

01;09

Распространение азимутальных волн в магнитоактивных волноводах, полностью заполненных токнесущей плазмой

© А.И. Гирка, В.А. Гирка, И.А. Гирка, И.В. Павленко

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина,
61077 Харьков, Украина
e-mail: girkai@univer.kharkov.ua

(Поступило в Редакцию 31 октября 2006 г. В окончательной редакции 1 ноября 2007 г.)

Показано, что в цилиндрическом металлическом волноводе, полностью заполненном магнитоактивной плазмой вдоль азимутального направления возможно распространение связанных объемных обыкновенно поляризованных и поверхностных необыкновенно поляризованных волн. Исследовано их взаимодействие при наличии у внешнего магнитного поля аксиального и азимутального компонентов. Для случая однородного профиля получено практичное аналитическое выражение для поправки к собственной частоте этих волн, обусловленной влиянием азимутального магнитного поля.

PACS: 52.35.-g, 52.40.Fd

Введение

Для повышения эффективности работы приборов СВЧ-электроники активно исследуются возможности (см., например, [1–4]) использования кольцевых пучков заряженных частиц в источниках когерентного излучения наряду с разработкой устройств, работающих на продольных пучках (см., например, монографии [5,6] и ссылки в них). В работах [7,8] предлагается использовать кольцевые пучки для возбуждения необыкновенно поляризованных азимутальных поверхностных волн (НАПВ). При этом кроме сокращения продольных размеров устройств по сравнению с вакуумными приборами дополнительно появляется возможность непрерывно изменять частоту сигнала в определенном относительно широком диапазоне частот. Дисперсионные свойства НАПВ, распространяющихся поперек внешнего аксиального магнитного поля в цилиндрическом металлическом волноводе, полностью заполненном плазмой, рассмотрены в [9]. Еще одной полезной особенностью распространения НАПВ на границе плазма–металл является их свойство распространяться только в одном направлении. Такое явление известно для поверхностных волн, распространяющихся поперек внешнего магнитного поля в волноводных структурах с геометрией Фойгта [10,11]. При возбуждении подобных волн в системе отсутствует отраженный сигнал, что может быть для целого ряда практических приложений весьма полезно.

Влияние азимутального магнитного поля $B_{0\vartheta}$, обусловленного, например, протеканием электрического тока по плазменному цилиндру, на дисперсионные свойства НАПВ исследовано в работе [12] для случая волновода, частично заполненного плазмой. Такой аксиальный ток в плазме может быть вызван либо движением заряженных частиц вдоль магнитных силовых линий, либо специально поддерживаться внешней разностью потенциалов. Наличие азимутального магнитного поля приводит к зацеплению НАПВ с компонентами поля

E_r, E_ϑ, B_z и обыкновенно поляризованной азимутальной электромагнитной волны с компонентами поля E_z, B_r, B_ϑ . Иными словами, наличие у внешнего постоянного магнитного поля двух составляющих — аксиальной и азимутальной (в цилиндрической системе координат $\mathbf{B}_0 = B_{0z}\mathbf{e}_z + B_{0\vartheta}\mathbf{e}_\vartheta$, $B_0^2 = B_{0z}^2 + B_{0\vartheta}^2$) — не позволяет представить систему уравнений Максвелла для азимутальных электромагнитных возмущений (зависимость от азимутального угла ϑ и времени t выбираем в виде $\exp[i(m\vartheta - i\omega t)]$) в виде двух независимых подсистем, описывающих соответственно НАПВ и обыкновенно поляризованную азимутальную электромагнитную волну.

В работе [12] пространственное распределение электромагнитных полей азимутальных поверхностных волн изучено с помощью методов теории последовательных приближений с точностью до слагаемых первого порядка малости, пропорциональных $B_{0\vartheta}$. Поправка к собственной частоте НАПВ, обусловленная внешним азимутальным магнитным полем, вычисленная вдали от области линейной конверсии указанных волн, оказалась величиной, квадратичной по $B_{0\vartheta}$. В работе [12] также показано, что НАПВ может линейно взаимодействовать с обыкновенно поляризованной поверхностной волной, если диэлектрический слой, отделяющий плазменный цилиндр от металлической стенки, является достаточно широким и если внешнее аксиальное магнитное поле отлично от нуля. Тогда поправка к собственной частоте НАПВ, обусловленная азимутальным магнитным полем, становится пропорциональной первой степени $B_{0\vartheta}$, т.е. существенно возрастает.

В данной работе рассмотрено распространение азимутальных электромагнитных волн в магнитоактивном металлическом волноводе, который полностью заполнен плазмой, при наличии у внешнего магнитного поля как аксиальной, так и азимутальной составляющей.

Отсутствие диэлектрической прослойки между металлической стенкой волновода и шнуром плазмы делает

невозможным распространение поверхностной обыкновенно поляризованной волны строго в азимутальном направлении. Электромагнитное возмущение с обыкновенной поляризацией приобретает объемный характер, что в корне отличает постановку данной задачи от той, которая решалась в [12].

Взаимодействие поверхностных азимутальных волн с обыкновенно поляризованными азимутальными объемными волнами (ОАОВ) и является предметом исследования данной работы. В нем получено дисперсионное уравнение азимутальных волн, которое учитывает слабое (по сравнению с аксиальной составляющей) внешнее азимутальное магнитное поле и описывает линейное взаимодействие НАПВ с ОАОВ. В работе определена поправка к собственной частоте волны, обусловленная внешним азимутальным магнитным полем, и исследовано его влияние на пространственное распределение электромагнитных полей волны. Следует отметить, что в работе [11] определены условия резонансного линейного взаимодействия НАПВ с ОАОВ для случая, когда эти возмущения электромагнитного поля распространяются в магнитоактивных цилиндрических волноводах, полностью заполненных плазмой, с произвольным азимутальным номером моды и с малым аксиальным волновым числом k_z , для которого выполняется неравенство: $k_z a \ll 1$, где a — радиус плазменного шнура. Таким образом, постановка задачи, решаемой в данной работе, является новой и представляется актуальной для исследования волновых процессов в приборах плазменной электроники.

