

01;09

## Управление автоколебаниями систем с хаотической динамикой

© Э.В. Кальянов

Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники РАН,  
Фрязино, Московская область, Россия  
e-mail: erast@ms.ire.rssi.ru

(Поступило в Редакцию 20 августа 2007 г.)

Предложена управляемая автоколебательная система с автокоммутацией, основанная на использовании дополнительной обратной связи в генераторе, состоящем из замкнутых в кольцо нелинейного усилителя, фильтров первого и второго порядков и линии задержки. Приведены математическая модель системы и результаты ее численного анализа. Показана возможность хаотизации колебаний в системе с запаздыванием при больших значениях параметра инерционности, когда без автокоммутации возникает лишь режим регулярных колебаний. Рассмотрено влияние дополнительной обратной связи в системах, реализующихся в трех частных случаях: в системе с генератором без инерционного элемента, с генератором без фильтра второго порядка и с в системе с генератором, не содержащим линию задержки.

PACS: 05.45.-a

### Введение

В настоящее время известно относительно большое число различных автоколебательных систем с хаотической динамикой [1–5], изучение которых изменило многие представления в теории нелинейных колебаний. Такие системы находят различные практические применения [6,7]. Наряду с реальными генераторами используются также искусственно сконструированные системы, обладающие хаотической динамикой [8]. С целью управления колебаниями интенсивно исследуются неавтономные режимы различных генераторов с хаотическим поведением [9,10].

В работе [11] на примерах хорошо известных хаотических систем (системы Лоренца, Рёсслера и др.), уравнения которых сводятся к модели генератора с инерционностью, рассмотрено управление колебаниями при использовании нового метода, основанного на применении автокоммутации, обеспечиваемой в цифровом варианте с помощью простого алгоритма хаотизирующей обратной связи (АХОС). Показано, что в системах с инерционностью при использовании АХОС хаос возможен даже в случаях, когда в обычном режиме (без АХОС) генерируются лишь регулярные колебания. При хаотических автоколебаниях с помощью АХОС возможно получение более развитых нерегулярных движений.

Использование АХОС для хаотизации колебаний оказалось возможным применительно к различным системам: как к более сложным по сравнению с системой Лоренца, так и к очень простым, в том числе к классическому генератору Ван дер Поля [12], и даже к неавтоколебательным системам [13]. Представляет интерес расширение круга систем, управление колебаниями которых возможно с помощью АХОС. Это, в частности, является важным для целей шифрования при использовании уравнений, имеющих хаотические решения [8], а также для усложнения распознавания характеристик

хаотических генераторов в системах скрытой связи [14]. В настоящей работе исследуется новая система с АХОС, основанная на уравнениях, описывающих кольцевой генератор с запаздыванием и инерционностью. Сама математическая модель такого генератора изучалась лишь в [15] (при работе с автопараметрической обратной связью), хотя она достаточно хорошо соответствует реальной автоколебательной системе, основанной на лампе с бегущей волной, которая широко используется на практике [7]. В этом генераторе благодаря наличию затухания в замедляющей системе наряду с запаздыванием реализуется и инерционность.

### Исходные уравнения и основная математическая модель

Базовый генератор рассматриваемой системы состоит из соединенных в кольцо нелинейного усилителя, фильтра первого порядка, фильтра второго порядка и линии задержки [15]. При отмеченной последовательности расположения элементов колебательные процессы в генераторе могут быть описаны следующей системой дифференциально-разностных уравнений:

$$\begin{aligned} d^2x/dt^2 + \mu dx/dt + x &= z, \\ dz/dt &= [F(x_\tau) - z]/\delta, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x$  и  $z$  — переменные, отображающие соответственно колебательные процессы на выходах фильтров второго и первого порядков,  $x_\tau = x(t - \tau)$ ,  $\tau$  — время задержки сигнала,  $\mu$  — параметр диссипации фильтра второго порядка,  $\delta$  — постоянная времени фильтра первого порядка. Амплитудная характеристика усилителя  $F(x_\tau)$  — может быть аппроксимирована, как и в [15], выражением, обеспечивающим наличие в ней падающего участка, а именно

$$F(x_\tau) = Bx_\tau / (1 + x_\tau^n), \quad (2)$$

где  $B$ ,  $n$  — постоянные коэффициенты.

