

Восстановление сигнала и динамики его спектральных характеристик при нерегулярном наборе измерений

© С.А. Варенцова, В.А. Трофимов, Ю.В. Троцкий

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
119992 Москва, Россия
e-mail: vatro@cs.msu.su

(Поступило в Редакцию 3 июля 2007 г.)

Предложено обобщение алгоритма SVD-восстановления сигнала, позволяющее получить информацию о динамике спектральных линий отклика среды при однократной серии нерегулярных измерений интегральных характеристик сигнала с помощью скользящего окна, размеры и смещение которого флуктуируют во времени. SVD-восстановление производилось как непосредственно по нерегулярным измерениям, так и после интерполяции измерений в узлы регулярной сетки. Предложен также алгоритм восстановления формы сигнала, основанный на сплайн-интерполяции. При его использовании в сочетании с SVD-восстановлением удается практически избавиться от ложных частот. Показано, что при интегральных измерениях с нерегулярными размерами окна и смещением его центра качество восстановления сигнала и нахождения динамики спектральных частот не хуже, чем при использовании измерений без флуктуаций. Рассмотрение проводилось как для модельного сигнала, так и для реального отклика среды, полученного ранее в физическом эксперименте.

PACS: 42.65.Re

Введение

Как известно, в настоящее время интенсивно развивается оптика малопериодных световых импульсов, а также импульсов терагерцового диапазона, что обусловлено широким практическим применением терагерцового излучения. Напомним, что терагерцовые импульсы пикосекундной длительности так же как и фемтосекундные (10–20 fs) импульсы видимого диапазона, являются малопериодными. Терагерцовое излучение имеет необычайно широкие перспективы для применения в дистанционном зондировании и спектроскопии химических, биологических, полупроводниковых объектов [1–6]. С его помощью можно проводить безвредную для человека диагностику [7–9], а также управлять химическими реакциями и электронными состояниями в квантовых ямах, разрабатывать системы безопасности и беспроводной связи компьютеров и периферии в помещениях [10–12].

При воздействии малопериодных импульсов отклик среды становится существенно нестационарным, в связи с чем большой интерес для практики представляет динамика его спектральных составляющих. Поэтому разработка методов, позволяющих анализировать спектральную динамику, является актуальной проблемой. Заметим, что широко используемый для обработки результатов физического эксперимента метод Вигнера часто дает неверные результаты, как отмечено в [13]. В связи с этим в [14,15] проведен детальный анализ одного из возможных подходов к измерению динамики спектрального отклика среды при его существенно нестационарном характере. Этот подход основан на методе Фурье–Габор [16], который применялся, в частности, в [17,18] (и более ранних работах) для

выделения спектральной составляющей на заданной частоте при анализе нелинейных эффектов в случае воздействия малопериодных высокоинтенсивных фемтосекундных импульсов. Его практическая реализация в физических экспериментах [15,19] продемонстрировала работоспособность данного алгоритма. Однако подход позволяет при одной серии вычислений проанализировать динамику спектральной составляющей отклика среды только на одной частоте. Для следующей частоты нужно снова повторять аналогичные вычисления, что, очевидно, является недостатком данного метода.

В работах [20,21] предложен новый метод, основанный на SVD-методике, позволяющий устранить этот недостаток: при одной серии вычислений можно получить одновременно динамику множества спектральных составляющих отклика среды. В настоящей работе исследуется эффективность этого метода при нерегулярном наборе измерений, что является наиболее близким к реальной ситуации. Качество получаемой динамики спектральных частот не ухудшается по сравнению с информацией, полученной на основе регулярных измерений, а в ряде случаев используемый алгоритм позволяет избавиться от ложных частот.

Проанализирована эффективность применения сплайн-аппроксимации интегральных данных (или самого сигнала) для задачи восстановления сигнала. Как известно, определение формы импульса лазерного излучения представляет собой сложную практическую задачу. Ее решение обычно базируется либо на анализе спектра импульса, либо на автокорреляционной функции. Поэтому предлагаемый метод может найти практическое применение и в лазерных установках для контроля генерируемого сигнала и определения формы отклика среды на внешнее воздействие.

Постановка задачи

Обозначим через $f(t)$ исходный неизвестный сигнал (например, форму светового импульса), непрерывный на отрезке времени $[t_b, t_e]$. В результате измерений в физическом эксперименте нам известен набор интегральных данных d_1, d_2, \dots, d_N от функции $f(t)$ (в случае лазерного импульса — это энергия), определяемый следующим образом:

$$d_i = \int_{t_{c,i}-0.5T_i}^{t_{c,i}+0.5T_i} f(t) dt, \quad (1)$$

а для промежутков времени справедливо соотношение $t_{c,1} - 0.5T_1 \leq t_b$, $t_{c,N} + 0.5T_N \geq t_e$, $t_{c,i} < t_{c,i+1}$, $\Delta_i = t_{c,i+1} - t_{c,i} < 0.5(T_{i+1} + T_i)$, $i = 1, \dots, N$. Здесь N — число временных интервалов, t_b — время начала регистрации сигнала, t_e — время ее окончания, T_i — длина окна (длина интервала, на котором производится измерение), Δ_i — величина сдвига окна, т.е. промежуток времени, на который сдвигается центр окна $t_{c,i}$ в интеграле (1). Для практики представляют интерес случайные изменения величин Δ_i и T_i при переходе от одного измерения к другому. При этом данные изменения равновероятны и происходят вблизи некоторой средней величины каждого из параметров. Следовательно, задача состоит, в частности, в восстановлении сигнала $f(t)$ в этих условиях по известному набору интегральных величин d_i .

В качестве объектов, для которых исследуется эффективность используемого метода, рассматривается модельный сигнал

$$f(t) = \sin(1.2t) + e^{-\left(\frac{t-30}{10}\right)^2} \sin(1.5t) + 2e^{-\left(\frac{t-80}{20}\right)^2} \sin(4t), \quad (2)$$

а также реальный сигнал — отклик молекулы *L*-cystine при воздействии терагерцового импульса [15]. Нас будет интересовать динамика спектральных амплитуд восстановленного сигнала (2) на трех заданных частотах $\omega_1 = 1.2$, $\omega_2 = 1.5$, $\omega_3 = 4$, а также на частотах отклика среды $\omega_1 = 3.35$, $\omega_2 = 3.707$, $\omega_3 = 4.49$ в выполненном физическом эксперименте [15].

SVD-восстановление сигнала и его спектра при случайном изменении длины и сдвига окна

Как было отмечено в [20,21], ширина окна T и его сдвиг Δ в большой степени определяются конструктивными особенностями измерительных приборов и имеют свои ограничения, не позволяющие в большинстве случаев добиваться их оптимальных значений, т.е. значений, при которых спектр сигнала восстанавливается практически точно. При использовании реальных неоптимальных значений длины окна $T = \text{const}$ и его сдвига $\Delta = \text{const}$ в спектре SVD-восстановленного сигнала появляются ложные частоты. Для их устранения

в [20,21] предлагалось провести несколько серий измерений с различными длинами окон или сдвигов. Учитывая, что истинные частоты сигнала не изменяют своего положения в спектре, а ложные частоты смещаются вдоль спектральной оси, можно определить реальный спектральный состав сигнала.

Еще один способ устранения ложных частот из спектра состоит в использовании сдвигов $\Delta_i = \Delta_r$ и (или) окон $T_i = T_r$, длина которых изменяется случайным образом в одной серии измерений. Очевидно, что на практике реализуется именно этот случай, так как провести измерения без флуктуаций параметров измерительной системы достаточно трудно. Далее будем полагать, что параметры Δ_r и T_r удовлетворяют следующим условиям:

$$|\Delta_r - \Delta| \leq 0.01P\Delta, \quad |T_r - T| \leq 0.01P_1T, \quad (3)$$

где $P \leq 100$ и $P_1 \leq 100$ — процент максимального отклонения сдвига Δ_r и длины окна T_r от их средних значений Δ и T . Если $P = 0$ или $P_1 = 0$, то измерения выполняются без флуктуаций сдвига окон или временных интервалов. Отметим также, что в данной работе, как и ранее в [20,21], мы полагаем, что значения Δ , T , а также Δ_r и T_r кратны величине τ — шагу по времени, с которым восстанавливается сигнал (см. ниже).

