

$$A_0(S) = -\omega_0^2 a^2 h_0\left(S^2 + \frac{4\nu}{a^2}\,S + \omega_0^2\right)^{-1}.$$

Подставив найденное значение $A_0(S)$ в (42), найдем

$$U_{r0}^{(p)}(r,S) = -\omega_0^2 h_0\,\frac{a^3}{r^2}\left(S^2 + \frac{4\nu}{a^2}\,S + \omega_0^2\right)^{-1};$$

$$p_0^{(p)(1)}(r,S) = -\rho S a\omega_0^2 h_0\,\frac{a}{r}\left(S^2 + \frac{4\nu}{a^2}\,S + \omega_0^2\right)^{-1}.$$

Выполнив обратное преобразование Лапласа, получим

$$R(t) = h_0\left(\cos(\psi_0 t) + 2\,\frac{\nu}{a^2}\,\frac{\sin(\psi_0 t)}{\psi_0}\right)\exp\left(-2\,\frac{\nu}{a^2}\,t\right);$$

$$U_0^{(p)}(r,t) = -\omega_0^2 h_0\,\frac{a^2}{r^2}\,\frac{\sin(\psi_0 t)}{\psi_0}\,\exp\left(-2\,\frac{\nu}{a^2}\,t\right);$$

$$p_0^{(p)(1)}(r,t) = -\rho a\omega_0^2 h_0\,\frac{a}{r}\left(\cos(\psi_0 t) - 2\,\frac{\nu}{a^2}\,\frac{\sin(\psi_0 t)}{\psi_0}\right)$$
$$\times \exp\left(-2\,\frac{\nu}{a^2}\,t\right); \quad \psi_0 = \sqrt{\omega_0^2 - 4\,\frac{\nu^2}{a^4}}. \tag{44}$$

Из выражений (44), описывающих радиальные пульсации конечной амплитуды заряженного пузырька, видно, что поле скоростей сферически симметрично потенциально и вихревые компоненты отсутствуют.

3b. Решение краевой задачи (31)–(41), описывающей поверхностные осцилляции пузырька без изменения его объема

Решение системы (31), (32) и (33), (34) с учетом условия ограниченности (35)–(37) и граничных условий (38)–(41) начнем с решения уравнений (31), (32), которые несложно свести к дифференциальному уравнению типа Эйлера для давления и получить решение, удовлетворяющее условиям ограниченности (7) или (35), вида

$$p_n^{(p)(1)}(r,S)=\frac{\rho S}{n+1}\frac{A_n(S)}{r^{n+1}};\quad U_{rn}^{(p)}(r,S)=\frac{A_n(S)}{r^{n+2}};$$

$$U_{\vartheta n}^{(p)}(r,S)=-\frac{1}{n+1}\frac{A_n(S)}{r^{n+2}}. \tag{45}$$

Вихревые компоненты поля скоростей несложно найти, решив систему (33), (34) и удовлетворяя условиям ограниченности (35)

$$U_{\vartheta n}^{(c)}(r,S)=B_n(S)\exp\left(-\sqrt{\frac{S}{\nu}}\,r\right);$$

$$U_{rn}^{(c)}(r,S)=-B_n(S)\,\frac{n(n+1)}{r}$$

$$\times\sqrt{\frac{\nu}{S}}\left(1+\frac{1}{r}\left(\sqrt{\frac{\nu}{S}}\right)\right)\exp\left(-\sqrt{\frac{S}{\nu}}\,r\right). \tag{46}$$

Используя решение задачи нулевого порядка малости (22), из уравнений (36)–(38) для образа Лапласа поправки первого порядка к электростатическому потенциалу в окрестности заряженного пузырька найдем

$$\varphi_n^{(1)}(r,S)=\frac{Q}{a^2}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}\xi_n(S). \tag{47}$$

Подставив выражения (45)–(47) в систему граничных условий кинематического (39) и динамических (40), (41) и учитывая (22), несложно найти коэффициенты $A_n(S)$, $B_n(S)$, $\xi_n(S)$, которые с учетом слагаемых не выше первого порядка малости по величине коэффициента кинематической вязкости примут вид

$$A_n(S)=-\frac{h_n\omega_n^2a^{n+2}}{D_n(S)}\left(1+2n(n+2)\,\frac{\nu}{Sa^2}\right)+O(\nu^{3/2});$$

$$B_n(S)=-\frac{2(n+2)}{n+1}\frac{h_n\omega_n^2}{D_n(S)}\frac{\sqrt{\nu}}{a\sqrt{S}}\left(1-\frac{\sqrt{\nu}}{a\sqrt{S}}\right)$$

$$\times\exp\left(\sqrt{\frac{S}{\nu}}\,a\right)+O(\nu^{3/2});$$

$$\xi_n(S)=\frac{h_n}{D_n(S)}\left(S+2(n+2)(2n+1)\frac{\nu}{a^2}\right)+O(\nu^{3/2}); \tag{48}$$

$$D_n(S)=S^2+2(n+2)(2n+1)\frac{\nu S}{a^2}+\omega_n^2+O(\nu^{3/2});$$

$$\omega_n^2=\frac{\sigma}{\rho a^3}(n+1)(n-1)\left(n+2-W\left(\frac{r_0}{a}\right)^3\right),$$

$$W=\frac{Q^2}{4\pi\sigma\varepsilon_d r_0^3}.$$

Из выражений (48) видно, что изображения Лапласа параметров $\xi_n(S)$, $p_n^{(p)(1)}(r,S)$, $U_{rn}^{(p)}(r,S)$, $U_{\vartheta n}^{(p)}(r,S)$, $U_{\vartheta n}^{c}(r,S)$, $U_{rn}^{(c)}(r,S)$, для которых справедливы выражения (45), (46), являются аналитическими функциями во всей комплексной плоскости за исключением точек, в которых $D_n(S)=0$. Дисперсионное уравнение $D_n(S)=0$, полученное выше в рамках модели пограничного слоя, имеет два комплексно сопряженных корня

$$S_n^{(+)}=-\alpha_n+i\overline{\omega}_n;\quad S_n^{(-)}=-\alpha_n-i\overline{\omega}_n; \tag{49}$$

$$\alpha_n=(n+2)(2n+1)\nu/a^2;\quad \overline{\omega}_n=\sqrt{\omega_n^2-\alpha_n^2}.$$

С учетом сказанного формула обратного преобразования Лапласа запишется в виде

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}f(S)\exp(St)dS$$

$$=\operatorname*{res}_{S=S^{(+)}}\left(f(S)\exp(St)\right)+\operatorname*{res}_{S=S^{(-)}}\left(f(S)\exp(St)\right). \tag{50}$$