Для обеспечения условий автокоммутиации в системе (1) с помощью АХОС введем, аналогично [11], в правую часть первого уравнения функцию  $f(t)$ , обеспечивающую дополнительную обратную связь. Записывая получающиеся уравнения в виде, удобном для численного анализа, будем иметь

$$\begin{aligned} dx/dt &= y - \mu x, \\ dy/dt &= z - x + d_0 f(t), \\ dz/dt &= [F(x_\tau) - z/\delta], \end{aligned} \quad (3)$$

где  $d_0$  — коэффициент дополнительной обратной связи.

Для нерегулярного переключения движений, обеспечивающего процесс хаотизации колебаний, введем условие автокоммутиации, задающее два состояния функции  $f(t)$  через переменные, связанные с генерируемыми колебаниями. Условие автокоммутиации может быть представлено различным образом, но так, чтобы обеспечивалась возможность управления колебаниями. В случае хаотизации регулярных движений это возможность „раскачки“ автоколебаний. Условия автокоммутиации целесообразно выбирать применительно к конкретной управляемой системе; они могут существенно отличаться в зависимости от используемых уравнений. Применительно к дифференциально-разностным уравнениям (3) условие автокоммутиации можно представить в виде

$$f(t) = \begin{cases} u_1, & \text{если } x_\tau > x, \\ u_2, & \text{если } x_\tau < x, \end{cases} \quad (4)$$

где  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  — переменные, являющиеся решением системы (2)–(4) совместно со следующими четырьмя уравнениями, описывающими два линейных фильтрующих элемента:

$$\begin{aligned} du_i/dt &= -(\omega_i/Q_i)u_i + v_i, \\ dv_i/dt &= -\omega_i^2 u_i + d_i \omega_i^2 x. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $i = 1, 2$ ;  $d_i$ ,  $Q_i$ ,  $\omega_i$  — постоянные величины.

Соотношениями (2)–(5) определяется математическая модель автоколебательной системы с АХОС, когда базовый генератор содержит нелинейный усилитель с характеристикой, обладающей падающим участком, фильтры первого и второго порядков и линию задержки.

## Математическая модель в частных случаях

Представляют интерес управляемые автоколебательные системы, основанные на генераторах, описываемых уравнениями, получающимися из системы (1) в частных случаях, когда отсутствует какой-либо из трех пассивных элементов.

При отсутствии фильтра первого порядка (при  $\delta = 0$ ) система (1) преобразуется к следующему дифференциально-разностному уравнению:

$$d^2x/dt^2 + \mu dx/dt + x = F(x_\tau). \quad (6)$$

Это бесконечномерное уравнение хорошо известно. Оно приведено еще в [16], но при численном анализе заменено в этой работе соответствующим разностным уравнением. В режиме неавтономных колебаний система (6) изучалась в работе [17] при воздействии внешнего шумоподобного сигнала. При этом нелинейная характеристика аппроксимировалась с помощью кубической функции. Влияние АХОС применительно к системе (6) не исследовалось.

При рассмотрении влияния АХОС на колебания, формирующиеся в системе (6), дополним ее сигналом  $d_0 f(t)$ , записав в виде, удобном для численного анализа, получим

$$\begin{aligned} dx/dt &= z - \mu x, \\ dz/dt &= F(x_\tau) - x + d_0 f(t). \end{aligned} \quad (7)$$

Таким образом, математическая модель управляемой автоколебательной системы, основанной на генераторе, не содержащем инерционного элемента, определяется соотношениями (2), (4), (5), (7).