Эффективность работы измерительной системы в случае флуктуаций Δ и T представлена на рис. 1. Спектр модельного сигнала (2), SVD-восстановленного с постоянными неоптимальными значениями длин окна $T = 2$ и сдвига $\Delta = 0.2$, которые приводят к появлению на интервале ложных частот, приведен на рис. 1, *a*. Если применить измерительную систему со случайным сдвигом Δ_r ($P = 50\%$) и постоянной длиной окна T , то спектральные амплитуды ложных частот существенно уменьшаются, в то время как амплитуды истинных частот сигнала практически не изменяются (рис. 1, *b*). В случае флуктуаций длины окна T_r при его постоянном сдвиге Δ или одновременном случайном изменении как длины окна, так и его сдвига, результаты восстановления спектра модельной функции аналогичны приведенным на рис. 1, *b*.

Для количественной характеристики качества восстановления сигнала обозначим через δ_C C -норму разности истинного и SVD-восстановленного спектров, а через δ — отношение максимальной амплитуды ложных частот к максимальной амплитуде истинного спектра

$$\delta_C = |P_{\text{real}}(\omega) - P_{\text{SVD}}(\omega)|_C, \quad \delta = \frac{\max |P_{\text{noise}}(\omega)|}{\max |P_{\text{real}}(\omega)|}. \quad (4)$$

Тогда при отсутствии флуктуаций для данных $T = 2$ и $\Delta = 0.2$ имеем $\delta_C = 3.67 \cdot 10^{-2}$, а $\delta = 7.75 \cdot 10^{-2}$, а в случае их наличия для сдвига окна ($P \leq 80\%$, $P_1 = 0$) значения δ_C уменьшаются более чем в два раза, а значения δ — почти в три раза. Для достижения таких значений δ_C и δ при постоянной длине окна $T = 2$ необходимо уменьшить его сдвиг до $\Delta = 0.15$. Очевидно, это потребует большего числа измерений

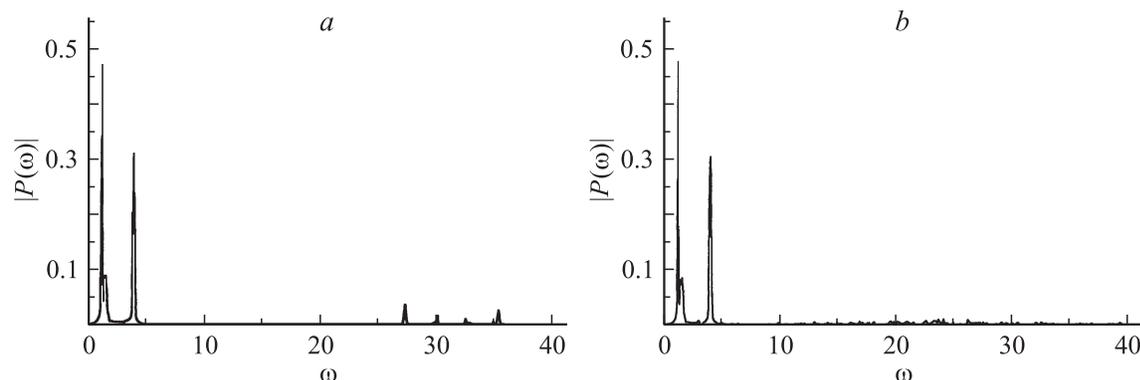


Рис. 1. Спектры $|P(\omega)|$ модельного сигнала (2), восстановленные с постоянной длиной окна $T = 2$ и случайными изменениями его сдвига $\Delta = 0.2$: $P = 0$ (a), 5.0% (b).

(примерно на 30%) по сравнению со случаем присутствия флуктуаций. При флуктуациях длины окна ($P = 0$) значения δ_C и δ уменьшаются приблизительно на 48% для $P_1 = 20\%$ и на 24 для $P_1 = 80$. Для одновременных флуктуаций сдвига и длины окна значения δ_C и δ уменьшаются на 45% в случае $(P, P_1) = (20, 20\%)$ и на 35 при $(P, P_1) = (80, 80\%)$. Таким образом, наличие флуктуаций длины окна и(или) его сдвига приводит к более точному восстановлению спектра модельного сигнала (2) по сравнению со случаем их постоянных значений в процессе измерений. При этом лучшие результаты восстановления достигаются, если флуктуации не превышают 50% от длины окна и(или) его сдвига. Важно подчеркнуть, что в случае флуктуирующих параметров одинаковая точность восстановления достигается более экономичным способом по сравнению с регулярными измерениями.

В качестве второго примера рассмотрим отклик среды (молекулы *L*-cystine) при воздействии на нее терагерцового лазерного импульса. Спектр отклика среды, SVD-восстановленный с постоянными неоптимальными значениями длины окна $T = 1$ и его сдвига $\Delta = 0.2$, приведен на рис. 2, a. На частотном интервале [20] хорошо видны появившиеся вследствие этого ложные частоты. Для сравнения приведен спектр, полученный при случайном сдвиге Δ_r и постоянной длине окна T (рис. 2, b), а также при случайной длине окна T_r и постоянном сдвиге Δ (рис. 2, c) и при одновременном случайном изменении длины окна и его сдвига (рис. 2, c). Соответствующие флуктуации достигают 20%. Из рис. 2 видно, что положение ложных частот смещается, в то время как истинные частоты своего положения не меняют. Отметим, что при увеличении флуктуаций сдвига и(или) длины окна более чем на 50% количество ложных частот в спектре увеличивается, и возрастают их амплитуды, а амплитуды истинных частот уменьшаются.

При дальнейшем увеличении флуктуаций P и P_1 (более чем на 80%) амплитуды ложных частот становятся сравнимыми с амплитудами истинных частот. В случае восстановления реального сигнала значения δ_C и δ изменяются заметно слабее, чем для модельного

сигнала. При этом для флуктуаций сдвига окна при его постоянной длине происходит даже некоторое увеличение значения δ_C . Важно подчеркнуть, что значения δ_C и δ уменьшаются или в случае флуктуаций длины окна с постоянным его сдвигом, или при их одновременных флуктуациях. Так, при $(P, P_1) = (0, 20\%)$ значение δ_C уменьшается на 37%, а δ — на 12%. Если $(P, P_1) = (20, 20\%)$, то значение δ_C уменьшается на 46%, значение δ — на 19. Отметим, что сравнимые по точности результаты для постоянных значений длины окна и его сдвига можно получить при $T = 0.9$ и $\Delta = 0.15$, что требует увеличения числа измерений приблизительно на 30%. Заметим также, что при одновременной флуктуации оптимальной длины окна $T = 1$ и его сдвига $\Delta = 0.1$ на 20% в спектре появляется незначительное количество ложных частот с малыми амплитудами, однако при этом значительно возрастает точность восстановления сигнала и основной части спектра, сосредоточенной на интервале [0,10].

Таким образом, в случае реального физического эксперимента спектр отклика среды можно восстановить, проведя несколько измерений с различными значениями флуктуаций длины окна и(или) его сдвига. При этом величину флуктуаций необходимо ограничить 50% от длины окна и(или) сдвига. Важный вывод состоит в том, что и в этом случае флуктуации параметров измерительной системы, как правило, приводят к улучшению качества восстановительного спектра сигнала и его формы, и требуется меньшее число измерений по сравнению со случаем регулярных параметров измерительной системы.