1. Постановка задачи

Рассмотрим круглый цилиндрический металлический идеально проводящий волновод радиуса a . Он полностью заполнен плазмой с радиально-неоднородным профилем плотности, которую считаем однородной вдоль оси z и по азимутальному углу ϑ (в цилиндрических координатах). Электродинамические свойства плазмы описываем тензором диэлектрической проницаемости ε_{ij} , полученном в приближении холодной магнитоактивной плазмы [13,14]. Предполагаем, что внешнее постоянное магнитное поле имеет две составляющие аксиальную B_{0z} и азимутальную $B_{0\vartheta}(r)$. При этом ограничимся рассмотрением случая малых внешних азимутальных магнитных полей, $\kappa \equiv B_{0\vartheta}/B_{0z} \ll 1$, который соответствует протеканию достаточно слабых аксиальных токов. Отметим, что этот предельный случай можно исследовать не только численно, но и аналитически.

Для нахождения распределения электромагнитных полей волны воспользуемся уравнениями Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{-1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (2)$$

С учетом того, что исследуемые электромагнитные возмущения распространяются по азимуту в отсутствие аксиального волнового числа ($k_z = 0$), запишем проекции векторного уравнения (1) на орты \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_ϑ и \mathbf{e}_z цилиндрической системы координат и получим следующую систему скалярных уравнений:

$$B_r = (m/(kr))E_z, \quad (3)$$

$$B_\vartheta = \frac{i}{k} \frac{dE_z}{dr}, \quad (4)$$

$$B_z = \frac{1}{ikr} \frac{d(rE_\vartheta)}{dr} - (m/(kr))E_r, \quad (5)$$

где $ck = \omega$.

Наличие у внешнего постоянного магнитного поля азимутальной компоненты $B_{0\vartheta}(r)$ приводит к тому, что в цилиндрических координатах (\mathbf{e}_r , \mathbf{e}_ϑ , \mathbf{e}_z), все девять элементов тензора ε_{ij} диэлектрической проницаемости холодной магнитоактивной плазмы отличны от нуля, что сильно усложняет вид уравнения (2) и его решение. Поэтому воспользуемся ортонормированной системой координатных векторов (\mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3), связанной с силовыми линиями \mathbf{B}_0 . Первый вектор в ней совпадает с радиальным ортом в цилиндрических координатах, $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_r$; третий вектор параллелен силовым магнитным линиям, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{B}_0/|\mathbf{B}_0|$; второй дополняет тройку до правой, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1$. С точностью до слагаемых первого порядка малости $\mathbf{e}_3 \approx \kappa \mathbf{e}_\vartheta + \mathbf{e}_z$, $\mathbf{e}_2 \approx \mathbf{e}_\vartheta - \kappa \mathbf{e}_z$. В этой системе координат компоненты векторов электрической индукции \mathbf{D} и напряженности электрического поля \mathbf{E} волны связаны наиболее простым образом при помощи тензора ε_{ij} диэлектрической проницаемости плазмы

$$\mathbf{D} = \varepsilon_1(E_1\mathbf{e}_1 + E_2\mathbf{e}_2) + \varepsilon_3 E_3 \mathbf{e}_3 - i\varepsilon_2 \mathbf{e}_3 \times \mathbf{E}. \quad (6)$$

Компоненты тензора ε_{ij} диэлектрической проницаемости в приближении холодной магнитоактивной бесстолкновительной плазмы равны [10,14]:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 - \sum_\alpha \frac{\Omega_\alpha^2}{\omega^2 - \omega_\alpha^2}, \quad \varepsilon_2 = - \sum_\alpha \frac{\omega_\alpha \Omega_\alpha^2}{\omega(\omega^2 - \omega_\alpha^2)},$$

$$\varepsilon_3 = 1 - \sum_\alpha \frac{\Omega_\alpha^2}{\omega^2}, \quad (7)$$

где Ω_α и ω_α — соответственно плазменная и циклотронная частоты частиц сорта α , ε_0 — диэлектрическая проницаемость кристаллической решетки полупроводника ($\varepsilon_0 > 1$), в случае газовой плазмы $\varepsilon_0 = 1$. Значение циклотронной частоты в (7) определяется полным постоянным магнитным полем B_0 , которое с точностью до малых слагаемых первого порядка малости равно аксиальному, $B_0 \approx B_{0z}$.

Компоненты ротора $\operatorname{rot}_{1,2,3}$ в локальной системе координат (\mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3) с точностью до слагаемых первого порядка малости выражаются через компоненты ротора в цилиндрических координатах $\operatorname{rot}_{r,\vartheta,z}$ следующим образом: $\operatorname{rot}_1 = \operatorname{rot}_r$, $\operatorname{rot}_2 \approx \operatorname{rot}_\vartheta - \kappa \operatorname{rot}_z$, $\operatorname{rot}_3 \approx \kappa \operatorname{rot}_\vartheta + \operatorname{rot}_z$.

С учетом этого записываем проекции векторного уравнения (2) на орты \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 и \mathbf{e}_3 локальной системы координат и получаем из него следующие скалярные уравнения:

$$-(m/(kr))B_z = \varepsilon_1 E_r + i\varepsilon_2(E_\vartheta - \kappa E_z), \quad (8)$$

$$\begin{aligned} -\frac{i}{k} \frac{dB_z}{dr} - \frac{i\kappa}{kr} \frac{d(rB_\vartheta)}{dr} - \frac{km}{kr} B_r \\ = -i\varepsilon_2 E_r + \varepsilon_1 E_\vartheta - \kappa\varepsilon_1 E_z, \quad (9) \end{aligned}$$

$$-\frac{i\kappa}{k} \frac{dB_z}{dr} + \frac{i}{kr} \frac{d(rB_\vartheta)}{dr} + \frac{m}{kr} B_r = \varepsilon_3(E_z + \kappa E_\vartheta). \quad (10)$$

В отсутствие постоянного азимутального магнитного поля ($\kappa = 0$) уравнения (3), (4) и (10) описывают независимое распространение ОАОВ. При наличии $B_{0\vartheta}$ эти уравнения сводятся к одному неоднородному дифференциальному уравнению второго порядка с малой правой частью:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dE_z}{dr} + \left(k_0^2 - \frac{m^2}{r^2}\right) E_z = \hat{M} B_z. \quad (11)$$