При отсутствии фильтра второго порядка вместо соотношения (1), заменив  $z$  на  $x$ , можем записать

$$\delta dx/dt + x = F(x_\tau). \quad (8)$$

Это уравнение при аппроксимации нелинейной характеристики с помощью выражения (2) предложено в работе [18] для описания регуляции образования кровяных клеток у человека и получило название уравнения Мэки–Гласса. При неавтономной работе оно исследовалось в [19]. Подобное уравнение, отличающееся лишь нелинейной характеристикой, определяемой синусоидальной функцией, получено в работе [20] при анализе процессов в кольцевом оптическом резонаторе и использовано в работе [21] при анализе скрытой передачи информации. Известно использование также и других формул для аппроксимации нелинейности в уравнении (8) [22].

По аналогии с записью неавтономного уравнения Мэки–Гласса [19] введем функцию, обеспечивающую управляющую обратную связь, в правую часть уравнения (8), так что

$$\delta dx/dt + x = F(x_\tau) + d_0 f(t). \quad (9)$$

Это уравнение совместно с соотношениями (2), (4), (5) определяет математическую модель управляемой автоколебательной системы, основанной на генераторе, не содержащем инерционного элемента.

При отсутствии линии задержки (при  $\tau = 0$ ) система (3) упрощается так, что

$$\begin{aligned} dx/dt &= y - \mu x, \\ dy/dt &= z - x + d_0 f(t), \\ dz/dt &= [F(x) - z]/\delta. \end{aligned} \quad (10)$$

При этом выражение для нелинейной характеристики приобретает вид

$$F(x) = Bx/(1 + x^n). \quad (11)$$

Генератор, эквивалентный системе, описываемой этими уравнениями, при  $d_0 = 0$  и характеристике рэлеевского типа (при  $F(x) = Bx \exp(-x^2)$ ) получил название генератор Дмитриева–Кислова [4]. Он детально изучен в работе [2], в которой, в частности, показана возможность хаотизации колебаний, если  $\delta$  достигает относительно больших значений (при  $\delta \approx 2$ ).

Представляет интерес исследование влияния АХОС на колебания, возбуждающиеся в системе, основанной на генераторе, описываемом уравнениями (10), (11), особенно в регулярных режимах. Очевидно, что условие (4) не может быть использовано для создания условий переключения колебаний, так как в системе нет запаздывания. Вместо выражения (4) можно использовать следующее условие:

$$f(t) = \begin{cases} u_1, & \text{если } |u_1 u_2| < a, \\ u_2, & \text{если } |u_1 u_2| > b, \end{cases} \quad (12)$$

где  $a$  и  $b$  — постоянные коэффициенты.

Таким образом, математическая модель управляемой автоколебательной системы, не содержащей запаздывания, определяется выражениями (5), (10)–(12).

## Влияние АХОС при больших значениях параметров запаздывания и инерционности

Исходная модель, описываемая уравнениями (1), является системой с бесконечным числом степеней свободы. В ней, естественно, как и в более простых системах с запаздывающим аргументом, при больших задержках могут возбуждаться хаотические колебания. Однако в соответствии с результатами работы [15] в генераторе, подобном системе (1), при возбуждении хаоса благодаря обеспечению достаточно большой задержки хаотизация нарушается при увеличении параметра  $\delta$ . Так, при  $\tau = 1.6$  увеличение параметра инерционности приводит (при  $\mu = 0.1$ ,  $B = 6$ ,  $n = 4$ ) к простым однотактным движениям, когда параметр инерционности превышает  $\delta \approx 1.2$ . Как будет показано ниже, в этом случае использование АХОС позволяет реализовать управление колебательным процессом, обеспечивая режим хаотических движений. Это иллюстрируется рис. 1. На нем

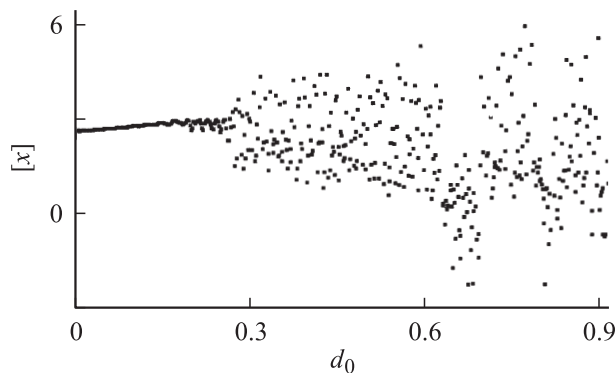


Рис. 1. Изменение максимальных значений колебательного процесса в зависимости от параметра дополнительной обратной связи.