Для практики представляет интерес динамика спектральных линий. В случае регулярных измерений она приведена в [21] на рис. 2. В рассматриваемой здесь ситуации флуктуаций параметров окна и сдвига динамика спектральных линий как модельного сигнала (2), так и отклика молекулы *L*-cystine при флуктуациях менее 50% полностью совпала с аналогичными зависимостями, полученными при постоянных Δ и T . В случае еще больших флуктуаций сдвига Δ и окна T (до 80%) у модельного сигнала (2) незначительно уменьшается максимум спектральной амплитуды на частоте $\omega_3 = 4$,

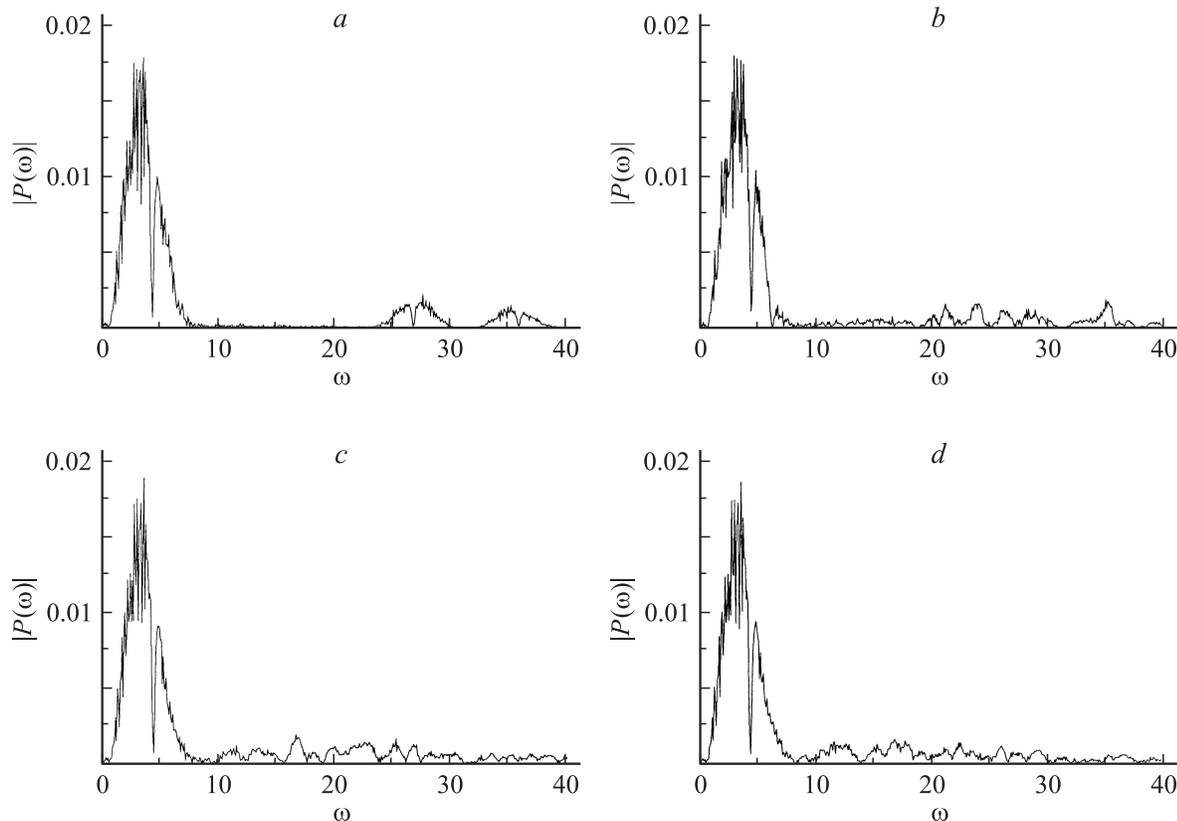


Рис. 2. Спектры отклика среды, восстановленные с постоянной длиной окна $T = 1$ и случайным изменением его сдвига $\Delta = 0.2$: $P = 0$ (a), 20% (b); при постоянном сдвиге окна и случайном изменении длины окна: $P_1 = 20\%$ (c); при одновременных флуктуациях длины окна и его сдвига, $(P, P_1) = (20, 20\%)$ (d).

остальные две линии не изменяются. У отклика молекулы *L*-cystine незначительно уменьшается амплитуда всех спектральных линий. Заметим, что основное влияние несовершенство измерительной системы (конечный размер окна и конечный его сдвиг) оказывает вблизи границы истинного спектра. Именно здесь сказывается наличие ложных частот, которое проявляется, в частности, в различной динамике истинных частот при разных параметрах измерительной системы. Поэтому, если известно, что интересующие частоты спектра расположены вдали от его максимальной частоты, то требования к измерительной системе можно значительно снизить.

Восстановление сигнала при использовании интерполяции

При случайном сдвиге и размере окна, очевидно, результаты измерений d_i есть значения функции $d(t_i, T_i)$. Используя интерполяцию, их можно вычислить в точках (t_i^0, T) , где $t_i^0 = t_b + \Delta(i - 1) + T/2$, соответствующих постоянному сдвигу и длине окна, и затем применить метод SVD-восстановления к вычисленным значениям. Цель данной части работы заключается в исследовании эффективности такого подхода в смысле соотношения амплитуд ложных и истинных частот спектра сигнала

и возможностей подавления ложных частот. Для этого выберем значения параметров ширины окна и его сдвига такими, чтобы в случае отсутствия флуктуаций SVD-восстановление обеспечивало хорошее качество определения формы сигнала, его спектра, а также динамики спектральных линий. Исходя из этого модельный сигнал анализировался на отрезке $t_b = 0, t_e = 100$, а сдвиг окна и его ширина были равны: $\Delta = 0.2, T = 2$. При этом шаг по времени, с которым вычислялся сигнал, равен $\tau = 0.05$. В случае использования преобразования Фурье–Габора сдвиг окна был равен $\Delta_1 = 1$, а его ширина $T_1 = 40$. Реальный сигнал анализировался на отрезке $t_b = -20, t_e = 80$ измерительной системой со сдвигом и окном, соответственно равными $\Delta = 0.2$ и $T = 1$, а для преобразования Фурье–Габора соответствующие значения равны $\Delta_1 = 0.5, T_1 = 20$. Динамика спектральных линий реального сигнала анализировалась на частотах $\omega_1 = 3.35, \omega_2 = 3.707, \omega_3 = 4.49$. Соответственно в дальнейшем указываются только те значения параметров, которые отличаются от вышеприведенных.

Прежде всего рассмотрим влияние флуктуации сдвигов окна, которые осуществлялись по закону

$$d_i = d(t_i, T), \quad t_i = t_i^0 + r_i, \quad (4')$$

где r_i — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке

$$(-P\Delta/100, P\Delta/100),$$

$$0\% \leq P < 80\%, \quad (r_1 = r_N = 0), \quad (4'')$$

на качество восстановления сигнала. Отметим, что условие $r_1 = r_N = 0$ означает, что левая граница первого окна всегда совпадала с началом временного интервала (t_b), а правая граница последнего окна совпадала с концом временного интервала (t_e). Другие окна вблизи границ смещались таким образом, чтобы они не выходили за границы отрезка $[t_b, t_e]$.

В качестве примера влияния флуктуации сдвига приведены на рис. 3 и 4. Для наглядности влияния флуктуаций и используемого метода интерполяции на рис. 3, а, с представлены результаты, соответствующие постоянным сдвигам и длине окна, т.е. все остальные рисунки следует сравнивать с ними. Как видно из рисунка, по мере увеличения флуктуации сдвига окна присутствие ложных частот в восстановленном сигнале увеличивается. Однако динамика спектральных линий на выбранных выше частотах для всех рисунков практически одинакова. Заметим, что для рис. 3 измеренные значения $d_i = d(t_i, T)$ при флуктуациях интерполировались в точки t_i^0 , соответствующие моментам времени при постоянных сдвигах, с помощью кусочно-линейной непрерывной функции

$$\tilde{d}(t) = (t - t_i)(d_{i+1} - d_i)/(t_{i+1} - t_i) + d_i, \quad t \in [t_i, t_{i+1}). \quad (5)$$

Рис. 4 соответствует более общий случай интерполяции флуктуаций Δ_i : она выполнялась с помощью кубического сплайна, проведенного через точки (t_i, d_i) ,

$$\tilde{d}(t) = \alpha_i(t - t_i)^3 + \beta_i(t - t_i)^2 + \gamma_i(t - t_i) + d_i, \quad t \in [t_i, t_{i+1}). \quad (6)$$

Коэффициенты сплайна находятся в результате решения системы линейных уравнений методом прогонки, которая записывается из условий равенства значений сплайна \tilde{d} и измеренных величин d_i в моменты времени t_i , а также из непрерывности первой и второй производных от сплайна.