Уравнения (5), (8) и (9) в нулевом приближении описывают пространственное распределение полей НАПВ. Эти уравнения также сводятся к неоднородному дифференциальному уравнению второго порядка, в котором учет постоянного азимутального магнитного поля по сравнению с нулевым приближением проявляется в возникновении малой правой части:

$$k_x^2 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dB_z}{dr} - k_x^2 \left[1 + \frac{m^2}{r^2 k_x^2} - \frac{m}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{\mu}{k_x^2}\right)\right] B_z = \hat{K} E_z. \quad (12)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\hat{M} = -ik\kappa \frac{d}{dr} - ik\kappa \frac{k_0^2}{k_x^2} \left(\frac{d}{dr} + \frac{m\mu}{r}\right), \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \hat{K} = \frac{ik}{\varepsilon_1} \left[\frac{-\kappa}{r} (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_3 - \varepsilon_2^2) - \kappa (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_3 - \varepsilon_2^2) \frac{d}{dr} \right. \\ \left. - \kappa \varepsilon_2 \varepsilon_3 \frac{m}{r} - \frac{d(\kappa(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_3 - \varepsilon_2^2))}{dr} \right. \\ \left. + \kappa (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_3 - \varepsilon_2^2) \frac{d \ln(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)}{dr} \right]. \quad (14) \end{aligned}$$

Радиальное волновое число H -волны (обыкновенно поляризованной) k_0 и глубина проникновения E -волны (необыкновенно поляризованной) k_x^{-1} в плазму определяются следующим образом через компоненты тензора диэлектрической проницаемости холодной плазмы ε_{ik} :

$$k_0^2 = k^2 \varepsilon_3, \quad k_x^2 = k^2 \varepsilon_1 (\mu^2 - 1), \quad \mu = \varepsilon_2 / \varepsilon_1. \quad (15)$$

Поля исследуемых волн удовлетворяют следующим граничным условиям — амплитуды полей волны ограничены в объеме волновода; тангенциальные составляющие электрического поля волны обращаются в нуль на внутренней поверхности металлической камеры.

2. Пространственное распределение полей волны

Как уже было отмечено выше, присутствие в уравнениях Максвелла дополнительно к аксиальному еще и постоянного азимутального магнитного поля ($B_{0\vartheta} \neq 0$), величина которого мала по сравнению с аксиальной составляющей внешнего магнитного поля, делает E - и H -волны слабо связанными возмущениями. Для изучения дисперсионных свойств таких электромагнитных волн применим теорию возмущений, воспользовавшись в качестве нулевого приближения теорией НАПВ [9].

Учитывая по теории возмущений малую правую часть уравнений (11) и (12), получим их решение методом вариации постоянной в следующем виде:

$$E_z = \left(A_1 - A_2 \int_a^r r \tilde{\varphi}_0 \hat{M} \psi_x dr\right) \varphi_0 + \tilde{\varphi}_0 A_2 \int_0^r r \varphi_0 \hat{M} \psi_x dr, \quad (16)$$

$$B_z = \left(A_2 - A_1 \int_a^r \frac{\tilde{\psi}_x \hat{K} \varphi_0 dr}{W(\psi_x, \tilde{\psi}_x)}\right) \psi_x + \tilde{\psi}_x A_1 \int_0^r \frac{\psi_x \hat{K} \varphi_0 dr}{W(\psi_x, \tilde{\psi}_x)}, \quad (17)$$

где $\psi_x(r)$ — это ограниченное при $r = 0$ решение уравнения (12) с нулевой правой частью, $\tilde{\psi}_x(r)$ — это линейно независимое от $\psi_x(r)$ решение уравнения (12) с нулевой правой частью, такое, что вронскиан функций $\psi_x(r)$ и $\tilde{\psi}_x(r)$ равен

$$W(\psi_x, \tilde{\psi}_x) = \psi_x d\tilde{\psi}_x/dr - \tilde{\psi}_x d\psi_x/dr \propto -k_x^2/r. \quad (18)$$

Входящие в (17) функции φ_0 и $\tilde{\varphi}_0$ являются линейно независимыми решениями уравнения (11) с нулевой правой частью. При этом решение $\varphi_0(r)$ ограничено в нуле, а $\tilde{\varphi}_0(r)$ — решение, имеющее особенность в нуле. Вронскиан функций $\varphi_0(r)$ и $\tilde{\varphi}_0(r)$ обратно пропорционален r . В решения (16) и (17) для полей азимутальных волн входят только две константы интегрирования A_1 , A_2 , поскольку две другие константы выбраны так, чтобы поля E_z и B_z были ограничены на оси (при $r = 0$).

Другие компоненты поля волны выражаются через E_z и B_z следующим образом:

$$E_r = \frac{1}{k_x^2} \left(\frac{km}{r} B_z + k\mu \frac{dB_z}{dr} - ik\kappa k_0^2 \mu E_z\right), \quad (19)$$

$$E_\vartheta = \frac{1}{k_x^2} \left[i \frac{k m \mu}{r} B_z + ik \frac{dB_z}{dr} + \kappa(k_0^2 + k_x^2) E_z\right]. \quad (20)$$

Отметим, что, как и должно быть для обыкновенных волн [14], свойства ОАОВ не зависят от величины внешнего аксиального магнитного поля B_{0z} и, как показано в [12], обыкновенно поляризованные азимутальные поверхностные волны в металлическом волноводе, полностью заполненном плазмой, не распространяются.

3. Дисперсионное уравнение

Использование указанных в первом разделе граничных условий, состоящих в равенстве нулю тангенциальных составляющих электрического поля волны E_θ и E_z на металлической стенке ($r = a$), приводит к дисперсионному уравнению

$$D_o D_x = D(\kappa). \quad (21)$$

Здесь $D_o = 0$ — дисперсионное уравнение ОАОВ в отсутствие внешнего азимутального магнитного поля,

$$D_o = \varphi_o (d\varphi_o/dr)^{-1}, \quad (22)$$

$D_x = 0$ — дисперсионное уравнение НАПВ в отсутствие постоянного азимутального магнитного поля,

$$D_x = -\frac{k^2}{k_x^2} \left(\frac{1}{\psi_x} \frac{d\psi_x}{dr} + \frac{m\mu}{a} \right), \quad (23)$$

$D(\kappa)$ — коэффициент связи ОАОВ с НАПВ, его величина является квадратичной по малому параметру κ ,

$$D(\kappa) = \left(\frac{d\varphi_o}{dr} \right)^{-2} \frac{1}{a} \int_0^a r \varphi_o \hat{M} \psi_x dr \times \left[\frac{k^2 W(\psi_x, \tilde{\psi}_x)}{k_x^2 \psi_x^2} \int_0^a \frac{\psi_x \tilde{K} \varphi_o dr}{W(\psi_x, \tilde{\psi}_x)} - ik\kappa \left(1 + \frac{k_o^2}{k_x^2} \right) \frac{\varphi_o}{\psi_x} \right]. \quad (24)$$

Отметим, что все величины, входящие в выражения (22)–(24), зависящие от радиуса r и не стоящие под знаком интеграла, вычислены в точке $r = a$. Для волноводов рассматриваемой геометрии дисперсионное уравнение $D_o = 0$ не имеет решений в виде поверхностных волн.