приведена бифуркационная диаграмма, показывающая изменение максимальных значений колебательного процесса  $x(t)$  (обозначенных через  $[x]$ ) при адиабатическом увеличении параметра дополнительной обратной связи, когда  $B = 6$ ,  $n = 4$ ,  $\delta = 4$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $\omega_1 = 0.8$ ,  $\omega_2 = 1.1$ ,  $Q_1 = Q_2 = 20$ ,  $d_1 = d_2 = 0.4$ . Начальные условия для переменных заданы значением 0.1.

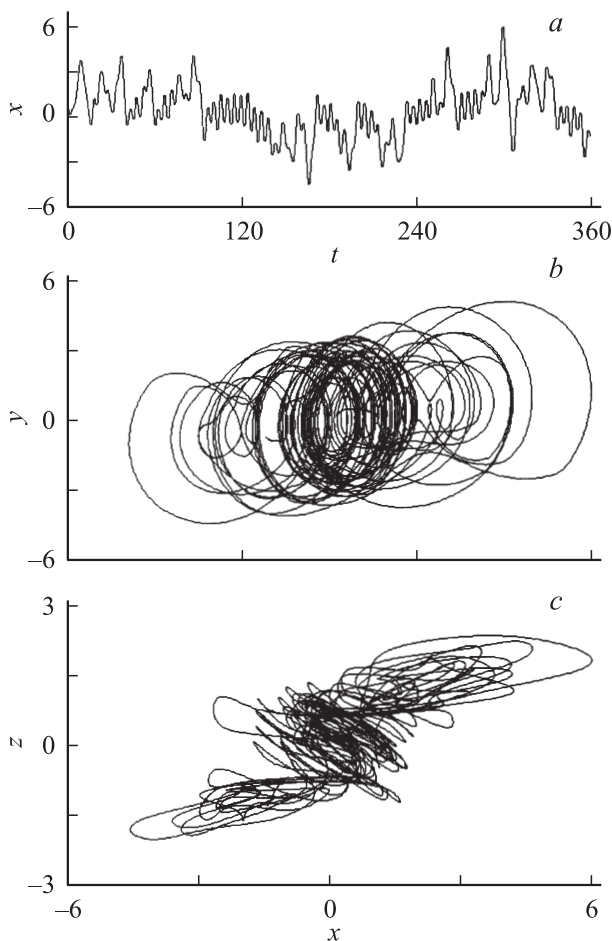
Видно (рис. 1), что при  $d_0 < 0.2$  сохраняется режим регулярных колебаний; это следует из того, что изменение максимальных значений колебательного процесса отображается линией, в соответствии с которой амплитуда колебаний изменяется от 2.6 до 3. При  $d_0 \approx 0.2$  проявляется бифуркация перехода к сложным колебаниям, а при  $d_0 \approx 0.3$  — бифуркация жесткого перехода к хаосу. О возбуждении хаотических движений свидетельствует нерегулярный разброс точек, соответствующих максимальным значениям колебательного процесса. Заметно изменение распределения разброса этих точек при увеличении параметра дополнительной обратной связи; так, при  $d_0 \approx 0.65$  и  $\approx 0.8$  разброс точек, соответствующих максимальным значениям колебательного процесса, смещен вниз, а при  $d_0 \approx 0.75$ , наоборот, — вверх. В этом проявляется существование низкочастотной модуляции хаотического колебательного процесса, которая хорошо видна на соответствующих временных реализациях хаотических движений.