Подставив коэффициенты (48) в выражения (45), (46), учитывая (50), найдем решение задачи первого порядка малости по амплитуде начального отклонения поверхности пузырька

$$\xi_n(t)=h_n\left(\cos(\overline{\omega}_nt)+\frac{\alpha_n}{\overline{\omega}_n}\sin(\overline{\omega}_nt)\right)\exp(-\alpha_nt);$$

$$p_n^{(p)(1)}(r,t)=-\frac{\rho a\omega_n^2h_n}{n+1}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}$$

$$\times\left(\cos(\overline{\omega}_nt)-(n+2)\frac{\nu}{\overline{\omega}_na^2}\sin(\overline{\omega}_nt)\right)\exp(-\alpha_nt);$$

$$U_{rm}^{(p)}(r,t)=-h_n\left(\frac{a}{r}\right)^{n+2}$$

$$\times\left(\frac{\omega_n^2}{\overline{\omega}_n}\sin(\overline{\omega}_nt)-2n(n+2)\frac{\nu}{a^2}\cos(\overline{\omega}_nt)\right)\exp(-\alpha_nt);$$

$$U_{\vartheta n}^{(p)}(r,t)=\frac{h_n}{n+1}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+2}$$

$$\times\left(\frac{\omega_n^2}{\overline{\omega}_n}\sin(\overline{\omega}_nt)-2n(n+2)\frac{\nu}{a^2}\cos(\overline{\omega}_nt)\right)\exp(-\alpha_nt);$$

$$U_{\vartheta n}^{(c)}(r,t)=\frac{n+2}{n+1}\frac{\omega_n^2}{\overline{\omega}_n}\frac{h_n}{ia}\left[\frac{\eta_n^{(-)}}{\chi_n^{(-)}}\exp\left(\chi_n^{(-)}(a-r)-i\overline{\omega}_nt\right)\right.$$

$$\left.-\frac{\eta_n^{(+)}}{\chi_n^{(+)}}\exp\left(\chi_n^{(+)}(a-r)+i\overline{\omega}_nt\right)\right]\exp(-\alpha_nt);$$

$$U_{rn}^{(c)}(r,t)=-n(n+2)\frac{\omega_n^2}{\overline{\omega}_n}\frac{h_n}{iar}\left[\frac{\eta_n^{(-)}}{(\chi_n^{(-)})^2}\left(1+\frac{1}{\chi_n^{(-)}r}\right)\right.$$

$$\times\exp\left(\chi_n^{(-)}(a-r)-i\overline{\omega}_nt\right)-\frac{\eta_n^{(+)}}{(\chi_n^{(+)})^2}\left(1+\frac{1}{\chi_n^{(+)}r}\right)$$

$$\left.\times\exp\left(\chi_n^{(+)}(a-r)+i\overline{\omega}_nt\right)\right]\exp(-\alpha_nt); \tag{51}$$

$$\chi_n^{(-)} = \sqrt{\frac{-i\overline{\omega}_n - \alpha_n}{\nu}}; \qquad \chi_n^{(+)} = \sqrt{\frac{i\overline{\omega}_n - \alpha_n}{\nu}};$$

$$\eta_n^{(-)} = 1 - \frac{1}{\chi_n^{(-)}a}; \qquad \eta_n^{(+)} = 1 - \frac{1}{\chi_n^{(+)}a}.$$

Соотношения (51) описывают поверхностные осцилляции заряженного пузырька.

4. Оценка толщины пограничного слоя

Напомним, что выражения (51) не являются точными решениями уравнений гидродинамики, а получены при частичном учете в линеаризованном уравнении Навье–Стокса вязких слагаемых, поэтому они будут хорошо описывать точное решение задачи об осцилляциях пузырька в вязкой жидкости только при малой вязкости жидкости, т. е. в условиях, когда вихревая компонента решения будет отлична от нуля лишь в тонком слое, прилегающем к поверхности пузырька, толщиной $\delta \ll \pi a$. Для завершения предпринятой модификации теории пограничного слоя для расчета линейных осцилляций заряженного пузырька в вязкой жидкости остается оценить толщину пограничного слоя, возникающего вблизи свободной поверхности осциллирующего пузырька в маловязкой жидкости.

Для оценки толщины пограничного слоя можно использовать тот факт, что вихрь скорости, рождаясь на свободной поверхности пузырька, диффундирует в глубь жидкости, окружающей пузырек, на некоторое характерное расстояние и затухает. Это характерное расстояние естественно принять за толщину пограничного слоя δ. Используя (46), (48)–(50) для вихря скорости, можно найти приближенное выражение

$$\operatorname{rot}\mathbf{U}(r,\vartheta,t) = \left(\sum_{n\in\Xi} \Omega_n(r,t)\partial_\vartheta P_n(\mu)\right)\mathbf{e}_\varphi,$$

где $\mathbf{e}_\varphi$ — азимутальный орт сферической системы координат,

$$\Omega_n(r,t) = \frac{n+2}{n+1}\frac{ih_n\omega_n^2}{\overline{\omega}_n a}\Big[\eta_n^{(-)}\lambda_n^{(-)}\exp\big(\chi_n^{(-)}(a-r) - i\overline{\omega}_n t\big)$$

$$-\eta_n^{(+)}\lambda_n^{(+)}\exp\big(\chi_n^{(+)}(a-r) + i\overline{\omega}_n t\big)\Big]\exp(-\alpha_n t); \qquad (52)$$

$$\lambda_n^{(-)} = 1 - \frac{1}{\chi_n^{(-)}r} - \frac{n(n+1)}{(\chi_n^{(-)})^2r^2}\left(1 + \frac{1}{\chi_n^{(-)}r}\right);$$

$$\lambda_n^{(+)} = 1 - \frac{1}{\chi_n^{(+)}r} - \frac{n(n+1)}{(\chi_n^{(+)})^2r^2}\left(1 + \frac{1}{\chi_n^{(+)}r}\right).$$

При малых значениях коэффициента кинематической вязкости $\nu \to 0$, для коэффициетов выражения (52) при $\overline{\omega}_n \neq 0$ будут справедливы асимптотические оценки значений коэффициентов $\chi_n^{(\pm)} \to \infty$, $\eta_n^{(\pm)} \to 1$, $\lambda_n^{(\pm)} \to 1$, с учетом которых выражение для вихря $\Omega_n(r,t)$ можно переписать в приближенном виде

$$\Omega_n(r,t) = \frac{n+2}{n+1}\frac{ih_n\omega_n^2}{\overline{\omega}_n a}\Big[\exp\big(\chi_n^{(-1)}(a-r) - i\overline{\omega}_n t\big)$$

$$-\exp\big(\chi_n^{(+)}(a-r) + i\overline{\omega}_n t\big)\Big]\exp(-\alpha_n t). \qquad (53)$$

Выражение (53) содержит параметры $\chi_n^{(+)}$, которые в зависимости от $\overline{\omega}_n$ и α_n могут принимать три различных значения. Первое значение $\chi_n^{(\pm)}$ принимают в случае, когда $\overline{\omega}_n^2 > 0$, т. е. корни дисперсионного уравнения, полученного в приближении пограничного слоя (49), будут комплексно сопряженными. В этом случае, как и корни дисперсионного уравнения, параметры $\chi_n^{(\pm)}$ будут комплексно сопряженными величинами вида

$$\chi_n^{(\pm)} = \sqrt{\frac{\pm i\overline{\omega}_n - \alpha_n}{\nu}} = \frac{\sqrt{\omega_n - \alpha_n}}{\sqrt{2\nu}} \pm i\,\frac{\sqrt{\omega_n + \alpha_n}}{\sqrt{2\nu}}.$$

В данной ситуации свободная поверхность пузырька будет совершать периодические осцилляции в окрестности равновесной сферы.