Решение уравнения (21) ищем в виде $\omega = \omega_x + \Delta\omega_x$ ($|\Delta\omega_x| \ll \omega_x$) и $\omega = \omega_o + \Delta\omega_o$ ($|\Delta\omega_o| \ll \omega_o$), где ω_x и ω_o — собственные частоты соответственно НАПВ и ОАОВ в отсутствие внешнего азимутального магнитного поля. Из (21) получим, что поправка $\Delta\omega_x$ к собственной частоте НАПВ, обусловленная наличием внешнего азимутального магнитного поля, равна

$$\Delta\omega_x = D(\kappa) \left(D_o \frac{\partial D_x}{\partial \omega} \right)_{|\omega=\omega_x}^{-1}. \quad (25)$$

Соответствующая поправка $\Delta\omega_o$ к собственной частоте ОАОВ равна

$$\Delta\omega_o = D(\kappa) \left(D_x \frac{\partial D_o}{\partial \omega} \right)_{|\omega=\omega_o}^{-1}. \quad (26)$$

При определенных условиях дисперсионные кривые ОАОВ и НАПВ пересекаются: $\omega_x = \omega_o$. Тогда влияние поля $B_{0\theta}$ возрастает, и поправка к собственной частоте

становится линейной по внешнему постоянному азимутальному магнитному полю (параметру κ):

$$(\Delta\omega_x)^2 = (\Delta\omega_o)^2 = D(\kappa) \left(\frac{\partial D_x}{\partial \omega} \right)_{|\omega=\omega_x}^{-1} \left(\frac{\partial D_o}{\partial \omega} \right)_{|\omega=\omega_o}^{-1}. \quad (27)$$

4. Аналитическое решение дисперсионного уравнения

Дальнейшее рассмотрение проведем для случая однородного радиального профиля плотности. Такое ограничение оправдывается следующими соображениями. Во-первых, эта модель хорошо описывает случай твердотельной плазмы. Во-вторых, радиальной неоднородностью плотности плазмы можно пренебречь, если величина плотности слабо меняется на расстояниях порядка глубины проникновения поля волны в плазму. Известно, например, что в случае протекания газового разряда, поддерживаемого поверхностной волной, однородность плотности создаваемой плазмы обеспечивается именно на расстояниях порядка глубины проникновения волны в плазму.

Также будем предполагать, что плазма имеет достаточно высокое значение плотности ($\Omega_e^2 \gg \omega_e^2$, где Ω_e и ω_e — ленгмюровская и электронная циклотронная частоты соответственно). Такое условие всегда выполняется для n -полупроводниковой плазмы, но оно достаточно легко может быть реализовано и в лабораторной газовой плазме в случае использования не слишком сильного постоянного аксиального магнитного поля. Именно такой предельный случай представляет наибольший интерес для плазменных технологий [15], поскольку использование сильного магнитного поля приводит к существенному удорожанию единицы объема произведенной плазмы. Отметим также, что дисперсионные свойства НАПВ в замагниченных, $\Omega_e^2 < \omega_e^2$, цилиндрических плазменных волноводах исследованы в [16].

В однородном плазменном цилиндре ОАОВ существует в диапазоне частот $\omega > \Omega_e$. Поскольку при этом реализуется неравенство $k_o^2 > 0$, можно рассматривать величину k_o (15) как радиальное волновое число ОАОВ.

В случае радиально однородной плазмы уравнения (11) и (12) для E_z и B_z представляют собой неоднородные уравнения Бесселя. Решения соответствующих однородных уравнений, ограниченных на оси волновода, выражаются через функции Бесселя мнимого и реального аргументов соответственно:

$$\psi_x = I_m(k_x r), \quad \varphi_o = J_m(k_o r). \quad (28)$$

Линейно независимые от них решения уравнений (11) и (12) с нулевыми правыми частями — это функции Макдональда и Неймана,

$$\tilde{\psi}_x = K_m(k_x r), \quad \tilde{\varphi}_o = N_m(k_o r). \quad (29)$$

Решения (28) и (29) применимы, если $k_o^2 > 0$ и $k_x^2 > 0$. Именно условие $k_x^2 > 0$ определяет частотные диапазоны существования НАПВ [9]: НАПВ с положительными азимутальными номерами m распространяются в низкочастотном (НЧ) диапазоне

$$|\omega_e| \sqrt{\Omega_i^2 (\Omega_e^2 + \omega_e^2)^{-1}} < \omega < |\omega_e|, \quad (30)$$

где Ω_i — ионная плазменная частота, а с отрицательными азимутальными номерами m они распространяются в высокочастотном (ВЧ) диапазоне

$$\sqrt{\omega_e^2 + \Omega_e^2} < \omega < 0.5|\omega_e| + \sqrt{0.25\omega_e^2 + \Omega_e^2}. \quad (31)$$

Такое свойство поверхностных волн — распространяться только в одном направлении поперек внешнего магнитного поля — хорошо известно для волноводов с границей плазма–металл [10,11]. Оно называется однонаправленностью и является весьма полезным в таких плазмодержащих радиотехнических устройствах, где необходимо обеспечить отсутствие отраженного сигнала.

Анализ величины k_o^2 свидетельствует, что она имеет разные знаки в диапазонах (30) и (31): так, в НЧ-диапазоне $k_o^2 < 0$, а в ВЧ-диапазоне она становится положительной, $k_o^2 > 0$. Таким образом, собственные обыкновенно поляризованные волны распространяются вдоль азимутального направления в цилиндрических металлических волноводах, полностью заполненных плазмой, только в виде объемных волн, и их линейное взаимодействие с НАПВ возможно только в ВЧ-диапазоне (31).