Реализация и фазовый портрет исходных движений, наблюдающихся при параметрах, соответствующих значению  $d_0 = 0$ , на диаграмме рис. 1, отображают квазигармонический характер колебательного процесса: структура колебаний практически синусоидальная и фазовый портрет в проекции на плоскость  $\{x, y\}$  имеет вид эллипса. Частота генерируемых колебаний равна  $\omega \approx 0.9$ .

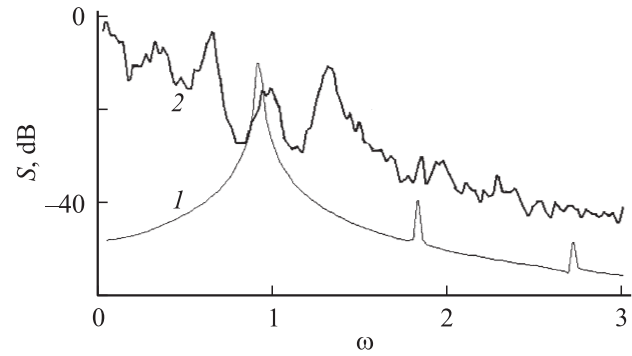
Дополнительная обратная связь приводит к принципиальному изменению структуры колебаний. Характерный фрагмент реализации колебательного процесса при работе системы с АХОС показан на рис. 2, а. Он рассчитан в интервале времени  $t \in [0; 360]$  при параметрах, которые определяются значением  $d_0 = 0.8$  на диаграмме

рис. 1. На рис. 2, *b, c* иллюстрируется соответствующий аттрактор, представленный в проекциях на плоскости  $\{x, y\}$  (*b*) и  $\{x, z\}$  (*c*). Видно (*a*), что при хаотических движениях имеет место перемежаемость типа „хаос–хаос“: чередуются „высокочастотные“ и „низкочастотные“ колебания. Наиболее широкий интервал времени, в котором реализуются высокочастотные колебания, наблюдается при  $t \in [95; 135]$ . Четко выраженные низкочастотные движения реализуются в интервале времени  $t \in [290; 330]$ . В представленном фрагменте реализации колебаний видна также низкочастотная модуляция, проявляющаяся, как уже отмечалось, и в изменении разброса точек, соответствующих максимальным значениям колебательного процесса. Проекции хаотического аттрактора отображают хорошее перемешивание фазовых траекторий.

На рис. 3 представлены спектры мощности  $S$  регулярных и хаотических колебаний, рассчитанные при параметрах, соответствующих значениям  $d_0 = 0$  (кривая 1) и 0.8 (2) на рис. 1. Спектр мощности регулярных колебаний отображает их квазигармонический характер:



**Рис. 2.** Фрагмент реализации хаотического колебательного процесса в интервале времени  $t \in [0; 360]$  (*a*) и проекции соответствующего ему аттрактора на плоскости  $\{x, y\}$  (*b*) и  $\{x, z\}$  (*c*).



**Рис. 3.** Спектры мощности регулярных (1) и хаотических (2) колебаний в системе, содержащей нелинейный усилитель, фильтры первого и второго порядков и линию задержки.

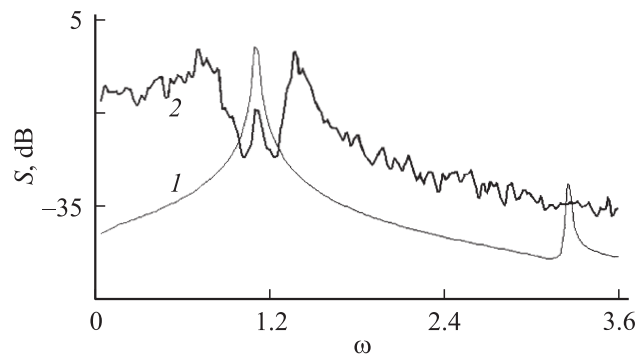
уровень гармоник незначителен. Спектр мощности хаотических колебаний занимает широкую полосу частот, хотя и существуют резонансные „выбросы“ спектральной плотности мощности хаотических колебаний вблизи частот базовых колебаний и около собственных частот фильтрующих элементов. Отмеченное смещение средних частот выбросов спектральной плотности хаотических колебаний представляется вполне естественным в связи с изменением свойств обратной связи.