Сравнение рис. 3 и 4 показывает, что применение сплайна существенно улучшает качество восстановления как модельного, так и реального сигналов по сравнению с использованием для этой цели линейной интерполяции. Так, при флуктуациях сдвигов в 50% линейная интерполяция в обоих случаях приводит к появлению ложных частот, сравнимых по спектральной интенсивности с частотами сигнала. Использование сплайн-интерполяции при таких же флуктуациях приводит к подавлению ложных частот. При этом с уменьшением амплитуды флуктуаций до 20% спектральная интенсивность ложных частот, естественно, еще более уменьшается по сравнению со случаем 50% флуктуации параметров.

Тем не менее интенсивность ложных частот при восстановлении реального сигнала для одних и тех же амплитуд флуктуации (в процентных величинах) заметно больше по сравнению с их значениями в случае модельного сигнала. Так, при флуктуациях сдвигов окна для модельного сигнала ложные частоты становятся заметными при $P = 80\%$ (но и в этом случае их амплитуда мала по сравнению с амплитудой основных частот), в то время как для реального сигнала амплитуда ложных частот становится сравнимой с амплитудами основных частот уже при $P = 50\%$. Таким образом, для достижения высокого качества восстановления реального сигнала, содержащего большой спектральный состав, амплитуда флуктуаций сдвигов окна должна быть ограничена примерно 20%.

Обратимся к влиянию флуктуации длины окна

$$d_i = d(t_i^0, T_i), \quad T_i = T + r_i, \quad (7')$$

где r_i — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке

$$\begin{cases} (0, P_1 T/100) & \text{при четных } i \\ (-P_1 T/100, 0) & \text{при нечетных } i \end{cases},$$

$$0\% \leq P_1 < 50\%, \quad (r_1 = r_N = 0), \quad (7'')$$

на качество восстановления сигнала и определение его спектра. Условие $r_1 = r_N = 0$ в данном случае означает, что значения длины первого и последнего окон не изменялись. Так же как и при флуктуациях сдвигов окна значения длины других окон вблизи границ временного интервала $[t_b, t_e]$ варьировались таким образом, чтобы они не выходили за его границы. При этом и сдвиги, и длины окон выбирались кратными шагу интегрирования τ , который используется для восстановления формы сигнала. Отметим, что, поскольку длина окна существенно больше его сдвига, то ограничение флуктуаций 50% в (7'') менее жесткое, чем ограничение 80% в формуле (4'').

Из формулы (7'') следует, что при флуктуациях длины окна случайные отклонения изменяют знак от точки к точке. При таком законе флуктуаций точка $A^i = (t_i^0, T)$ находится внутри треугольника с вершинами в точках $A_{i-1} = (t_{i-1}^0, T_{i-1})$, $A_i = (t_i^0, T_i)$, $A_{i+1} = (t_{i+1}^0, T_{i+1})$ на плоскости параметров (t, T) . Поэтому результаты измерений можно проинтерполировать в точки с постоянной длиной окна, построив плоскости по каждому трем соседним точкам (в дальнейшем такая интерполяция называется интерполяцией плоскостью по трем точкам). При отсутствии изменения знака величины флуктуаций длины окна, возможно, потребовалось бы выполнить еще экстраполяцию значений интегралов (1), а при попадании всех трех точек на одну прямую плоскость была бы определена неоднозначно. Таким образом, выбранный модельный закон флуктуации длины окон позволяет осуществить вычисление интегралов на точках (t_i, T) , соответствующих постоянному сдвигу и ширине окна,

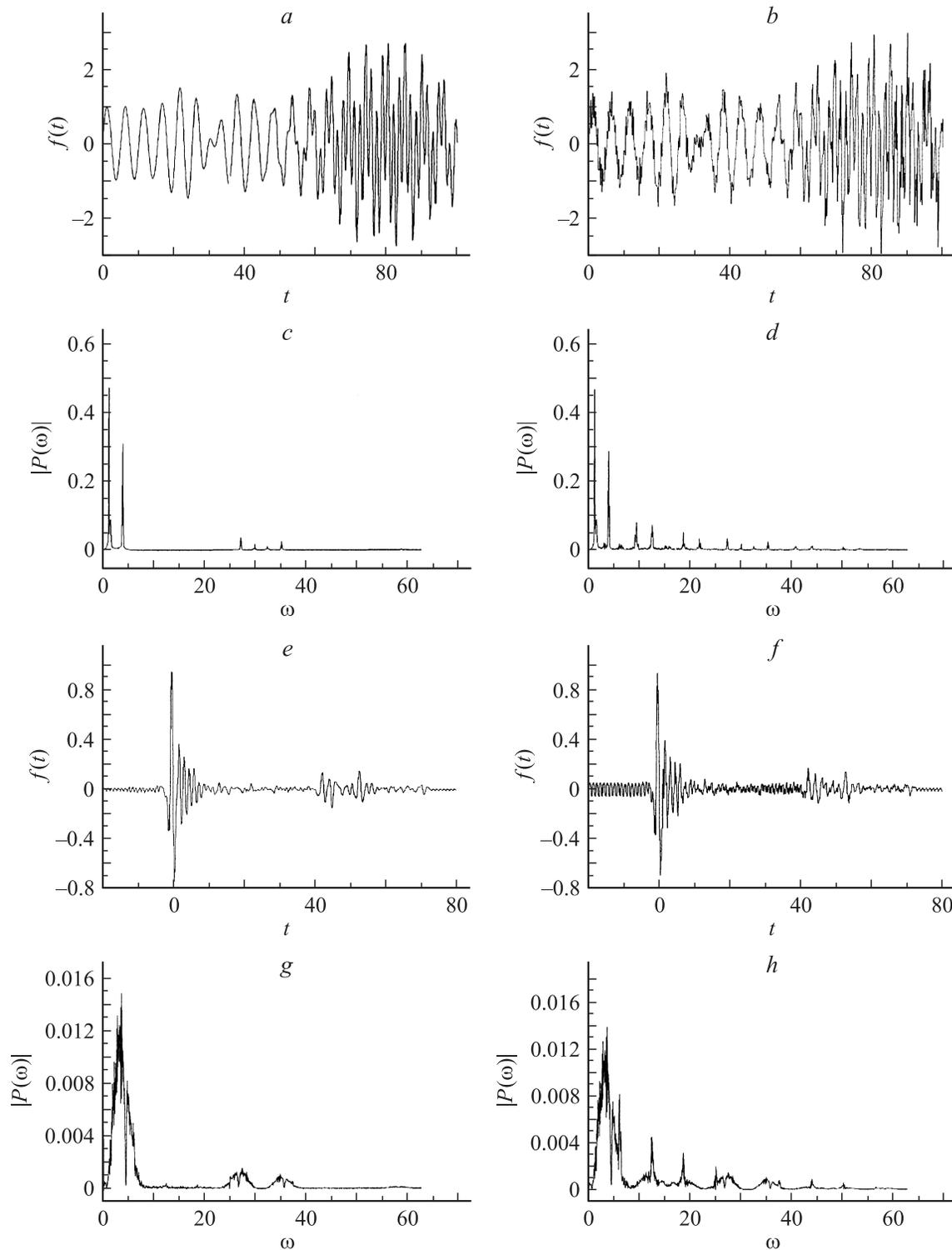


Рис. 3. Влияние флуктуации сдвига окна 0 (*a, c, e, g*) и 50% (*b, d, f, h*) с последующей линейной интерполяцией измерений в точки, соответствующие их постоянному сдвигу, на качество восстановления модельного (*a, b*) и реального (*e, f*) сигналов, и их спектров соответственно (*c, d*) и (*g, h*).

более точно без внесения ошибок экстраполяции. Это рассмотрение целесообразно выполнить сначала, так как, если для него не может быть достигнуто хорошее качество восстановления, то и для более общего случая,

по-видимому, оно будет еще хуже из-за ошибок экстраполяции.