Предположим, что постоянное азимутальное магнитное поле $B_{0\vartheta}$ зависит от радиуса r линейно: $B_{0\vartheta}(r) = B_{0\vartheta}(a)r/a$. Такой выбор радиальной зависимости магнитного поля объясняется следующими соображениями. Если азимутальное магнитное поле создано аксиальным током полностью ионизированной плазмы, проводимость которой определяется парными кулоновскими столкновениями, то это означает, что профиль температуры электронов является однородным. (Отметим также, что участие электронов в аксиальном движении, связанном с током, не приводит к доплеровскому сдвигу частоты в силу отсутствия у волны аксиального волнового числа). Следует подчеркнуть, что в этом случае интегралы, входящие в выражение (24) для $D(\kappa)$, удастся вычислить в явном виде:

$$\begin{aligned} \int_0^a r \rho_0 \hat{M} \psi_x dr = & -ik \frac{d\kappa}{dr} k_x^{-1} \left\{ \frac{-2k_x a}{k_o^2 + k_x^2} [k_o I_m(k_x a) J_{m+1}(k_o a) \right. \\ & + k_x I_{m+1}(k_x a) J_m(k_o a)] + a [k_o a I'_m(k_x a) J_{m+1}(k_o a) \\ & + k_x a I'_{m+1}(k_x a) J_m(k_o a) + I_{m+1}(k_x a) J_m(k_o a)] \left. \right\} \\ & - ik \frac{k_o^2}{k_x^2} \frac{d\kappa}{dr} \mu m \frac{a}{k_o^2 + k_x^2} [k_o I_m(k_x a) J_{m+1}(k_o a) \\ & + k_x I_{m+1}(k_x a) J_m(k_o a)], \quad (32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{\psi_x \hat{K} \rho_0 dr}{W(\psi_x, \tilde{\psi}_x)} = & -\frac{a}{k_o^2 + k_x^2} [k_o I_m(k_x a) J_{m+1}(k_o a) \\ & + k_x I_{m+1}(k_x a) J_m(k_o a)] \frac{i\kappa}{kr} [2(k_x^2 + k_o^2) - \mu m k_o^2] \\ & + \frac{i\kappa}{kr} k_o a \{ 2k_o (k_o^2 + k_x^2)^{-1} [k_o J_{m+1}(k_o a) I_m(k_x a) \\ & + k_x J_m(k_o a) I_{m+1}(k_x a)] - k_x a J''_m(k_o a) I_{m+1}(k_x a) \\ & - J_{m+1}(k_o a) I_m(k_x a) - k_o a J''_{m+1}(k_o a) I_m(k_x a) \}. \quad (33) \end{aligned}$$

Условия линейного взаимодействия ОАПВ и НАПВ могут выполняться только в случае широкого диэлектрического слоя между плазмой и металлической стенкой (когда в этом слое вдоль радиуса укладывается большое число полудлин волн) для электромагнитного возмущения, распространяющегося в сторону вращения электронов плазмы по ларморовским орбитам [12].

Анализ дисперсионного уравнения $D_x = 0$ НАПВ в аксиальном магнитном поле показывает, что в узких волноводах ($a/\delta \ll |m|$, где $\delta = c/\Omega_e$ — глубина скин-слоя) ВЧ НАПВ не распространяются [11]. Аналитическая оценка радиуса волновода, в котором могут существовать ВЧ НАПВ, определяется следующим неравенством, $a/\delta > \Omega_e |m/\omega_e|$.

В широких волноводах собственную частоту ВЧ НАПВ можно приближенно определить следующим образом:

$$\omega_x \approx \sqrt{\Omega_e^2 + \omega_e^2 + (m^2 c^2 / a^2)}. \quad (34)$$

Тогда для аргумента $(k_o a)$ функции Бесселя первого рода получим такое приближенное значение:

$$k_o a \approx \sqrt{m^2 + \omega_e^2 a^2 c^{-2}}. \quad (35)$$

Если приложенное магнитное поле и размеры волновода не слишком велики, так что имеет место неравенство

$$a^2 \omega_e^2 c^2 < j_{|m|,s}^2 - m^2, \quad (36)$$

тогда собственные объемные обыкновенные азимутальные волны в ВЧ-диапазоне (31) не распространяются. Здесь $j_{|m|,s}$ — значение s -го корня функции Бесселя первого рода порядка $|m|$, т.е. $J_{|m|}(j_{|m|,s}) = 0$.

С увеличением радиуса волновода и/или магнитного поля могут реализоваться условия совпадения собственных частот НАПВ и ОАОВ:

$$a^2 \omega_e^2 / c^2 = j_{|m|,s}^2 - m^2. \quad (37)$$

В этом случае собственная частота НАПВ принимает вид $\omega = \omega_x + \Delta\omega_x$, где ω_x определяется формулой (34), а поправка $\Delta\omega_x$ (27) к частоте равна

$$\Delta\omega_x \approx \kappa c^2 a^{-2} \sqrt{m^3 \omega_e \Omega_e^{-3}} \approx \kappa |m|^{1.5} Z^{-2.5} j_{|m|,s}^{-2} \Omega_e, \quad (38)$$

где $Z = \Omega_e / |\omega_e| > 1$. Из анализа выражения (38) можно сделать вывод о том, что влияние $B_{0\vartheta}$ на спектры НАПВ

усиливается при увеличении аксиального постоянного магнитного поля, а также при уменьшении плотности плазмы, абсолютного значения азимутального номера моды и радиуса камеры волновода. Поправка (38) к частоте оказывается малой по сравнению с основным слагаемым (34), даже если $B_{0\vartheta}$ немалоб: малость этой поправки обеспечивается малыми сомножителями $Z^{-2.5} j_{|m|,s}^{-2}$ в выражении (38). Вместе с тем следует отметить, что при определенных значениях параметров плазмы — $j_{|m|,s}^2 - m^2 < a^2 \omega_e^2 / c^2 < j_{|m|,s+1}^2 - m^2$ — в промежутке между двумя точками пересечения дисперсионных кривых обыкновенной и необыкновенной моды производная $d\phi_o/da$ зануляется в знаменателе (22) и (24). Это означает, что для таких значений параметров влияние постоянного азимутального магнитного поля на дисперсионные свойства азимутальных волн даже больше, чем вблизи точек пересечения дисперсионных кривых обыкновенной и необыкновенной мод.