Следует отметить, что теоретическое обоснование выбора оптимальных значений собственных частот фильтрующих элементов пока не представляется возможным. Из физических представлений ясно, что для „раскачки“ движений с помощью АХОС целесообразно выбирать собственные частоты фильтров так, чтобы частота базовых колебаний находилась между этими частотами. Численный анализ показывает, что десятипроцентная расстройка частот дает хорошие результаты и не является критичной, хотя влияют и другие параметры. При численном анализе моделей значения собственных частот выбирались в соответствии с высказанными соображениями.

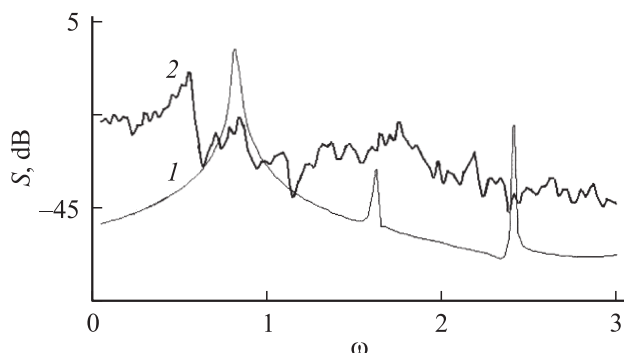
Проведенные исследования показывают, что при относительно больших значениях параметров запаздывания и инерционности, когда автономно реализуются лишь регулярные движения, использование АХОС приводит к возбуждению развитого хаоса.

## Влияние АХОС в частных случаях

На рис. 4–6 приведены спектры мощности, иллюстрирующие влияние АХОС в моделях, представляющих собой частные случаи. Кривыми 1 отображаются спектры мощности исходных колебаний (при  $d_0 = 0$ ), а кривыми 2 — спектры мощности при введении управляющей обратной связи (при  $d_0 = 0.8$ ). При этом значения параметров  $\mu, n, B, Q_1, Q_2, d_1, d_2$  те же, что и при расчете рис. 1.



**Рис. 4.** То же, что для рис. 3, в системе без фильтра первого порядка.



**Рис. 5.** То же, что для рис. 3, в системе без фильтра второго порядка.

На рис. 4 иллюстрируется влияние АХОС в системе без инерционного элемента. На этом рисунке приведены спектры мощности, рассчитанные при совместном решении уравнений (2), (4), (5), (7). В обоих случаях (кривые 1 и 2) время запаздывания равно  $\tau = 3.2$ .

Как видно (кривая 1), исходные колебания, несмотря на относительно большое запаздывание в цепи обратной связи, являются регулярными. Частота колебаний основной гармоники равна  $\omega \approx 1.08$ , поэтому при использовании АХОС частоты фильтров заданы значениями  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = 1.2$ . В отличие от спектра мощности регулярных колебаний, представленного на рис. 3, в спектре регулярных колебаний рассматриваемой системы отсутствуют четные гармоники колебаний, хотя для аппроксимации характеристики нелинейного элемента тоже использовалось выражение (2). В представленном спектре мощности наряду с основной составляющей показана третья гармоника.