В качестве примера на рис. 5 представлены результаты восстановления сигнала и определения его

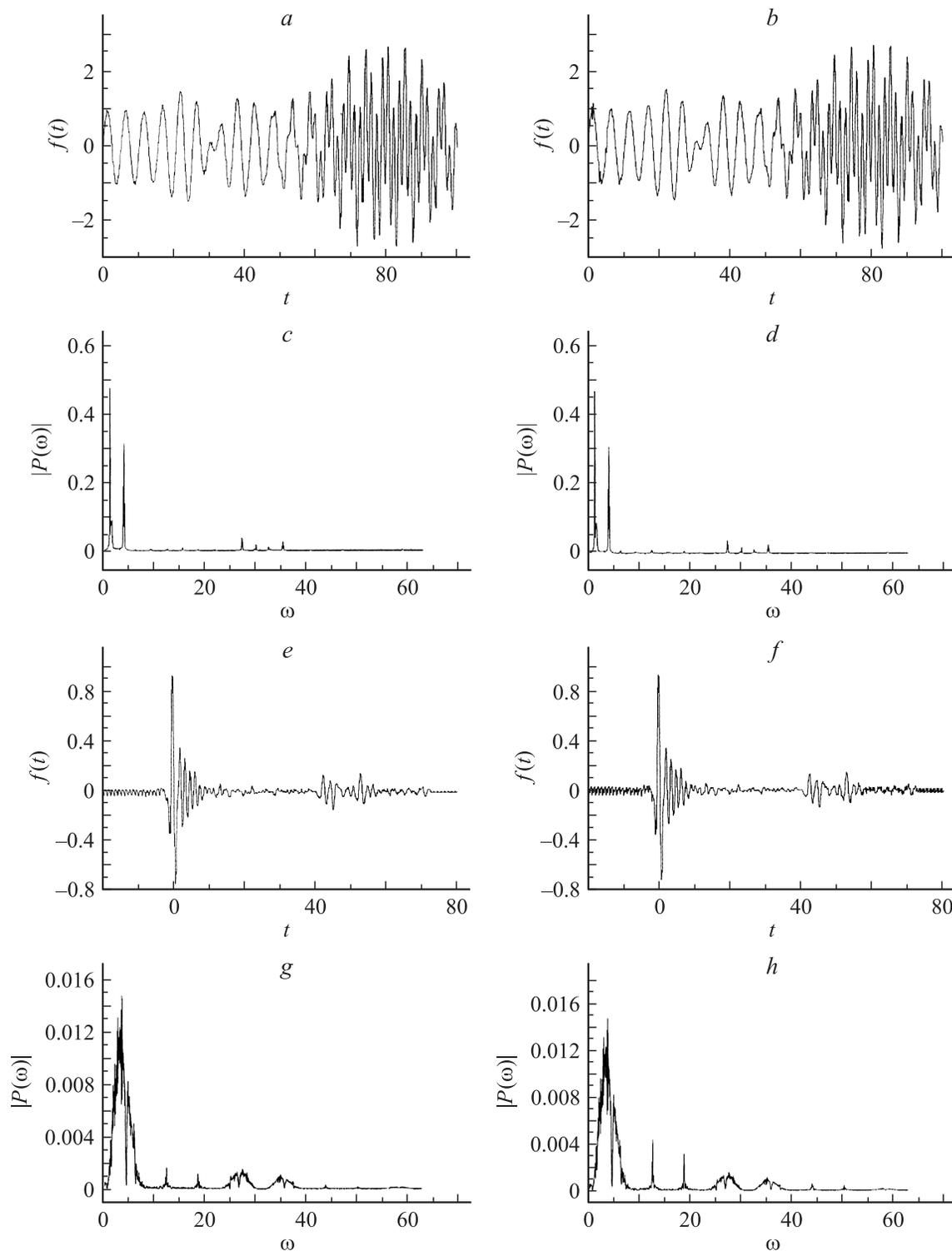


Рис. 4. Влияние флуктуации сдвига окна 50 (*a, c, e, g*) и 80% (*b, d, f, h*) с последующей сплайн-интерполяцией измерений в точки, соответствующие их постоянному сдвигу, на качество восстановления модельного (*a, b*) и реального (*e, f*) сигналов, и их спектров соответственно (*c, d*) и (*g, h*).

спектра при флуктуациях длины окна: $d_i = d(t_i^0, T_i)$. Как видим, при использовании интерполяции плоскостью по трем точкам (рис. 5, *a, c*) как для модельного, так и для реального сигналов, амплитуды ложных частот

сравнимы с амплитудами истинных частот. С целью устранения этого недостатка опробован еще один способ интерполяции. В этом случае сначала выполняется интерполяция в точки, соответствующие посто-

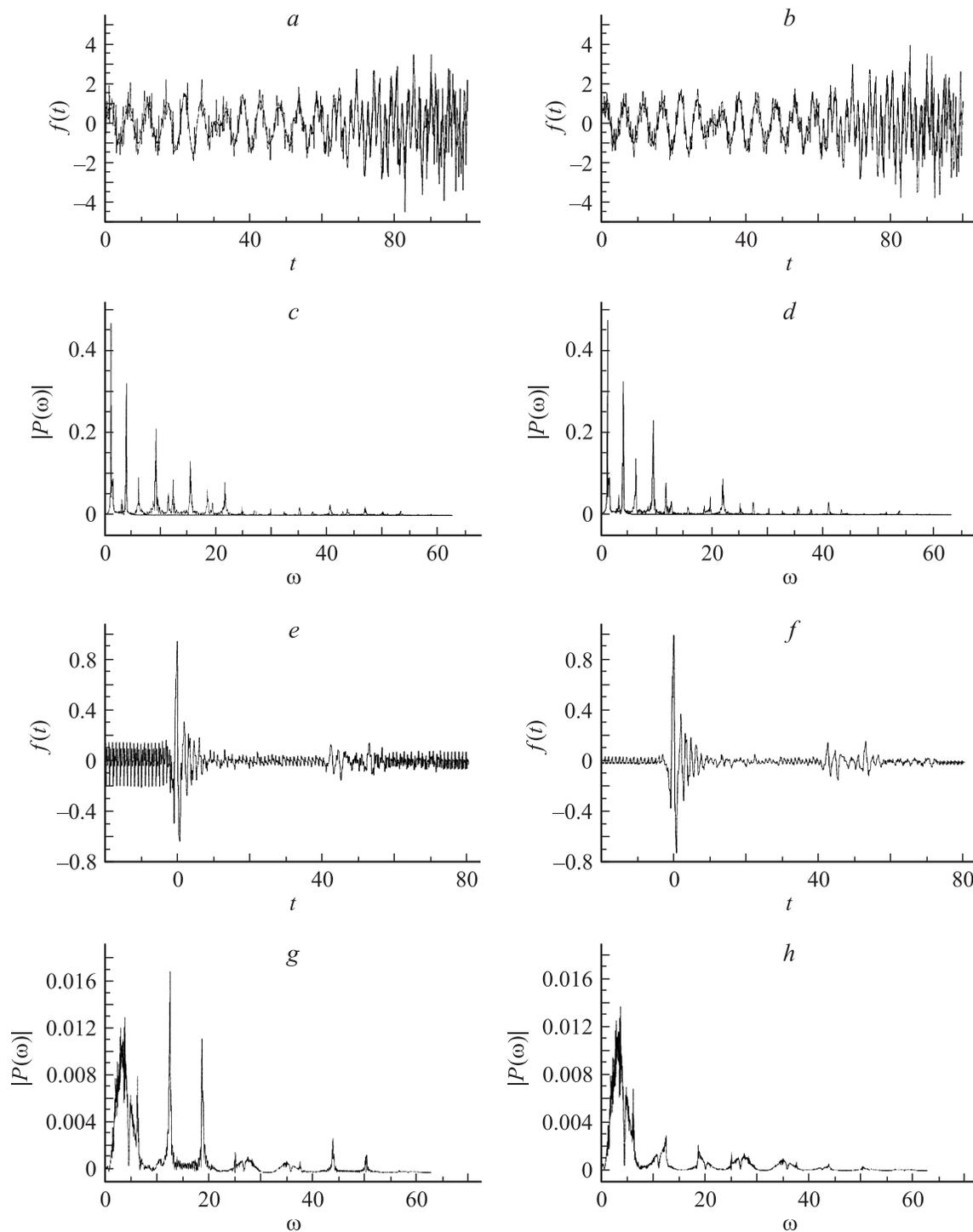


Рис. 5. Влияние флуктуации сдвига окна 20% с последующей интерполяцией плоскостью по трем точкам (*a, c, e, g*) и линейной по длине окна — сплайн по t (*b, d, f, h*) — на качество восстановления модельного (*a, b*) и реального (*e, f*) сигналов и их спектров соответственно (*c, d*) и (*g, h*).