Второе значение $\chi_n^{(\pm)}$ соответствует случаю, когда $\overline{\omega}_n^2 < 0$ и $|\overline{\omega}_n| > \alpha_n$. В этой ситуации корни дисперсионного уравнения (49) будут вещественными числами разных знаков $S_n^{(-)} > 0$, $S_n^{(+)} < 0$, а величины $\chi_n^{(-)}$ и $\chi_n^{(+)}$ будут принимать соответственно вещественное и мнимое значения вида

$$\chi_n^{(-)} = \sqrt{\frac{i\overline{\omega}_n - \alpha_n}{\nu}} = \sqrt{\frac{|\overline{\omega}_n| - \alpha_n}{\nu}};$$

$$\chi_n^{(+)} = \sqrt{\frac{i\overline{\omega}_n - \alpha_n}{\nu}} = i\sqrt{\frac{|\overline{\omega}_n| + \alpha_n}{\nu}}.$$

В данной ситуации поверхность пузырька является неустойчивой по отношению к искажению формы, что приводит к его дроблению на более мелкие пузырьки.

Третье значение величин $\chi_n^{(\pm)}$ соответствует ситуации, в которой $\overline{\omega}_n^2 < 0$ и $|\overline{\omega}_n| < \alpha_n$. В данном случае корни дисперсионного уравнения (49) будут вещественными отрицательными, а величины $\chi_n^{(-)}$ и $\chi_n^{(+)}$ чисто мнимыми:

$$\chi_n^{(-)} = \sqrt{\frac{-i\overline{\omega}_n - \alpha_n}{\nu}} = i\sqrt{\frac{-|\overline{\omega}_n| + \alpha_n}{\nu}};$$

$$\chi_n^{(+)} = \sqrt{\frac{i\overline{\omega}_n - \alpha_n}{\nu}} = i\sqrt{\frac{|\overline{\omega}_n| + \alpha_n}{\nu}}.$$

Отметим, что данная ситуация наблюдается в очень небольшом диапазоне параметров задачи вследствие малости параметра $\alpha_n \sim \nu$, характеризуется апериодическими движениями стенки пузырька и непосредственно предшествует моменту потери устойчивости формы пузырька.

Проанализировав выражение (53), несложно увидеть, что в третьем случае, когда параметры задачи таковы, что $\overline{\omega}_n^2 < 0$ и $|\overline{\omega}_n| < \alpha_n$, т.е. когда свободная поверхность пузырька совершает апериодические, но устойчивые движения, вихрь скорости жидкости будет периодической функцией координаты r и не будет иметь явно выраженного множителя, затухающего при $r \to +\infty$, в связи с чем вихревое движение будет проникать в глубь жидкости, окружающей пузырек, на значительное расстояние, и развитая выше теория пограничного слоя в данной ситуации будет неприменима.

В первом и втором случаях, т.е. в условиях, когда поверхность пузырька совершает периодические осцилляции или является неустойчивой по отношению к бесконечно малым искажениям, в выражении для ротора скорости жидкости (53) можно выделить экспоненциальные множители, быстро убывающие при $r \to +\infty$, а следовательно, можно определить и толщину пограничного слоя, в котором будет локализовано вихревое движение. Так, в первом случае, когда $\overline{\omega}_n^2 > 0$, из (53) несложно получить выражение для вихря

$$\Omega_n(r,t) = \frac{2(n+2)}{n+1}\,\frac{h_n\omega_n^2}{\overline{\omega}_n a}\,\sin\left(\frac{\sqrt{\omega_n+\alpha_n}}{\sqrt{2\nu}}(a-r)+\overline{\omega}_n t\right)$$
$$\times\exp\left(\frac{\sqrt{\omega_n-\alpha_n}}{\sqrt{2\nu}}(a-r)-\alpha_n t\right). \qquad (54)$$

Во втором случае, когда $\overline{\omega}_n^2 < 0$ и $|\overline{\omega}_n| > \alpha_n$, в выражении (53) можно учитывать только первое слагаемое, содержащее $\chi_n^{(-)}$, поскольку второе быстро затухает со временем и не участвует в формировании пограничного слоя вблизи свободной поверхности пузырька. В данном случае ротор скорости (53) можно записать в виде

$$\Omega_n(r,t) = \frac{n+2}{n+1}\,\frac{h_n\omega_n^2}{|\overline{\omega}_n| a}$$
$$\times\exp\left(\sqrt{\frac{|\overline{\omega}_n|-\alpha_n}{\nu}}(a-r)+(|\overline{\omega}_n|-\alpha_n)t\right). \qquad (55)$$

Проанализировав выражения (54), (55) несложно увидеть, что амплитуда вихря скорости имеет максимальное значение при $r = a$, т.е. на свободной поверхности пузырька, и затухает в глубь окружающей жидкости, уменьшая свою амплитуду в $e \cong 2.718$ раз на характерном линейном масштабе $\sqrt{2\nu/(\omega_n-\alpha_n)}$ при $\overline{\omega}_n^2 > 0$ или на масштабе $\sqrt{\nu/(|\overline{\omega}_n|-\alpha_n)}$ при $\overline{\omega}_n^2 < 0$ и $|\overline{\omega}_n| > \alpha_n$. Данные характерные линейные масштабы и определяют характерную толщину δ пограничного слоя вблизи свободной поверхности заряженного пузырька в вязкой диэлектрической жидкости

$$\delta = \begin{cases} \sqrt{2\nu/(\omega_n-\alpha_n)}, & \overline{\omega}_n^2 > 0; \\ \sqrt{\nu/(|\overline{\omega}_n|-\alpha_n)}, & \overline{\omega}_n^2 < 0;\ |\overline{\omega}_n| > \alpha_n. \end{cases} \qquad (56)$$

На основе выражений (56) можно найти область физических параметров ν, $p_g^{(0)}$, $p^{(0)} - p_V$, W, в которых