При введении АХОС (кривая 2) спектр мощности становится сплошным и занимает широкую полосу частот, что свидетельствует о хаотизации колебаний. Как и в случае спектра хаотических движений, иллюстрируемого рис. 3, наблюдаются резонансные выбросы спектральной плотности мощности хаотических колебаний. При этом средняя частота одного из выбросов („центрального“) практически совпадает с частотой генерации,

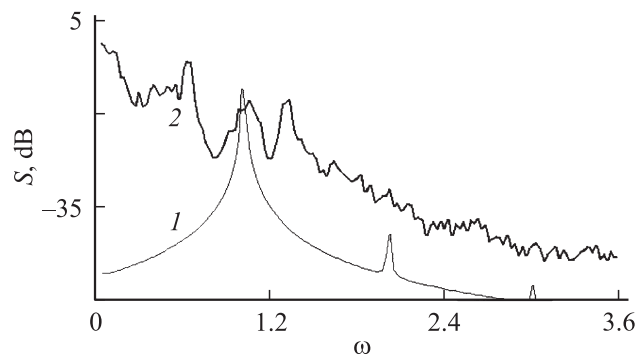
реализующейся при  $d_0 = 0$ , а средние частоты „боковых“ выбросов смещены относительно собственных частот фильтрующих элементов. Наличие резонансных выбросов в спектре мощности, как и в случае, иллюстрируемом рис. 3, является результатом перемежаемости типа „хаос–хаос“, которая была хорошо видна и в структуре реализаций колебательного процесса.

На рис. 5 иллюстрируется влияние АХОС в системе, основанной на уравнении Мэки–Гласса (в системе без фильтра второго порядка). На рисунке приведены спектры мощности, рассчитанные при совместном решении уравнений (2), (4), (5), (9), когда параметры запаздывания и инерционности соответственно равны  $\tau = 3.2$ ,  $\delta = 1$ .

Как видно (кривая 1), при отсутствии АХОС (при  $d_0 = 0$ ), несмотря на относительно большое запаздывание в цепи обратной связи, реализуются регулярные колебания. Частота генерируемых колебаний равна  $\omega \approx 0.8$ . В отличие от спектра мощности регулярных колебаний, представленного на рис. 4, присутствует, как и на рис. 3, вторая гармоника колебаний. При этом, однако, уровень третьей гармоники выше, чем уровень второй. Поскольку модель, в которой не реализуется вторая гармоника, отличается фактически отсутствием инерционности, можно полагать, что именно фильтр первого порядка является элементом, влияющим на структуру колебаний в смысле проявления четных гармоник.

При использовании АХОС собственные частоты фильтров выбраны (в соответствии со значением частоты базовых колебаний) так, что  $\omega_1 = 0.6$ ,  $\omega_2 = 1$ . При введении АХОС спектр мощности становится сплошным и занимает широкую полосу частот, что свидетельствует о хаотизации колебательного процесса. Как и в предыдущих случаях, наблюдаются резонансные выбросы спектральной плотности мощности хаотических колебаний вблизи частоты базовых колебаний и около собственных частот фильтрующих элементов, хотя отмеченный выброс, определяемый фильтром с резонансной частотой  $\omega_2$ , выражен относительно слабо.

На рис. 6 иллюстрируется влияние АХОС в модели, основанной на уравнениях Дмитриева–Кислова (в системе без линии задержки): приведены спектры



**Рис. 6.** То же, что для рис. 3, в системе без линии задержки.

мощности, рассчитанные при совместном решении уравнений (5), (10)–(12). Как в отсутствие дополнительной обратной связи (кривая 1), так и при работе с АХОС (кривая 2) параметр инерционности  $\delta = 4.8$ .

Как видно (кривая 1), спектр исходных колебаний при выбранных параметрах в соответствии с диаграммой, представленной в работе [15], отображает регулярные движения. При этом, как и в других моделях, в которых используется инерционный элемент, присутствуют как нечетные, так и четные гармоники. Частота колебаний основной составляющей примерно равна  $\omega \approx 1$ .

При использовании АХОС значения частот фильтрующих элементов выбраны (при значениях  $a = 1$ ,  $b = 3$ ) равными  $\omega_1 = 0.8$ ,  $\omega_2 = 1.2$ . Видно, что при введении АХОС спектр мощности становится сплошным и занимает широкую полосу частот: происходит хаотизация колебаний. Как и в других случаях работы с АХОС, видны характерные резонансные выбросы спектральной плотности мощности хаотических колебаний на частоте исходных колебаний и вблизи собственных частот фильтрующих элементов, что свидетельствует о том, что при хаотических движениях в системе без запаздывания проявляется перемежаемость типа „хаос–хаос“.