янной длине окна по каждой паре соседних точек: $(\tilde{t}_i, T) \in [A_{i-1}, A_i]$, где $A_{i-1} = (t_{i-1}^0, T_{i-1})$, $A_i = (t_i^0, T_i)$ — точки на плоскости (t, T) (такая интерполяция возможна из-за смены знака r_i в формуле (7'')). Тогда сдвиги окон оказываются непостоянными. Затем через

полученные точки (\tilde{t}_i, T) , аналогично (6), строится сплайн, с помощью которого выполняется интерполяция в точки постоянных сдвигов окон. Следует подчеркнуть, что для модельного сигнала это не привело к существенному улучшению качества восстановления

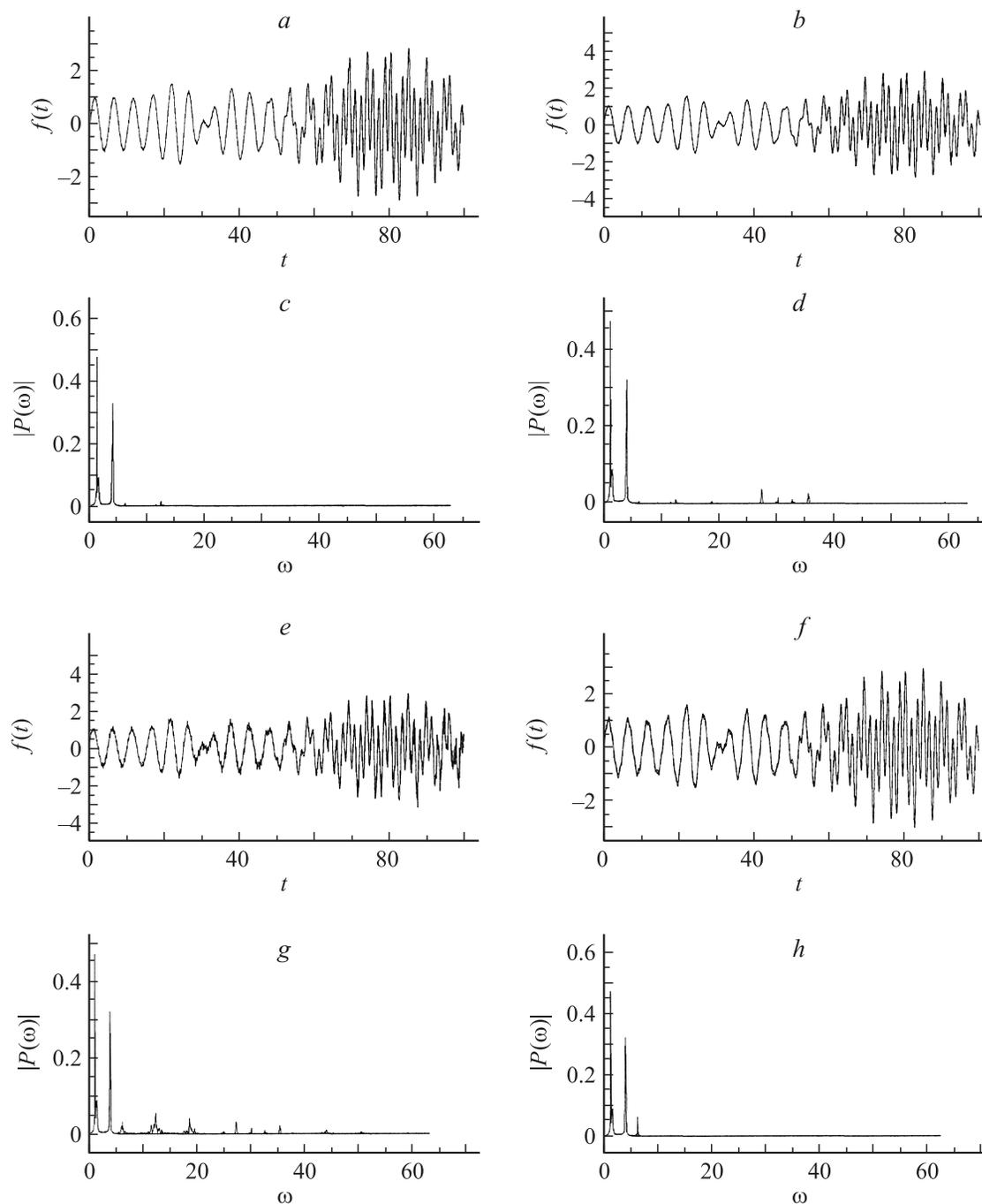


Рис. 6. Сплайн-восстановление при варьировании длины окна $T = 1$ на 10% (*a, c*), SVD-восстановление при использовании этого сплайна (*b, d*), SVD-восстановление при интерполяции плоскостью по трем точкам (*e, g*), сплайн-восстановление при постоянном сдвиге и длине окна на неравномерной интерполяционной сетке (*f, h*).

сигнала (рис. 5, *b*): амплитуды некоторых ложных частот значительно уменьшились, а некоторых — даже увеличились. Максимумы ложных частот при этом стали менее регулярными. В случае реального сигнала (рис. 5, *d*) такая процедура интерполяции существенно улучшила как форму восстановленного сигнала, так и его спектр (амплитуды ложных частот уменьшились примерно в 5 раз).

Для повышения качества восстановления сигнала предлагается новый подход к решению рассматриваемой задачи. Его эффективность проиллюстрирована рис. 6, *a*, который соответствует флуктуациям длины окна: $d_i = d(t_i^0, T_i)$. В этом методе интерполяции значений интегралов d_i (1) в точки постоянного сдвига и длины окна не проводится, а неизвестный исходный сигнал $f(t)$ на отрезке $[t_b, t_e]$ приближается кубическим

сплайном $\tilde{f}(t)$

$$\tilde{f}(t) = \alpha_i(t - \theta_i)^3 + \beta_i(t - \theta_i)^2 + \gamma_i(t - \theta_i) + \delta_i, \quad t \in [\theta_i, \theta_{i+1}), \quad (8)$$

где θ_i — узлы равномерной интерполяционной сетки на временном отрезке: $\theta_0 = t_b$, $\theta_{N+1} = t_e$, $\theta_i = \theta_0 + i\Delta\theta$, $\Delta\theta = (\theta_{N+1} - \theta_0)/(N+1)$, где N , как и выше, — число измерений интегралов от сигнала. Коэффициенты сплайна находятся из условия равенства интегралов от него и реальных измерений d_i на соответствующих временных отрезках

$$\int_{t_n^0 - T_n/2}^{t_n^0 + T_n/2} \tilde{f}(t) dt = d_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (9)$$

В точках интерполяционной сетки задаются условия непрерывности функции $\tilde{f}(t)$, а также ее первой и второй производных, которые позволяют записать уравнения для построения сплайн-сигнала (8):

$$\begin{aligned} \alpha_i \Delta\theta^3 + \beta_i \Delta\theta^2 + \gamma_i \Delta\theta + \delta_i &= \delta_{i+1}, \\ 3\alpha_i \Delta\theta^2 + 2\beta_i \Delta\theta + \gamma_i &= \gamma_{i+1}, \\ 3\alpha_i \Delta\theta + \beta_i &= \beta_{i+1}, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (10)$$