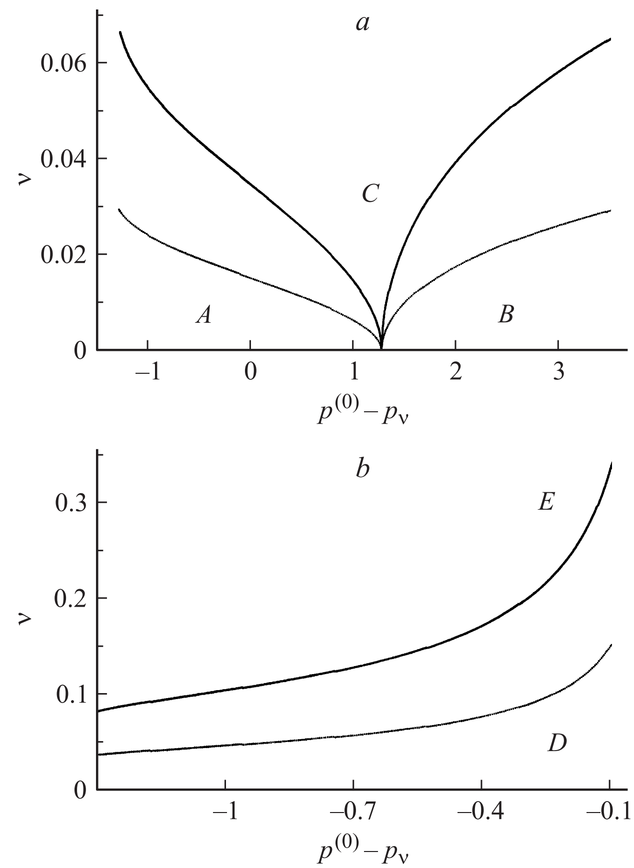

Рис. 1. Результаты расчета (см. (56)) областей, в которых возможно использование теории пограничного слоя. Теория пограничного слоя применима в областях A, B, D, но неприменима в областях C и E. Сплошная кривая построена при $p_g^{(0)} = 0.2$; $W = 1$; $\gamma = 4/3$, $n = 2$, $\Theta = 0.09$, пунктир — при 0.05. a — для меньшего корня уравнения (22); b — для большего.

предлагаемая модификация теории пограничного слоя может быть использована с заранее заданной точностью.

Пусть, например, требуется провести расчет с точностью $U_r^{(c)}/U_\vartheta^{(c)} = \Theta \sim \delta/(a\pi)$, где Θ — допустимая погрешность, тогда соотношение $\delta \sim \theta a\pi$ совместно с (56) дает связь между предельными значениями коэффициента вязкости ν и параметрами $p_g^{(0)}$, $p^{(0)} - p_V$, W, при которых можно пользоваться развитой теорией пограничного слоя. Результаты подобного расчета для двух возможных корней уравнения (22), определяющих равновесные состояния пузырька в жидкости (см. [3]), приведены на рис. 1, где для заданного Θ и постоянных значений $p_g^{(0)} = 0.2$ и $W = 1$ выделены области A, B, D, в которых нужно пользоваться строгой теорией. Отметим, что все кривые на рис. 1 и на всех последующих рисунках рассчитаны в безразмерных переменных, в которых $\rho = \sigma = r_0 = 1$ для основной моды осцилляций пузырька $n = 2$.

5. Анализ полученных результатов

Для оценки точности предлагаемой модификации теории пограничного слоя, связанного с поверхностными осцилляциями пузырька в вязкой диэлектрической жидкости, проведем сравнение найденного решения с точным решением системы (2)–(9), найденным в [2] и имеющим вид

$$\xi_n(t)=\sum_{m=1}^{2}a^1_{\xi n}(S_n^{(m)})\exp(S_n^{(m)}t)+\int\limits_0^{+\infty}a^2_{\xi n}(\tau)\exp(-\tau^2t)d\tau;$$

$$U_{rn}(r,t)=\sum_{m=1}^{2}\Bigg(a^1_n(S_n^{(m)})\left(\frac{q}{r}\right)^{n+2}+b^1_n(S_n^{(m)})\frac{1}{r}\,\frac{k_n(\chi_n^{(m)}r)}{k_n(\chi_n^{(m)}a)}\Bigg)\exp(S_n^{(m)}t)$$
$$+\int\limits_0^{+\infty}\Bigg(a^2_n(\tau)\left(\frac{a}{r}\right)^{n+2}+\frac{b_n^{2(+)}(\tau)}{r}\,\frac{k_n(\xi(\tau)r)}{k_n(\xi(\tau)a)}-\frac{b_n^{2(-)}(\tau)}{r}\,\frac{k_n(-\xi(\tau)r)}{k_n(-\xi(\tau)a)}\Bigg)\exp(-\tau^2t)d\tau;$$

$$U_{\vartheta n}(r,t)=-\sum_{m=1}^{2}\Bigg(\frac{a^1_n(S_n^{(m)})}{n+1}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+2}+\frac{b^1_n(S_n^{(m)})}{n(n+1)}\times\left(\frac{n}{r}\,\frac{k_n(\chi_n^{(m)}r)}{k_n(\chi_n^{(m)}a)}+\chi_n^{(m)}\,\frac{k_{n-1}(\chi_n^{(m)}r)}{k_n(\chi_n^{(m)}a)}\right)\Bigg)\exp(S_n^{(m)}t)$$
$$-\int\limits_0^{+\infty}\Bigg\{\frac{a^2_n(\tau)}{n+1}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+2}+\frac{b_n^{2(+)}(\tau)}{n(n+1)}\left(\frac{n}{r}\,\frac{k_n(\xi(\tau)r)}{k_n(\xi(\tau)a)}+\xi(\tau)\,\frac{k_{n-1}(\xi(\tau)r)}{k_n(\xi(\tau)a)}\right)-\frac{b_n^{2(-)}(\tau)}{n(n+1)}\left(\frac{n}{r}\,\frac{k_n(-\xi(\tau)r)}{k_n(-\xi(\tau)a)}-\xi(\tau)\,\frac{k_{n-1}(-\xi(\tau)r)}{k_n(-\xi(\tau)a)}\right)\Bigg\}\exp(-\tau^2t)d\tau;$$

$$p_n(r,t)=\sum_{m=1}^{2}\frac{\rho aS_n^{(m)}}{n+1}\,a^1_n(S_n^{(m)})\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}\exp(S_n^{(m)}t)-\int\limits_0^{+\infty}\frac{\rho a\tau^2}{n+1}\,a^2_n(\tau)\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}\exp(-\tau^2t);\qquad(57)$$

$$a^1_{\xi n}(S_n^{(m)})=\Bigg(S_n^{(m)}+2(n+2)(2n+1)\frac{\nu}{a^2}-\frac{4n(n+2)^2\nu}{a^3\chi_n^{(m)}}\,\frac{k_{n-1}(\chi_n^{(m)}a)}{k_n(\chi_n^{(m)}a)}\,\Lambda_n(S_n^{(m)})\Bigg)\frac{h_n}{\partial_{S_n^{(m)}}D_n(S_n^{(m)})};$$