Приведенные результаты исследования частных случаев модели с АХОС показывают, что общей особенностью структуры колебаний при использовании АХОС является переключение движений с созданием перемежающихся хаотических движений. Приведенные результаты свидетельствуют также об эффективности применения АХОС в моделях, базирующихся на известных уравнениях, получающихся как частные случаи рассматриваемой модели.

## Заключение

Представленная модель автоколебательной системы, управляемой с помощью АХОС, позволяет реализовывать хаотические движения в режимах, в которых без АХОС возбуждаются лишь регулярные колебания. Хаотическим колебаниям в системе с АХОС соответствует аттрактор, демонстрирующий хорошее перемешивание фазовых траекторий. Спектр мощности является непрерывным и занимает широкую полосу частот.

Хаотизация колебаний при использовании АХОС оказывается эффективной и в моделях, в которых используются генераторы без фильтра второго порядка, без инерционного элемента либо без линии задержки. Приведенные результаты позволяют надеяться, что управление колебаниями с помощью АХОС может быть достигнуто во многих системах.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 07-02-00351).

## Список литературы

- [1] *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. 424 с.
- [2] *Дмитриев А.С., Кислов В.Я.* Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989. 280 с.
- [3] *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука: 1992. 456 с.
- [4] *Кузнецов С.П.* Динамический хаос (курс лекций). М.: Изд-во физ.-мат. лит., 2001. 296 с.
- [5] *Кольцова Э.М., Третьяков Ю.Д., Гордеев Л.С.* и др. Нелинейная динамика и термодинамика необратимых процессов в химии и химической технологии. М.: Химия, 2001. 408 с.
- [6] *Дмитриев А.С., Панас А.И.* Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. М.: Изд-во физ.-мат. лит., 2002. 252 с.
- [7] *Залогин Н.Н., Кислов В.В.* Широкополосные хаотические сигналы в радиотехнических и информационных системах. М.: Радиотехника, 2006. 208 с.
- [8] *Кальянов Г.Н., Кальянов Э.В.* // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31. Вып. 24. С. 45–50.
- [9] *Пиковский А., Розенблум М., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 496 с.
- [10] *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е.* и др. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 544 с.
- [11] *Кальянов Э.В.* // Нелинейный мир. 2003. Т. 1. № 1–2. С. 45–54.
- [12] *Кальянов Э.В.* // РиЭ. 2004. Т. 49. № 10. С. 1228–1234.
- [13] *Кальянов Э.В.* // Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30. Вып. 13. С. 45–50.
- [14] *Пономаренко В.И., Прохоров М.Д.* // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28. Вып. 16. С. 37–43.
- [15] *Кальянов Э.В.* // ЖТФ. 2007. Т. 77. Вып. 8. С. 1–5.
- [16] *Дихтяр В.Б., Старков С.О.* // РиЭ. 1982. Т. 37. № 12. С. 2454–2456.
- [17] *Кальянов Э.В., Старков С.О.* // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14. Вып. 11. С. 961–964.
- [18] *Глас Л., Мэки М.* От часов к хаосу: Ритмы жизни / Пер с англ. М.: Мир, 1991. 248 с.
- [19] *Ланда П.С., Перминов С.М.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1987. Т. 30. № 3. С. 437–439.
- [20] *Ikeda K.* // Opt. Commun. 1979. Vol. 30. N 2. P. 257–261.
- [21] *Пономаренко В.И., Прохоров М.Д.* // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31. Вып. 6. С. 73–78.
- [22] *Кислов В.Я.* Лекции по электронике СВЧ и радиофизике. Кн. 5. Саратов: Изд-во СГУ, 1980. С. 25–77.