Так как для любого временного окна $[t_n^0 - T_n/2, t_n^0 + T_n/2]$ ($n \in [1, N]$) могут быть найдены значения i и j , такие что $[\theta_i, \theta_j]$ — наименьший покрывающий его отрезок

$$[\theta_{i+1}, \theta_{j-1}] \subset [t_n^0 - T_n/2, t_n^0 + T_n/2] \subseteq [\theta_i, \theta_j], \quad (11)$$

то значение измеренной интегральной величины d_i может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} d_n &= \int_{t_n^0 - T_n/2}^{t_n^0 + T_n/2} \tilde{f}(t) dt \\ &= \int_{t_n^0 - T_n/2}^{\theta_{i+1}} \tilde{f}(t) dt + \sum_{k=i+1}^{j-2} \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} \tilde{f}(t) dt + \int_{\theta_{j-1}}^{t_n^0 + T_n/2} \tilde{f}(t) dt \\ &= \left(\frac{1}{4} a_i \Delta\theta^4 + \frac{1}{3} b_i \Delta\theta^3 + \frac{1}{2} c_i \Delta\theta^2 + d_i \Delta\theta \right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{4} a_i \Delta\tilde{\theta}^4 + \frac{1}{3} b_i \Delta\tilde{\theta}^3 + \frac{1}{2} c_i \Delta\tilde{\theta}^2 + d_i \Delta\tilde{\theta} \right) \\ &\quad + \sum_{k=i+1}^{j-2} \left(\frac{1}{4} a_k \Delta\theta^4 + \frac{1}{3} b_k \Delta\theta^3 + \frac{1}{2} c_k \Delta\theta^2 + d_k \Delta\theta \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} a_{j-1} \Delta\tilde{\theta}^4 + \frac{1}{3} b_{j-1} \Delta\tilde{\theta}^3 + \frac{1}{2} c_{j-1} \Delta\tilde{\theta}^2 + d_{j-1} \Delta\tilde{\theta}, \\ \Delta\tilde{\theta} &= t_n^0 - T_n/2 - \theta_i, \quad \tilde{\Delta\theta} = t_n^0 + T_n/2 - \theta_{j-1}. \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом, относительно коэффициентов сплайна (8), число которых равно $4(N+1)$, получается система линейных уравнений. Нетрудно видеть, что если ее дополнить условиями на сплайн в граничных точках, то число уравнений и неизвестных будут совпадать. Поэтому они могут быть найдены из решения системы линейных уравнений с ленточной матрицей, ширина ленты которой зависит от того, сколько отрезков сплайна может быть покрыто окном одного измерения $[t_n^0 - T_n/2, t_n^0 + T_n/2]$, т.е. от $\max_n (j(n) - i(n))$ в формуле (11). Описанная выше процедура также представляет собой метод восстановления исходного сигнала. Нетрудно видеть, что при необходимости с помощью построенного сигнала результаты измерений также могут быть проинтерполированы в точки постоянного сдвига и длины окна для восстановления SVD-методом или для решения других задач. Однако построить динамику спектральных линий можно и при непосредственном использовании сплайна. Для примера на рис. 6, а приведен сплайн-восстановленный сигнал, как следует из него, качество восстановления сигнала хорошее: амплитуда ложных частот в несколько раз меньше, чем на рис. 3, с. На рис. 6, b сигнал SVD-восстановлен при использовании этого сплайна как способа интерполяции в точки плоскости, соответствующие постоянным сдвигам и длинам окон. Для сравнения на рис. 6, e, g приведены результаты в случае интерполяции в точки, соответствующие постоянным длинам окна, плоскостью по трем точкам. Таким образом, использование сплайна для определения формы сигнала $f(t)$ привело к качественному улучшению.

Следует, однако, подчеркнуть, что при неизменных размерах окна $T_i = T = \text{const}$ и постоянном сдвиге сплайн построить не удастся. Однако проблема, по-видимому, может быть решена неравномерным расположением узлов интерполяционной сетки, т.е. при $\theta_{i+1} - \theta_i = \Delta\theta_i \neq \text{const}$. В качестве примера на рис. 6, f, h приведены результаты расчетов, соответствующие одному из вариантов построения неравномерной интерполяционной сетки. При этом сигнал восстановлен, но появилась ложная частота, менее чем на порядок отличающаяся по амплитуде от основных частот. Интересно отметить, что, если использовать этот сигнал $\tilde{f}(t)$ для вычисления интегралов и затем произвести SVD-восстановление сигнала, то получим результат, изображенный на рис. 3, a, на котором имеет место хорошее восстановление. Таким образом, восстановление сигнала с помощью сплайна целесообразно использовать не только как самостоятельный метод, но и как способ улучшения качества SVD-восстановления. Отметим, что сплайн-восстановление значительно экономичнее по времени по сравнению с SVD-восстановлением при увеличении числа измерений (см. таблицу). Однако при малом числе измерений SVD-восстановление позволяет более качественно определить сигнал.

Обсудим теперь вопрос о ложных частотах, появляющихся в восстановленном сигнале при использовании