$$\Lambda_n(S_n^{(m)})=\left(1+\frac{2}{\chi_n^{(m)}a}\,\frac{k_{n-1}(\chi_n^{(m)}a)}{k_n(\chi_n^{(m)}a)}\right)^{-1};$$

$$\xi(\tau)=\frac{i\tau}{\sqrt{\nu}};\qquad\chi_n^{(m)}=\sqrt{\frac{S^{(m)}}{\nu}};$$

$$a^1_n(S_n^{(m)})=-\left(1+2n(n+2)\,\frac{\nu}{a^2S_n^{(m)}}\,\Lambda_n(S_n^{(m)})\right)\times\frac{\omega_n^2h_n}{\partial_{S_n^{(m)}}D_n(S_n^{(m)})};$$

$$b^1_n(S_n^{(m)})=2n(n+2)\,\frac{\nu}{aS_n^{(m)}}\,\Lambda_n(S_n^{(m)})\,\frac{\omega_n^2h_n}{\partial_{S_n^{(m)}}D_n(S_n^{(m)})};$$

$$D_n(S_n^{(m)})=(S_n^{(m)})^2+\omega_n^2+2(n+2)(2n+1)\,\frac{S_n^{(m)}\nu}{a^2}-4n(n+2)^2\frac{\sqrt{\nu^3}}{a^3}\sqrt{S_n^{(m)}}\,\frac{k_{n-1}(\chi_n^{(m)}a)}{k_n(\chi_n^{(m)}a)}\,\Lambda_n(S_n^{(m)});$$

$$\partial_{S_n^{(m)}}D_n(S_n^{(m)})=2S_n^{(m)}+2(n+2)(2n+1)\frac{\nu}{a^2}+2n(n+2)^2\,\frac{\nu}{a^2}\Bigg(1-\frac{1}{\chi_n^{(m)}a}\,\frac{k_{n-1}(\chi_n^{(m)}a)}{k_n(\chi_n^{(m)}a)}\times\left(2n+1+(4+(\chi_n^{(m)})^2a^2)\frac{1}{\chi_n^{(m)}a}\,\frac{k_{n-1}(\chi_n^{(m)}a)}{k_n(\chi_n^{(m)}a)}\right)\Bigg)\times\left(1+\frac{2}{\chi_n^{(m)}a}\,\frac{k_{n-1}(\chi_n^{(m)}a)}{k_n(\chi_n^{(m)}a)}\right)^{-2};$$

$$a^2_{\xi n}(\tau)=-\frac{4n(n+2)^2}{\Xi_n^{(+)}(\tau)\Xi_n^{(-)}(\tau)}\,\frac{h_n\nu^{3/2}\omega_n^2}{\pi a}\times\left(\frac{k_{n-1}(\xi(\tau)a)}{k_n(\xi(\tau)a)}+\frac{k_{n-1}(-\xi(\tau)a)}{k_n(-\xi(\tau)a)}\right);$$

$$a^2_n(\tau)=\frac{4n(n+2)}{\tau^2\Xi_n^{(+)}(\tau)\Xi_n^{(-)}(\tau)}\,\frac{h_n\nu^{3/2}\omega_n^2}{a^3\pi}\times\left((n+1)\tau^4\left(1-2(n-1)(n+2)\,\frac{\nu}{a^2\tau^2}\right)-\omega_n^2\right)\times\left(\frac{k_{n-1}(\xi(\tau)a)}{k_n(\xi(\tau)a)}+\frac{k_{n-1}(-\xi(\tau)a)}{k_n(-\xi(\tau)a)}\right);$$

$$b_n^{2(\pm)}(\tau)=\frac{2n(n+2)\nu h_n\omega_n^2}{a\pi i\tau\,\Xi_n^{(\pm)}(\tau)};$$

$$\Xi_n^{(\pm)}(\tau)=\left(\tau^4+\omega_n^2-2(n+2)(2n+1)\,\frac{\tau^2\nu}{a^2}\right)\times\left(1\pm\frac{2\sqrt{\nu}}{ia\tau}\,\frac{k_{n-1}(\pm\xi(\tau)a)}{k_n(\pm\xi(\tau)a)}\right)\pm4n(n+2)^2\frac{\tau\nu^{3/2}}{ia^3}\,\frac{k_{n-1}(\pm\xi(\tau)a)}{k_n(\pm\xi(\tau)a)},$$

где $S_n^{(m)}$ — корень дисперсионного уравнения $D_n(S_n^{(m)})=0$, а $k_n(\chi_n^{(k)}r)$ — модифицированная сферическая функция Бесселя третьего рода аргумента $\chi_n^{(m)}r$ [10].

Используя точное решение (57), найдем выражение для ротора скорости жидкости в окрестности свободной поверхности пузырька

$$\operatorname{rot}\mathbf{U}(r,\vartheta,t)=\left(\sum_{n\in\Xi}\Omega_n(r,t)\partial_\vartheta P_n(\mu)\right)\mathbf{e}_\varphi;$$

$$\Omega_n(r,t)=\sum_{m=1}^{2}\frac{b_n^1(S_n^{(m)})}{n(n+1)}\frac{S_n^{(m)}}{\nu}\frac{k_n(\chi_n^{(m)}r)}{k_n(\chi_n^{(m)}a)}\exp(S_n^{(m)}t)$$

$$-\int_0^{+\infty}\left(\frac{b_n^{2(+)}(\tau)}{n(n+1)}\frac{k_n(\xi(\tau)r)}{k_n(\xi(\tau)a)}-\frac{b_n^{2(-)}(\tau)}{n(n+1)}\frac{k_n(-\xi(\tau)r)}{k_n(-\xi(\tau)a)}\right)$$

$$\times\frac{\tau^2}{\nu}\exp(-\tau^2 t)d\tau.$$

Дисперсионное уравнение $D_n(S_n^{(m)})=0$ и выражение для вихря (58) перепишем в асимптотике малой вязкости $\nu\to 0$

$$D_n(S_n^{(m)})=(S_n^{(m)})^2+2(n+2)(2n+1)\frac{S_n^{(m)}\nu}{a^2}+\omega_n^2+O(\nu^{3/2}); \qquad (59)$$

$$\Omega_n(r,t)=\sum_{m=1}^{2}\frac{2(n+2)}{n+1}\frac{\omega_n^2 h_n}{\partial_S D_n(S_n^{(m)})}\frac{\exp(\chi_n^{(m)}(a-r))}{r}\times\exp(S_n^{(m)}t)+O(\sqrt{\nu}). \qquad (60)$$

При записи (59) и (60) было использовано асимптотическое представление модифицированной сферической функции Бесселя третьего рода [10]

$$k_n(z)=\frac{\pi}{2z}\exp(-z)\times\left(1+\frac{n(n+1)}{2z}+O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right),\quad z\to\infty,$$

а также учтено, что интегральное слагаемое в (58) имеет порядок не ниже $\sqrt{\nu}$.

