

01;03

Нелинейные неосесимметричные осцилляции объемно заряженной струи

© А.И. Григорьев, Н.В. Воронина, С.О. Ширяева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 13 марта 2007 г. В окончательной редакции 12 октября 2007 г.)

Найдено аналитическое асимптотическое решение задачи о расчете нелинейных неосесимметричных осцилляций струи объемно заряженной диэлектрической жидкости с нулевой электропроводностью. Решение выписано с сохранением слагаемых второго порядка малости по амплитуде начальной деформации. Показано, что отличие амплитудных значений поправок второго порядка малости от аналогичных для струи идеально проводящей жидкости зависит от величины диэлектрической проницаемости жидкости и может достигать десятков процентов. От величины диэлектрической проницаемости жидкости зависят и положения внутренних нелинейных резонансов, в окрестности которых реализуется нелинейная перекачка энергии между модами.

PACS: 61.20.Gy, 47.10.A-

Введение

Исследование осцилляций и устойчивости по отношению к распаду на отдельные капли объемно электрически заряженных струй диэлектрической жидкости представляет интерес вследствие многочисленных приложений, связанных с получением потоков моно- и полидисперсных заряженных капель жидкостей с различными физико-химическими свойствами [1–3]. В целом ряде академических и технических приложений требуется получать потоки заряженных капель жидкости водорода или жидкого гелия [4–6] — веществ с весьма малым (по сравнению с большинством жидкостей, подвергающихся на практике электродиспергированию [7]) значением диэлектрической проницаемости. Это означает, что теоретические асимптотические аналитические исследования нелинейных осцилляций заряженных струй идеально проводящих жидкостей, проведенные в последнее время [8–13], не подходят для прогностического анализа осцилляций и дробления объемно заряженных струй обсуждаемых экзотических жидкостей. Следует также отметить то обстоятельство, что в экспериментальных исследованиях явления электродиспергирования жидкостей с различными физико-химическими свойствами обнаружено около десятка различных режимов электродиспергирования [3,14–16], причиной чего, в частности, может являться различие в электрофизических свойствах жидкостей. В связи со сказанным в настоящей работе найдено аналитическое асимптотическое решение задачи о нелинейных неосесимметричных осцилляциях струи объемно заряженной диэлектрической жидкости с нулевой электропроводностью и проведено сравнение с ранее решенной задачей [9,12] о нелинейных неосесимметричных осцилляциях поверхностно заряженной струи идеально проводящей жидкости.

Постановка задачи

Рассмотрим бесконечную цилиндрическую струю радиусом R идеальной несжимаемой диэлектрической жидкости с массовой плотностью ρ , диэлектрической проницаемостью ϵ_d и коэффициентом поверхностного натяжения γ , однородно объемно электрически заряженную с плотностью μ , движущуюся вдоль оси симметрии с постоянной скоростью U_0 . Все рассмотрение проведем в рамках модели „вмороженного“ электрического заряда в инерциальной системе отсчета, начало цилиндрической системы координат (r, φ, z) которой движется вместе со струей со скоростью $U_0 \parallel n_z$ вдоль оси симметрии невозмущенной струи, принимаемой в качестве оси z . Очевидно, что в выбранной системе отсчета поле скоростей течения жидкости в струе $U(r, t)$ полностью определяется возможными капиллярными осцилляциями ее поверхности (порождаемыми видом начальных условий) и при обезразмеривании на R, γ, ρ является параметром того же порядка малости, что и амплитуда осцилляций, которая принимается малой по сравнению с радиусом струи.

Будем исследовать закономерности реализации нелинейных осцилляций струи, полагая, что уравнение ее свободной поверхности, возмущенной капиллярным волновым движением, записывается в виде

$$r(\varphi, z, t) = R + \xi(\varphi, z, t); \quad |\xi| \ll R,$$

где $\xi(\varphi, z, t)$ — возмущение поверхности струи, вызванное ее осцилляциями.