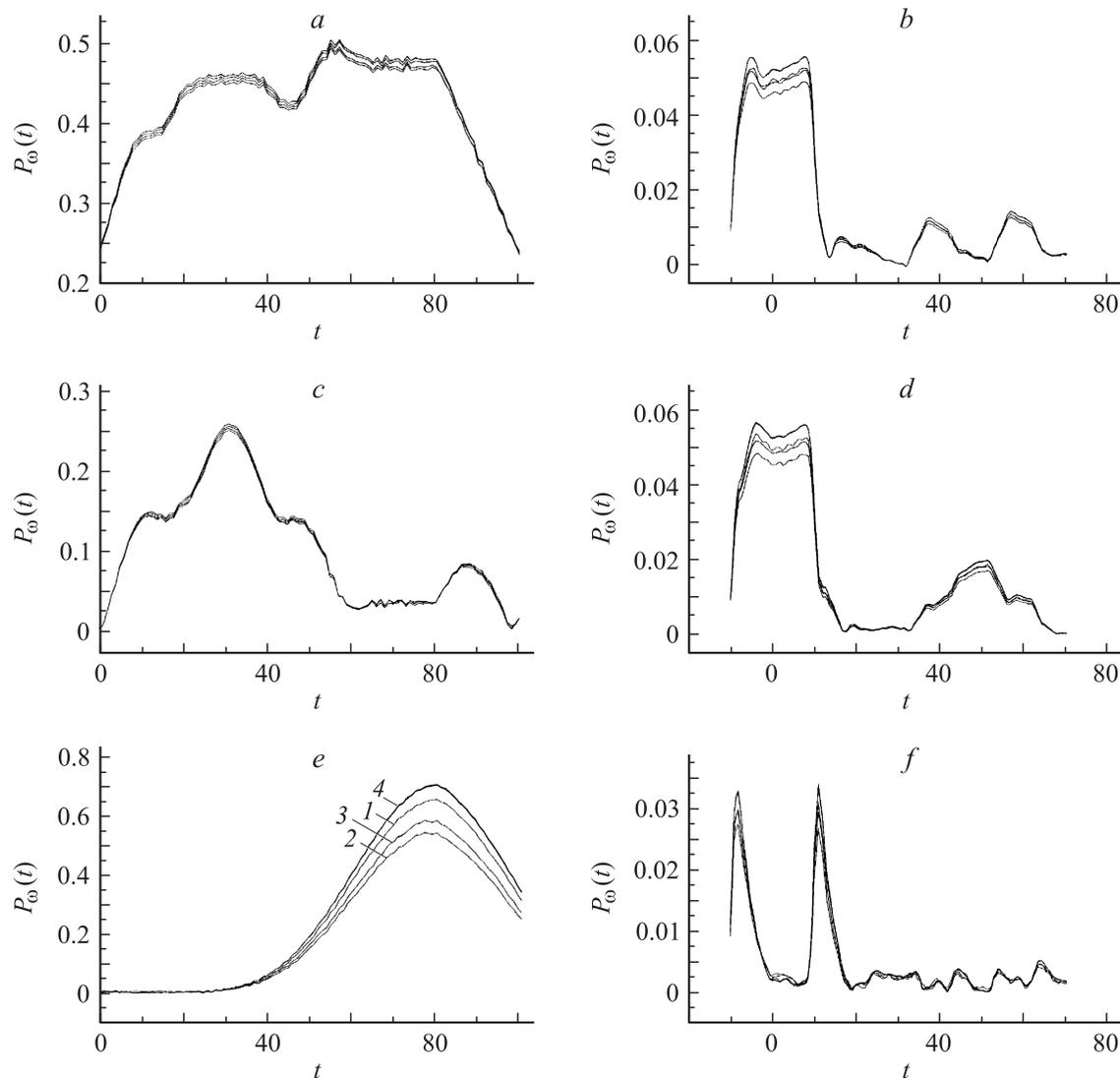


Рис. 7. Динамика спектральных амплитуд на трех частотах: ω_1 , ω_2 и ω_3 для модельного сигнала (*a, c, e*), реального сигнала (*b, d, f*). Кривая 1 соответствует спектру восстановленного сигнала рис. 4, *b, d*; 2 — рис. 5, *a, c*; 3 — рис. 5, *b, d*; 4 — рис. 3–5.

интерполяции измерений. Отметим, что они связаны именно с применением интерполяции, так как расположение отличается и от расположения ложных частот, обусловленных SVD-восстановлением, и от расположения ложных частот при аппроксимации сигнала сплайном. В проведенных расчетах было замечено, что максимумы этих частот находятся, как правило, в точках $2\pi i/T$, где i — целое число, T — размер окна в (4)

Сравнение времени счета для SVD-восстановления и сплайн-восстановления в зависимости от числа измерений

Число измерений	Время SVD-восстановления, s	Время сплайн-восстановления, s
500	65	0.06
250	29	0.04
125	12	0.02

или средний размер окна в (7) при наличии флуктуаций. При этом амплитуда флуктуаций влияет лишь на амплитуду ложных частот. Расположение максимумов также не зависит ни от величины сдвига окна, ни от способа интерполяции. Такое сгущение ложных частот в окрестности некоторых точек на спектральной оси и соответственно их отсутствие в остальной части спектра могут быть полезными для идентификации истинных частот. При необходимости можно реализовать отсутствие ложных частот в окрестности определенных точек спектра сигнала.

Результаты спектрального анализа на рассматриваемых частотах при различных флуктуациях измерительной системы оказались мало отличающимися от основного варианта без флуктуаций. Поэтому динамика спектральных амплитуд для рассмотренных вариантов, соответствующих рис. 3–5, изображена на одном рисунке (рис. 7). Большинство изображенных кривых почти

совпадают с кривыми, соответствующими эталонным на рис. 3, а, е. Наибольшее отклонение получается при интерполяции плоскостью по трем точкам и при улучшении этого способа интерполяции (рис. 5). Далее следует линейная интерполяция при флуктуации сдвигов (рис. 3). На рис. 7, е соответствующие кривые отмечены цифрами, а на остальных рисунках порядок следования кривых тот же.

Заключение

Предложено обобщение алгоритма SVD-восстановления сигнала и его спектра, позволяющее при однократной серии нерегулярных измерений интегральных характеристик ответа среды более точно и экономично, по сравнению с регулярными измерениями, производить восстановление сигнала и его спектральных характеристик. Обобщенный алгоритм позволяет при восстановлении одновременно учитывать различные виды нерегулярностей, такие как случайное изменение длины измерительного окна и(или) сдвига его центра. SVD-восстановление производилось как непосредственно по нерегулярным измерениям, так и после интерполяции интегральных характеристик в узлы регулярной сетки.

Предложен новый алгоритм восстановления сигнала и его спектра при нерегулярных измерениях, основанный на непосредственной сплайн-интерполяции неизвестного сигнала. Показана возможность практически точного восстановления сигнала и его спектра.

Проведенные расчеты показали высокую эффективность алгоритма непосредственного SVD-восстановления сигнала и его спектра по нерегулярным измерениям, его универсальность (независимость от вида нерегулярности). SVD-восстановление с интерполяцией интегральных измерений в узлы регулярной сетки демонстрирует высокое качество восстановления сигнала и его спектра при использовании кубической сплайн-интерполяции для нерегулярных сдвигов центра окна постоянной длины. При нерегулярной длине окна и постоянном сдвиге его центра к существенному улучшению качества восстановления в случае реального сигнала приводит последовательное применение сначала линейной интерполяции измерений в точки постоянной длины окна, а затем интерполяции сигнала сплайном, проведенным через них.

Список литературы

- [1] *Berry E., Boyle R.D., Fitzgerald A.J., Handley J.W.* // Computer Vision Beyond the Visible Spectrum, Series: Advances in Pattern Recognition / Ed. by B. Bhanu and I. Pavlidis. Springer-Verlag, 2005. P. 290–329.
- [2] *Smye S.W., Chamberlain J.M., Fitzgerald A.J., Berry E.* // Phys. Med. Biol. 2001. Vol. 46. P. R101–R112.
- [3] *Huber R., Tauser F., Brodschelm A., Bichler M., Abstreiter G., and Leitenstorfer A.* // Nature. 2001. Vol. 414. P. 286–289.

- [4] *Walker G.C., Berry E., Smye S.W., Zinovev N.N., Fitzgerald A.J., Miles R.E., Chamberlain M., and Smith M.A.* // Biol. Phys. 2003. Vol. 129. P. 141–148.
- [5] *Berry E.* // Biol. Phys. 2003. Vol. 129. P. 263–267.
- [6] *Прохоров А.С., Анзин В.Б., Витухновский Д.А.* // ЖЭТФ. 2006. Т. 130. Вып. 6 (12). С. 1027–1034.
- [7] *Fitzgerald A.J., Berry E., Miles R.E., Zinovev N.N., Smith M.A., and Chamberlain J.M.* // Phys. Med. Biol. 2002. Vol. 47. P. 3865–3873.
- [8] *Stringer M.R., Lund D.N., Foulds A.P., Uddin A., Berry E., Miles R.E., and Davies A.G.* // Phys. Med. Biol. 2005. Vol. 50 (14). P. 3211–3219.
- [9] *Reed S., Berry E., Foulds A.P., Stringer M.R., and Davies A.G.* // Proc. of Medical Image Understanding and Analysis. 2005. P. 131–134.
- [10] *Dudovich N., Oron D., and Silberberg Y.* // Nature. 2002. Vol. 418. P. 512–514.
- [11] *Cole B.E., Williams J.B., King B.T., Cherwin M.S., and Stanley C.R.* // Nature. 2001. Vol. 410. P. 60–63.
- [12] *Zandonella C.* // Nature. 2003. Vol. 424. P. 721–722.
- [13] *Cohen L.* // Proc. IEEE. 1989. Vol. 77. N 7. P. 941–981.
- [14] *Trofimov V.A., Safonov V.N.* // Technical Program and Abstracts of Int. Conf. ECLIM'04. Roma, Italy, 2004. P. 10.
- [15] *Сафонов В.Н., Трофимов В.А., Шкуринов А.П.* // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 4. С. 78–85.
- [16] *Чуи К.* Введение в вэйвлеты / Пер. с англ. Я.М. Жилейкина. М.: Мир, 2001. 406 с.
- [17] *Скрипов Д., Трофимов В.А.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 3. С. 69–74.
- [18] *Скрипов Д., Трофимов В.А.* // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 2. С. 77–82.
- [19] *Nazarov M.M., Mukina L.S., Shuvaev A.V., Sapozhnikov D.A., Shkurinov A.P., and Trofimov V.A.* // Laser Phys. Lett. 2005. Vol. 2. N 10. P. 471–475.
- [20] *Trofimov V.A., Varentsova S.A.*
<http://optics.sgu.ru/SFM-Files/2006/report/204>.
- [21] *Варенцова С.А., Трофимов В.А.* // ЖТФ. 2007. Т. 77. Вып. 5. С. 58–64.