Дисперсионное уравнение (59) имеет корни, определенные выражениями (49), а выражение для вихря (60) можно привести к виду, схожему с выражениями (54), (55). Так, в частности, если $\overline{\omega}_n^2>0$, проанализировав как и выше, величины $\lambda_n^{(m)}$, выражение (60) можно привести к виду

$$\Omega_n(r,t)=\frac{2(n+2)}{n+1}\frac{h_n\omega_n^2}{\overline{\omega}_n r}\times\sin\left(\frac{\sqrt{\omega_n+\alpha_n}}{\sqrt{2\nu}}(a-r)+\overline{\omega}_n t\right)\times\exp\left(\frac{\sqrt{\omega_n-\alpha_n}}{\sqrt{2\nu}}(a-r)-\alpha_n t\right), \qquad (61)$$

если $\overline{\omega}_n^2<0$ и $|\overline{\omega}_n|>\alpha_n$ — то к виду

$$\Omega_n(r,t)=\frac{n+2}{n+1}\frac{h_n\omega_n^2}{|\overline{\omega}_n|r}\times\exp\left(\sqrt{\frac{|\overline{\omega}_n|-\alpha_n}{\nu}}(a-r)+(|\overline{\omega}_n|-\alpha_n)t\right). \qquad (62)$$

Из сравнения выражений (61), (62) с (54), (55) видно, что они практически совпадают, за тем лишь исключением, что в точных выражениях (61), (62) содержится множитель $1/r$, а в выражениях (54), (55), полученных в приближении пограничного слоя, вместо данного множителя содержится множитель $1/a$. Данную особенность можно также обнаружить, если сравнить разложения вихревых компонент скорости в ряд по величине вязкости жидкости ν, в приближении пограничного слоя (51) и точного решения (57). При малой вязкости жидкости амплитуда вихревой компоненты скорости жидкости, окружающей пузырек, стремится к нулю при $r\to+\infty$ за счет быстрого убывания экспоненциального множителя, и различие между точным и приближенным решениями при этом уменьшается, так как зависимость $1/r$ является слабой по сравнению с экспоненциальным уменьшением амплитуды волны при $r\to+\infty$.

Отметим также, что точные выражения для отклонения поверхности пузырька $\xi_n(t)$, поля давлений $p_n^{(1)}(r,t)$ и потенциальных компонент поля скоростей жидкости $U_{rn}^{(p)}(r,t)$, $U_{\vartheta n}^{(p)}(r,t)$, определенные выражениями (57) в пределе малой вязкости жидкости $\nu\to 0$, имеют аналитический вид, в точности совпадающей с такими же значениями, найденными в модели пограничного слоя и определенными выражениями (51).

Последние два факта (аналитическое совпадение (с точностью до слабоменяющегося множителя $1/r$) точных выражений для вихрей скорости, а так же вихревых компонент скорости в приближении малой вязкости с аналогичными выражениями, полученными в приближении теории пограничного слоя; полное аналитическое совпадение точных выражений для образующей поверхности пузырька, поля давления и компонент полей скоростей в приближении малой вязкости с такими же величинами, найденными в модели пограничного слоя) указывают на то, что в условиях малой вязкости предлагаемая модификация теории пограничного слоя качественно адекватно характеризует процессы, реализующиеся на поверхности пузырька и в глубине жидкости, окружающей его.

Интересно отметить, что, согласно выражениям (61), (62), на поверхности пузырька $r=a$ в идеальной жидкости (при $\nu=0$) вихрь скорости будет отличен от нуля и примет значения

$$\Omega_n(r,t)=\frac{2(n+2)}{n+1}\frac{h_n\omega_n}{a}\sin(\omega_n t)\ \text{при}\ \omega_n^2>0;$$

$$\Omega_n(r,t)=\frac{n+2}{n+1}\frac{h_n|\omega_n|}{a}\exp(|\omega_n|t)\ \text{при}\ \omega_n^2<0.$$

6. Численный анализ точности теории пограничного слоя

Проанализируем зависимости от радиальной переменной r выражения для вихря скорости жидкости $\Omega_n(r, t)$ в окрестности пузырька при фиксированном времени $t = \text{const}$, отталкиваясь от выражения (52), полученного в теории пограничного слоя и от (58) в точной теории. Результаты расчета по (52) и (58) приведены на рис. 2. Расчеты показывают, что теория пограничного

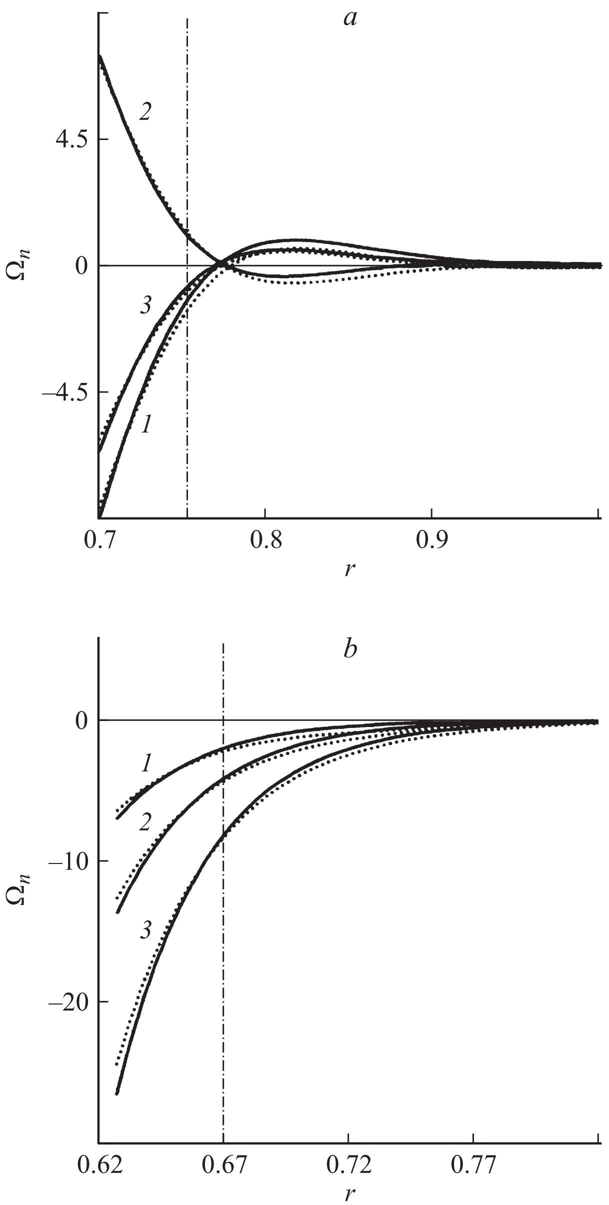

Рис. 2. Зависимости от радиальной переменной r амплитуды вихря Ω_n, построенные при $n = 2$, $p_g^{(0)} = 0.2$, $W = 1$, $\gamma = 4/3$. Сплошная кривая рассчитана по точному выражению (58), пунктир — по приближенному (52). Вертикальная штрих-пунктирная линия указывает толщину пограничного слоя, определенную, согласно (56): a) $p^{(0)} - p_V = 0.05$, $\nu = 0.004$: *1* — $t = 1.5$; *2* — 2.5; *3* — 3.5; b) $p^{(0)} - p_V = 1.32$, $\nu = 0.001$: *1* — 2.5; *2* — 3.5; *3* — 4.5.