5. Численное исследование дисперсионных свойств

Исследуем численно влияние постоянного азимутального магнитного поля на собственную частоту азимутальных волн. На рис. 1 приведены дисперсионная кривая НАПВ (эта кривая, очень похожая на квадратичную параболу, изображена сплошной линией), а также дисперсионные кривые для первой, второй и третьей радиальных мод ОАОВ (штриховые линии, обозначенные соответственно цифрами 1, 2 и 3), которые распространяются с азимутальным номером моды $m = -1$ в отсутствие поля $B_{0\vartheta}$. Зависимости частот обыкновенной и необыкновенной волн, нормированных на ленгмюровскую частоту, изображены на рис. 1 как функции эффективного волнового числа $k_{\text{eff}} = |m|\delta/a$. При построении этих дисперсионных кривых выбраны следующие значения параметров волновода: $\kappa = 0.1$, $Z = 3$. Горизонтальные пунктирные линии на рис. 1

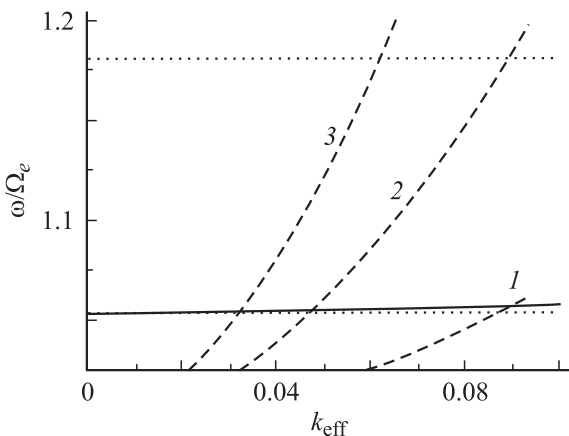


Рис. 1. Зависимости частот азимутальных волн, нормированных на ленгмюровскую частоту, от эффективного волнового числа.

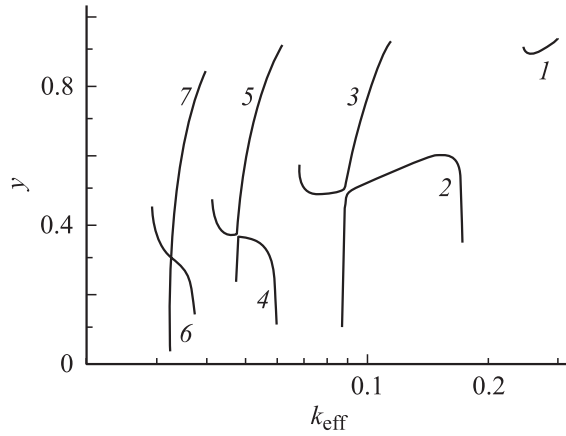


Рис. 2. Тонкая структура спектрального взаимодействия НАПВ с первыми тремя радиальными модами ОАОВ.

указывают границы частотного диапазона (31). Пересечения дисперсионных кривых НАПВ и ОАОВ происходят при значениях эффективного волнового числа, которые можно оценить из равенства (37) таким образом: $k_{\text{eff}} \approx |m| / (Z j_{|m|,s}) \approx 0.087, 0.048, 0.033 \dots$ Эти точки будут находиться между теми значениями k_{eff} при которых зануляется производная функции Бесселя: $J_1'(k_o a) = 0$, которые также можно оценить исходя из свойств цилиндрических функций: $k_{\text{eff}} \approx 0.21, 0.064, 0.039, 0.029 \dots$ Именно эти значения эффективного волнового числа определяют выбор границ диапазона k_{eff} на рис. 2.

Поскольку в единицах ленгмюровской частоты тонкая структура спектрального взаимодействия НАПВ с ОАОВ в масштабе, используемом на рис. 1, зрительно практически неразличима, то на рис. 2 введена безразмерная переменная y , такая, что $y^4 = \omega^2 / \omega_e^2 - 1 - Z^2$. При этом весьма удобным оказывается то, что уровень $y = 0$ соответствует нижней границе частотного ВЧ-диапазона (31). Зависимость y от k_{eff} демонстрирующая взаимодействие НАПВ с первой, второй и третьей радиальными модами ОАОВ, приведена на рис. 2. При этом ось абсцисс показана в логарифмическом масштабе.

Опишем тонкую структуру спектрального взаимодействия НАПВ с ОАОВ по мере уменьшения k_{eff} из рис. 2 видно, как дисперсионная кривая НАПВ (правая ветвь кривой 1) приходит из области максимальных рассматриваемых значений эффективного волнового числа и при приближении к $k_{\text{eff}} \approx 0.21$ функция $y(k_{\text{eff}})$ претерпевает разрыв. Слева от этого разрыва дисперсионная кривая НАПВ появляется от нижней границы частотного диапазона (рис. 2, ветвь кривой 2). В окрестности $k_{\text{eff}} \approx 0.087$ НАПВ трансформируется в ОАОВ, и далее дисперсионная кривая уходит резко вниз к границе частотного диапазона (левая ветвь кривой 2). Дисперсионная кривая первой радиальной моды ОАОВ (правая ветвь кривой 3) приходит из области относительно больших значений эффективного волнового числа, в окрестности

$k_{\text{eff}} \approx 0.087$ ОАОВ трансформируется в НАПВ и уходит почти горизонтально влево, где при приближении к значению $k_{\text{eff}} \approx 0.064$ резко возрастает (левая ветвь кривой 3). Далее дисперсионная кривая НАПВ (правая ветвь кривой 4) возвращается от границы частотного ВЧ-диапазона почти пропорционально $(k_{\text{eff}} - 0.064)^{-1}$. В окрестности $k_{\text{eff}} \approx 0.048$ НАПВ трансформируется в ОАОВ, и дисперсионная кривая вновь уходит резко вниз к границе частотного диапазона (левая ветвь кривой 4). Дисперсионная кривая второй радиальной моды ОАОВ (правая ветвь кривой 5) при приближении справа к окрестности $k_{\text{eff}} \approx 0.048$ демонстрирует трансформацию ОАОВ в НАПВ и почти горизонтально отходит влево. Далее при подходе к значению $k_{\text{eff}} \approx 0.039$ она резко возрастает (левая ветвь кривой 5).