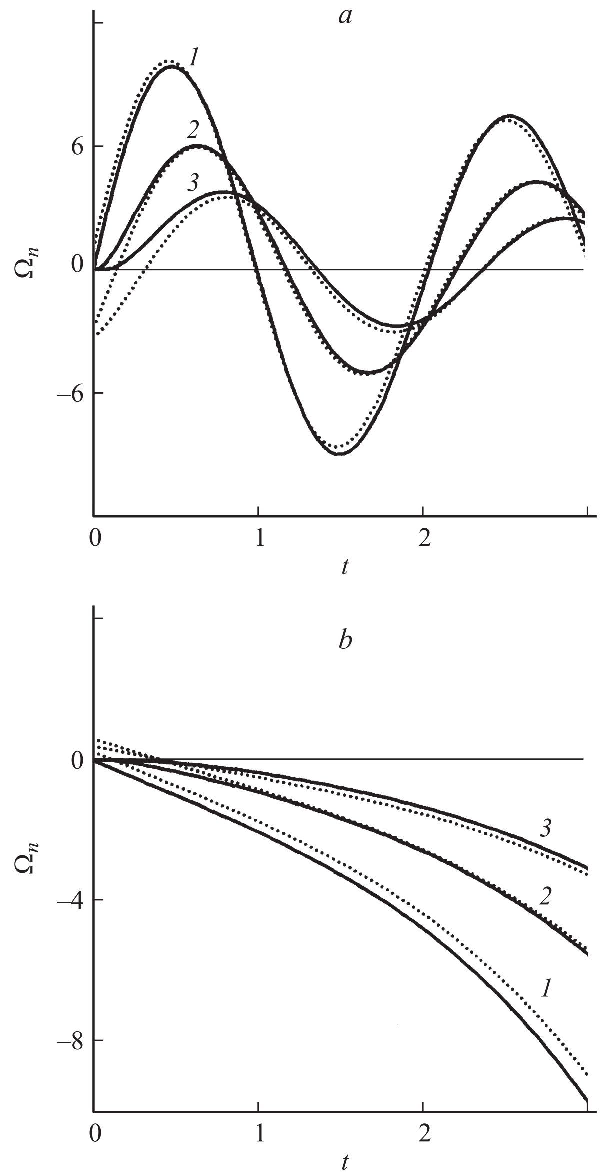

Рис. 3. Зависимости от времени t амплитуды вихря Ω_n, построенные по точному выражению (58) (сплошная кривая), и по приближенному (52) в рамках модифицируемой теории пограничного слоя (пунктир), при $r = a$ (кривая *1*), $r = a + \delta/2$ (*2*), $r = a + \delta$ (*3*), $n = 2$, $p_g^{(0)} = 0.2$, $W = 1$, $\gamma = 4/3$. a) $p^{(0)} - p_V = 0.05$, $\nu = 0.004$; b) $p^{(0)} - p_V = 1.32$, $\nu = 0.001$.

слоя хорошо приближает точное решение только с некоторого момента времени t_0, начиная с которого интегральное слагаемое в выражении (58) становится несущественным. В начальный момент времени $t = 0$ модифицированная теория пограничного слоя может давать существенные отклонения от точной теории в широком диапазоне значений r (рис. 3).

Появление обсуждаемой особенности с математической точки зрения связано с тем, что точное дисперсионное уравнение $D_n(S) = 0$ на комплексной плоскости $(\text{Re}(S),\ \text{Im}(S))$ имеет линию разрыва, совпадаю-

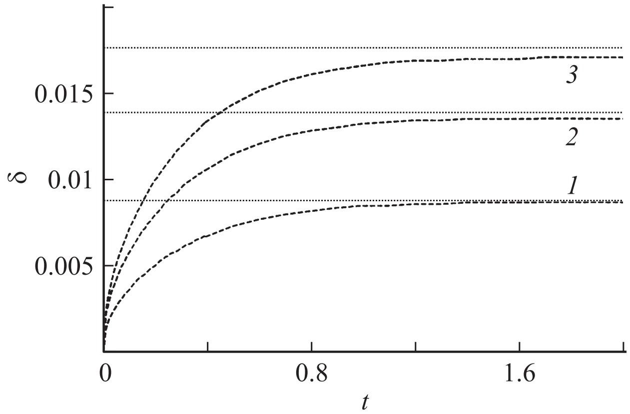

Рис. 4. Зависимость толщины пограничного слоя δ, возникающего у свободной поверхности пузырька, от времени t при $n = 2$, $p_g^{(0)} = 0.2$, $W = 1$, $\gamma = 4/3$, $p^{(0)} - p_V = 1.9$; $\nu = 0.0002$ (кривая *1*), 0.0005 (*2*), 0.0008 (*3*). Пунктир — значения, рассчитанные в рамках точкой теории по (58), точечные прямые рассчитаны по приближенному выражению (56).

щую с отрицательной частью вещественной оси комплексной плоскости, т.е. характеризующуюся условиями $\mathrm{Re}(S) < 0$, $\mathrm{Im}S = 0$, что приводит к точном выражении для вихря (58) к интегральному слагаемому. В теории пограничного слоя приближенное дисперсионное уравнение (48) является аналитической функцией во всей комплексной плоскости и поэтому никаких интегральных слагаемых не возникает. Интегральное слагаемое выражения (58) содержит в себе быстро затухающую с увеличением времени t экспоненту и потому проявляется только в начальные моменты времени, что и дает расхождение в значениях точного вихря скорости и вихря скорости, рассчитанного в теории пограничного слоя. С физической точки зрения данное обстоятельство связано с заданием в решаемой задаче нулевого начального условия для поля скоростей: полноценное распределение поля скоростей течения жидкости, связанное с осцилляциями поверхности пузырька, установится на интервале времени порядка периода осцилляций.

Отметим также, что время t_0, начиная с которого теория пограничного слоя хорошо приближает точную теорию, является величиной, много меньшей времени затухания движений в объеме жидкости, окружающей пузырек, и на его поверхности, как это хорошо видно из рис. 3.