Ход дисперсионных кривых 6 и 7 мало отличается от того, как ведут себя кривые 4 и 5. Поэтому мы не показываем на рис. 2 тонкую структуру спектрального взаимодействия НАПВ с более высокими радиальными модами ОАОВ. Отметим только следующие общие особенности этих кривых. По мере роста радиального номера моды, во-первых, расщепление частот в точке трансформации волн становится все менее выраженным. Во-вторых, диапазон k_{eff} между двумя соседними точками трансформации становится все уже. В-третьих, при уменьшении k_{eff} значение частоты НАПВ все сильнее и сильнее приближается к нижней границе частотного диапазона (31), а значение безразмерного параметра u — к нулю.

Подчеркнем, что взаимодействие НАПВ с ОАОВ приводит к появлению запрещенных полос частотного спектра (полос непропускания сигнала), что является типичным для задач о распространении волн в средах с периодической пространственной неоднородностью (см., например, [17]). Появление запрещенных полос частотного спектра на графике зависимости частоты этих волн от k_{eff} сопровождается еще и появлением областей запрещенных значений эффективного волнового числа, которое является фактически безразмерным обратным радиусом пламенного цилиндра. Это объясняется тем, что для этих диапазонов значений радиусов плазменного цилиндра ОАОВ перестают быть собственными, и при приближении к этой запрещенной области k_{eff} (а по сути — к области запрещенных значений радиуса плазмы a/δ) поправка к частоте ОАОВ, связанной с НАПВ уравнением (21) и, вычисляемая в линейном приближении по формуле (26), стремительно возрастает. Понятно, что ширина этих запрещенных значений k_{eff} является большей для относительно малых радиусов плазмы a/δ , и расположены эти области запрещенных значений k_{eff} приблизительно посередине между точками пересечения дисперсионных кривых ОАОВ и НАПВ.

Отметим также, что вследствие взаимодействия НАПВ с ОАОВ характер дисперсионной кривой данных электромагнитных волн стал более сложным по сравнению с хорошо известными [10] дисперсионными кривыми поверхностных волн в холодной магнитоактивной

плазме, а именно: появились диапазоны волновых чисел, в которых НАПВ характеризуется обратной дисперсией ($d\omega/dk_{\text{eff}} < 0$). Появление участков дисперсионных кривых с обратной дисперсией означает, что в волноводах с соответствующими значениями параметров энергия поверхностных волн переносится не вдоль направления распространения этих волн, а в обратном направлении. Эти участки дисперсионных кривых расположены вблизи диапазонов запрещенных значений k_{eff} , где ОАОВ становятся несобственными электромагнитными возмущениями, а значение поправки к их частоте, обусловленной протеканием тока в плазме, сильно возрастает.

Особого внимания заслуживают также точки $k_{\text{eff}} \approx 0.26, 0.16, 0.075 \dots$ на дисперсионной кривой, представленной на рис. 2, в которых дисперсия меняется с прямой на обратную (или наоборот), $d\omega/dk_{\text{eff}} = 0$. Вблизи этих точек зависимость $\omega = \omega(k_{\text{eff}})$ может быть представлена в виде $\omega = \omega_0(1 + 0.5\alpha^2 k_{\text{eff}}^2)$. Пусть в начальный момент времени электромагнитный импульс задан в форме модулированной синусоидальной волны с огибающей в форме гауссовой кривой:

$$B_z(\vartheta, 0) = B^{(0)} \cos(m\vartheta) \exp[-\vartheta^2/(2\beta^2)]. \quad (39)$$

Тогда при $t \neq 0$ электромагнитный импульс, так же как и при $t = 0$, имеет форму модулированной синусоидальной волны, но эффективная ширина β_t огибающей электромагнитного импульса, определяющейся гауссовой кривой $\exp[-\vartheta^2/(2\beta_t^2)]$, зависит от времени:

$$\beta_t^2 = \beta^2 [1 + \omega_0 \alpha^2 \delta^2 t / (a^2 \beta^2)]. \quad (40)$$

Электромагнитный импульс можно считать совпадающим по форме с начальным, пока $\beta_t \approx \beta$, т.е. только в течение некоторого промежутка времени $t \ll a^2 \beta^2 / (\alpha^2 \delta^2)$ [18].

Оценим возможность экспериментального наблюдения исследованного явления. Например, для концентрации $n = 10^{17} \text{ м}^{-3}$ лабораторной газовой плазмы ленгмюровская частота равна $\Omega_e \approx 1.8 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$. Для достижения выбранного соотношения между ленгмюровской и электронной циклотронной частотами ($Z = 3$) необходимо аксиальное магнитное поле умеренной величины $B_0 \approx 4.8 \cdot 10^{-2} \text{ Т}$. Исходя из условия (37) минимальный радиус плазмы необходим для достижения резонансных условий волне с азимутальным номером моды $m = -1$. Для нее оказывается, что $a^2 \omega_e^2 / c^2 = j_{1,1}^2 - 1 \approx 13.68$, откуда можно оценить радиус плазмы: $a \approx 0.12 \text{ м}$. Как отмечалось, НАПВ распространяется только в широких волноводах (радиус плазмы $a > Z|m|\delta$). Для волновода радиуса $a \approx 0.12 \text{ м}$ это неравенство хорошо выполняется, так как глубина скин-слоя $\delta \approx 0.017 \text{ м}$. Чтобы постоянное азимутальное магнитное поле было в десять раз слабее аксиального, надо, чтобы по плазме протекал аксиальный ток $I \approx 3 \text{ кА}$. При этом расщепление частоты вблизи точки пересечения дисперсионных кривых НАПВ и первой радиальной моды ОАОВ будет равно

$1.4 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1}$, хотя минимальное расстояние между кривыми 2 и 3 на рис. 2 вдоль ординаты составляет всего $(y_2 - y_1) \approx 0.029$.

Заключение

Таким образом, в работе исследовано линейное взаимодействие азимутальных волн — необыкновенной поверхностной и обыкновенной объемной — в металлических волноводах, полностью заполненных плазмой с аксиальным током. Это явление можно экспериментально наблюдать в широких (радиус плазмы $a > Z|m|\delta$) плазменных волноводах для волн, распространяющихся с отрицательными значениями азимутального номера моды, если постоянное аксиальное магнитное поле не слишком мало ($|\omega_e| \sim j_{|m|,s}c/a$). Влияние постоянного азимутального магнитного поля $B_{0\vartheta}$ на пространственное распределение полей волны определено (см. (16) и (17)) по теории возмущений с точностью до слагаемых первого порядка малости, пропорциональных $B_{0\vartheta}$.