Тот факт, что теория пограничного слоя описывает реальные движения жидкости в окрестности пузырька только начиная с некоторого момента времени, указывает на то, что на ее основе нельзя описать зарождение пограничного слоя вблизи свободной поверхности пузырька, находящегося в жидкости. Для описания образования пограничного слоя вблизи свободной поверхности заряженного пузырька в диэлектрической жидкости нужно использовать точное выражение (58) для вихря скорости. Принимая за толщину пограничного слоя δ расстояние от свободной поверхности пузырька, на котором величина вихря, описываемого точным решением (58), уменьшается в $e \approx 2.718$ раз, нанесем зависимость $\delta = \delta(t)$ на рис. 4 пунктиром. На том же рисунке точечные прямые дают пограничый слой, определенный в рамках модифицированной теории по соотношению (56).

Анализ рис. 4 показывает, что толщина пограничного слоя вблизи свободной поверхности пузырька в жидкости, определенная по точному решению, при малых временах возрастает, а затем остается практически постоянной, примерно равной толщине пограничного слоя (56), определенной в модифицированной теории.

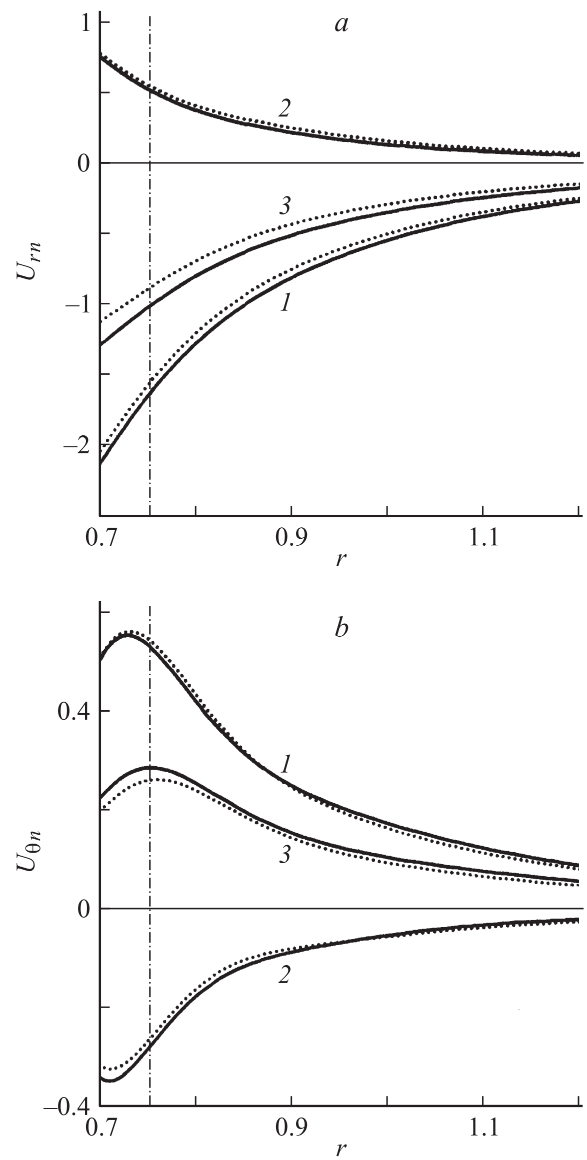

Рис. 5. Зависимости от координаты r проекций поля скоростей на орты сферической системы координат (a — U_{rn}, b — $U_{\vartheta n}$), построенные при $n = 2$, $p_g^{(0)} = 0.2$, $W = 1$, $\gamma = 4/3$, $p^{(0)} - p_V = 0.05$, $\nu = 0.004$: $t = 2.5$ (кривые *1*), 3.2 (*2*), 4.8 (*3*). Сплошные кривые соответствуют точному решению, пунктир — приближению пограничного слоя. Вертикальная штрихпунктирная линия указывает толщину пограничного слоя, определенную выражением (56).

Из рис. 4 можно видеть, что время формирования пограничного слоя у поверхности пузырька, совершающего осцилляции в вязкой жидкости, является небольшим по сравнению с характерными временами вязкого затухания колебаний поверхности пузырька. Оно примерно равно периоду осцилляций в области устойчивости или величине, обратной инкременту неустойчивости при дроблении пузырька на части.

Проведенный численный анализ точности теории пограничного слоя, модифицированной для расчета осцилляций пузырька в жидкости, указывает на то, что при $t \geq t_0$ теория пограничного слоя весьма точно описывает реальное вихревое движение жидкости в окрестности пузырька в вязкой безграничной жидкости. Если вязкость жидкости является малой величиной, то вихревые компоненты, пропорциональные $U_{rn}^{(c)}(r,t) \sim \nu$ и $U_{\vartheta n}^{(c)}(r,t) \sim \sqrt{\nu}$, оказываются малыми величинами в сравнении с крупномасштабным потенциальным движением жидкости в окрестности пузырька. Все это приводит к тому, что проекции скорости жидкости на орты сферической системы координат, определенные с учетом потенциальных и вихревых компонент при малой вязкости жидкости, в теории пограничного слоя и точной теории отличаются весьма незначительно, как этом можно видеть из рис. 5. Отметим также, что численный анализ точности построенной теории пограничного слоя указывает на то, что амплитудный коэффициент ξ_n, описывающий форму пузырька в жидкости, вычисленный в приближении теории пограничного слоя, весьма незначительно отличается от своего точного значения при малой вязкости жидкости.

7. Заключение

Преложенная модификация теории пограничного слоя у свободной заряженной поверхности осциллирующего пузырька в вязкой жидкости в асимптотике малой вязкости хорошо аппроксимирует точное решение. Существенно более простая математическая модель задачи расчета осцилляций заряженного пузырька в рамках развитой теории пограничного слоя по сравнению с точной математической моделью позволяет надеяться на значительное снижение трудоемкости расчета нелинейных осцилляций такого пузырька.

Работа выполнена при поддержке гранта президиума РФ № МК-2209-2006-1, гранта РФФИ № 06-01-00066-а и гранта губернатора Ярославской области.

Список литературы

[1] *Longuet-Higgins M.S.* // Royal. Soc. London. Trans. Ser. A. 1953. Vol. 245. N 903. P. 535–581.
[2] *Жаров А.Н., Григорьев А.И., Жарова И.Г.* // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 3. С. 16–24.
[3] *Григорьев А.И., Жаров А.Н.* // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 4. С. 8–13.
[4] *Жаров А.Н., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 11. С. 12–20.
[5] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.
[6] *Chandrasekhar S.* // Proc. London Math. Soc. 1959. Vol. 3. N 9. P. 141–149.
[7] *Григорьев А.И., Лазарянц А.Э.* // ЖВММФ. 1992. Т. 32. № 6. С. 929–938.
[8] *Левич В.Г.* Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.
[9] *Диткин В.А., Прудников А.П.* Операционное исчисление. М.: Высш. шк. 1975. 408 с.
[10] Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовиц, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.