Вне условий линейного резонансного взаимодействия поправки к собственной частоте НАПВ, обусловленная внешним азимутальным магнитным полем, пропорциональна квадрату $B_{0\vartheta}$: $\Delta\omega_x \propto (B_{0\vartheta})^2$ (тогда как соответствующая поправка, обусловленная аксиальным магнитным полем, пропорциональна первой степени B_{0z}). Иными словами, поперечная относительно направления распространения волны составляющая внешнего магнитного поля сильнее влияет на дисперсионные свойства НАПВ, чем продольная составляющая. Такая зависимость собственной частоты от направления внешнего магнитного поля соответствует выводам, которые получены авторами [19] для случая поверхностных магнито-плазменных волн, распространяющихся вдоль плоской границы плазма–металл.

Показано, что вблизи точек пересечения дисперсионных кривых НАПВ и ОАОВ (при выполнении условий (37)) происходит резонансное линейное взаимодействие необыкновенной поверхностной и обыкновенной объемной азимутальных волн. Оно сопровождается появлением на графике дисперсионных кривых для связанных НАПВ и ОАОВ областей запрещенных значений частот, что является типичным для такого взаимодействия. Получено наглядное аналитическое выражение (38) для обусловленной постоянным азимутальным магнитным полем резонансной поправки к собственной частоте. При этом поправка к собственной частоте оказывается величиной первого порядка малости: $\Delta\omega_x \propto B_{0\vartheta}$.

Однако наиболее сильным оказывается влияние постоянного азимутального магнитного поля $B_{0\vartheta}$ на дисперсионные свойства НАПВ отнюдь не вблизи точек пересечения дисперсионных кривых НАПВ и ОАОВ. Напомним, что вблизи этих точек у ОАОВ по радиусу укладывается почти целое число полудлин волны. Поэтому, как и в случае линейного взаимодействия НАПВ с ОАОВ, граничным условиям удастся удовлетворить

за счет малого изменения частоты благодаря его одновременному сильному влиянию на пространственное распределение обеих взаимодействующих мод.

Вследствие объемного характера пространственного распределения поля ОАОВ для определенных наборов значений параметров волновода реализуются условия, при которых у вынужденной ОАОВ в нулевом приближении по радиусу укладывается нечетное число четвертей длин волны. Эти условия наблюдаются почти посередине между точками пересечения дисперсионных кривых НАПВ с чередой последовательных радиальных гармоник ОАОВ. При этом на графике дисперсионной зависимости для связанных НАПВ и ОАОВ появляются диапазоны запрещенных значений волновых чисел. В этом случае для удовлетворения граничным условиям поправка к частоте должна быть настолько большой, чтобы соответствующее увеличение (уменьшение) длины волны позволило изъять (уложить дополнительно) лишнюю (недостающую) четверть длины волны. Кроме того, это приводит к существенному изменению дисперсии НАПВ в диапазонах волновых чисел, которые примыкают к диапазонам запрещенных значений $k_{\text{эф}}$. В указанных диапазонах волновых чисел дисперсия НАПВ становится обратной, т. е. энергия этих волн переносится в направлении, противоположном направлению фазовой скорости. Этим случай линейного взаимодействия НАПВ с ОАОВ качественно отличается от взаимодействия НАПВ с ОАПВ [12].

Один из авторов благодарит за поддержку работы Ассоциацию выпускников, преподавателей и друзей Харьковского национального университета имени В.Н. Каразина.

Список литературы

- [1] Saito H., Wurtele J.S. // Phys. Fluids. 1987. Vol. 30. N 7. P. 2209–2220.
- [2] Kho I.H., Lin A.I., Liu Chen // Phys. Fluids. 1988. Vol. 31. N 10. P. 3120–3126.
- [3] Davidson R.C., Tsang K.T. // Laser. Part. Beams. 1988. Vol. 6. N 4. P. 661–685.
- [4] Lau Y.Y. // Proc. Symp. Non-neutral Plasma Physics. Washington. 1988. P. 210–223.
- [5] Кузелев М.В., Рухадзе А.А. Электродинамика плотных электронных пучков в плазме. М.: Наука, 1990. 336 с.
- [6] Applications of High-Power Microwaves / Ed. by A.V. Gaponov-Grekhov, V.L. Granatstein. Boston–London: Artech House, 1994. 364 p.
- [7] Гирка В.А., Гирка И.А., Ткаченко В.И. // ЖТФ. 1996. Т. 66. Вып. 4. С. 114–120.
- [8] Гирка В.А., Кондратенко А.Н., Пузырьков С.Ю. // Физика плазмы. 2003. Т. 29. № 2. С. 112–117.
- [9] Гирка В.А. // Физика плазмы. 2006. Т. 32. № 4. С. 396–405.
- [10] Кондратенко А.Н. Поверхностные и объемные волны в ограниченной плазме. М.: Энергоатомиздат, 1985. 208 с.
- [11] Азаренко Н.А., Кондратенко А.Н., Остриков К.Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1993. Т. 36. № 5. С. 335–389.

- [12] *Гирка В.А., Гирка И.А.* // РнЭ. 1991. Т. 36. № 10. С. 1997–2004.
- [13] *Гирка В.А., Гирка И.А.* // Физика плазмы. 2002. Т. 28. № 11. С. 994–1003.
- [14] *Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А.* Колебания и волны в плазменных средах. М.: Изд-во МГУ, 1990. 166 с.
- [15] Microwave discharges: Fundamentals and Applications / Ed. by С.М. Ferreira, М. Moisan. N.Y.: Plenum, 1993. Vol. 302 (NATO Advanced Study Institute. Ser. B: Physics).
- [16] *Гирка И.А., Ковтун П.К.* // ЖТФ. 1998. Т. 68. Вып. 12. С. 25–28.
- [17] *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. М.: Наука, 1979. 384 с.
- [18] *Ахиезер А.И., Ахиезер И.А.* Электромагнетизм и электромагнитные волны. М.: Высш. шк., 1985. 504 с.
- [19] *Азаренков Н.А., Дементий О.И., Костенко В.В.* // РнЭ. 1988. Т. 33. № 3. С. 546–549.