Математическая формулировка обсуждаемой задачи в рамках модели потенциального течения состоит из уравнений гидродинамики и в предположении, что скорость движения жидкости много меньше релятивистской —

уравнений электростатики:

$$\Delta\Psi = 0; \quad \Delta\Phi_{\text{ex}} = 0; \quad \Delta\Phi_{\text{in}} = -4\pi \frac{\mu}{\varepsilon_d}; \quad (1)$$

условий ограниченности

$$r \rightarrow 0: \quad |\mathbf{U}| < \infty, \quad |\nabla\Phi_{\text{in}}| < \infty; \quad r \rightarrow \infty: \quad |\nabla\Phi_{\text{ex}}| \rightarrow 0; \quad (2)$$

гидродинамических граничных условий на свободной поверхности струи: кинематического

$$r = R + \xi: \quad -\frac{\partial\xi}{\partial t} + (\nabla\Psi)\nabla[r - (R + \xi(\varphi, z, t))] = 0; \quad (3)$$

динамического для нормальной компоненты тензора напряжений

$$r = R + \xi: \quad -P(\mathbf{r}, t) + P_0 + P_\gamma - P_q = 0 \quad (4)$$

и граничных условий для электрического поля

$$r = R + \xi: \quad \Phi_{\text{in}} = \Phi_{\text{ex}}, \quad \varepsilon_d \frac{\partial\Phi_{\text{in}}}{\partial n} = \frac{\partial\Phi_{\text{ex}}}{\partial n}. \quad (5)$$

В выписанной математической формулировке задачи

$$P(\mathbf{r}, t) = -\rho \left[\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla\Psi)^2 \right]$$

гидродинамическое давление, связанное с потенциальным движением жидкости; $P_q(\mathbf{r}, t)$ — давление электрического поля, $P_\gamma(\mathbf{r}, t) \equiv \gamma(\nabla \cdot \mathbf{n})$ — давление сил поверхностного натяжения; P_0 — постоянное давление внешней среды; $\Psi(\mathbf{r}, t)$ — потенциал поля скоростей; $\Phi(\mathbf{r}, t)$ — электростатический потенциал; нижние индексы „ex“ и „in“ характеризуют электрическое поле вне и внутри струи, соответственно; \mathbf{n} — орт нормали к свободной поверхности струи.

Данную краевую задачу следует дополнить условием сохранения объема участка струи, длина которого равна длине волны λ :

$$\int_V r \, dr \, d\varphi \, dt = \pi R^2 \lambda; \quad V = \begin{cases} 0 \leq r \leq R + \xi(\varphi, z, t); \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \\ z_0 \leq z \leq z_0 + \lambda. \end{cases} \quad (6)$$

Кроме того, необходимо задать начальные условия, первое из которых представляет собой начальную волновую деформацию свободной поверхности струи

$$r(\varphi, z, 0) = R + a [\xi^{(+)}(0) \exp(im\varphi) + \xi^{(-)}(0) \exp(im\varphi)] \exp(ikz) + O(\varepsilon^2).$$

Здесь и далее не выписываются слагаемые, комплексно сопряженные к выписанным; a — амплитуда волны. Для упрощения нижеследующих громоздких математических выкладок мы ограничили проводимое рассмотрение случаем, когда форма поперечного сечения струи определяется одной гармоникой. Второе начальное условие,

как это принято в задачах о нелинейных волнах [12,17], будет выбрано на финальной стадии решения таким образом, чтобы получающееся решение приняло наименее громоздкий вид.

Дальнейший анализ проведем в безразмерных переменных, полагая $R = \gamma = \rho = 1$ и сохраняя за всеми величинами их прежние обозначения.

Метод решения

Решение сформулированной задачи в рамках асимптотического подхода будем искать в виде разложений по малому параметру $\varepsilon \equiv (a/R)$, на основе метода многих масштабов [17] с точностью до второго порядка малости включительно. Искомые функции $\xi(\varphi, z, t)$, $\Psi(\mathbf{r}, t)$, $\Phi_{\text{in}}(\mathbf{r}, t)$ и $\Phi_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t)$ представим в виде асимптотических разложений по степеням ε , полагая в соответствии с идеей метода многих временных масштабов, что временная эволюция искомых функций определяется двумя временными масштабами — основным $T_0 = t$ и более медленным $T_1 = \varepsilon t$:

$$\begin{aligned} \xi(\varphi, z, t) &= \varepsilon \xi^{(1)}(\varphi, z, T_0, T_1) + \varepsilon^2 \xi^{(2)}(\varphi, z, T_0) + O(\varepsilon^3); \\ \Psi(\mathbf{r}, t) &= \varepsilon \Psi^{(1)}(r, \varphi, z, T_0, T_1) + \varepsilon^2 \Psi^{(2)}(r, \varphi, z, T_0) + O(\varepsilon^3); \\ \Phi_{\text{in}}(\mathbf{r}, t) &= \Phi_{\text{in}}^{(0)}(r) + \varepsilon \Phi_{\text{in}}^{(1)}(r, \varphi, z, T_0, T_1) \\ &\quad + \varepsilon^2 \Phi_{\text{in}}^{(2)}(r, \varphi, z, T_0) + O(\varepsilon^3); \\ \Phi_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t) &= \Phi_{\text{ex}}^{(0)}(r) + \varepsilon \Phi_{\text{ex}}^{(1)}(r, \varphi, z, T_0, T_1) \\ &\quad + \varepsilon^2 \Phi_{\text{ex}}^{(2)}(r, \varphi, z, T_0) + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (7)$$

Считая, что волны, распространяющиеся по поверхности струи, бегут в положительном направлении оси OZ , примем, что форма свободной поверхности струи в произвольный момент времени может быть записана в виде

$$r(\varphi, z, t) = 1 + \varepsilon [\xi^{(+)}(T_1) \exp(im\varphi) + \xi^{(-)}(T_1) \exp(-im\varphi)] \exp(i\vartheta) + O(\varepsilon^2); \quad (8)$$

$\vartheta \equiv kz - \omega T_0$, где $\omega \equiv \omega_m(k)$ — частота волны с волновым числом k и азимутальным числом m ; $\xi^{(\pm)}(T_1)$ — пока неизвестные комплексные функции, зависящие от медленного времени T_1 . Отметим также, что, согласно методу многих временных масштабов, оператор частной производной по времени принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \equiv \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1}.$$

Разделение задачи на порядки малости

Подстановка разложений (7) в уравнения (1)–(6) и разложение условий (3)–(6) в ряды Тейлора в окрестности равновесной цилиндрической поверхности $r = 1$ с последующим выделением и суммированием слагаемых при одинаковых степенях ε и приравниванием их нулю позволяет выписать задачи различных порядков малости.

Задача нулевого порядка малости

В нулевом приближении имеем равновесное состояние, которому соответствует неподвижный (в выбранной инерциальной системе отсчета) цилиндрический столб радиусом R , а также известное выражение для давления электрического поля на поверхность однородно объемно заряженного с плотностью μ бесконечного цилиндра фиксированного радиуса. Электрическое поле внутри и вне невозмущенного цилиндра определяется потенциалами

$$-\Phi_{\text{in}}^{(0)} = -\frac{\pi\mu r^2}{\varepsilon_d}; \quad \Phi_{\text{ex}}^{(0)} = -\frac{\pi\mu}{\varepsilon_d} - 2\pi\mu \ln r.$$

Задача первого порядка малости

Математическая формулировка задачи первого порядка малости имеет вид

$$\Delta\Psi^{(1)} = 0; \quad \Delta\Phi_{\text{ex}}^{(1)} = 0; \quad \Delta\Phi_{\text{in}}^{(1)} = 0;$$

$$r \rightarrow 0: \quad |\Psi^{(1)}| = \text{const}, \quad |\Phi_{\text{in}}^{(1)}| = \text{const};$$

$$r \rightarrow \infty: \quad |\nabla\Phi_{\text{ex}}^{(1)}| \rightarrow 0;$$

$$r = 1: \quad \frac{\partial\Psi^{(1)}}{\partial r} - \frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial T_0} = 0;$$

$$\Phi_{\text{in}}^{(1)} + \frac{d\Phi_{\text{in}}^{(0)}}{dr} \xi^{(1)} = \Phi_{\text{ex}}^{(1)} + \frac{d\Phi_{\text{ex}}^{(0)}}{dr} \xi^{(1)};$$

$$\varepsilon_d \left(\frac{d^2\Phi_{\text{in}}^{(0)}}{dr^2} \xi^{(1)} + \frac{\Phi_{\text{in}}^{(1)}}{dr} \right) = \frac{d^2\Phi_{\text{ex}}^{(0)}}{dr^2} \xi^{(1)} + \frac{\partial\Phi_{\text{ex}}^{(1)}}{\partial r};$$

$$- \left(\xi^{(1)} + \frac{\partial^2\xi^{(1)}}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\xi^{(1)}}{\partial z^2} \right) + \mu \left(\Phi_{\text{in}}^{(1)} + \frac{d\Phi_{\text{in}}^{(0)}}{dr} \xi^{(1)} \right)$$

$$+ \frac{\partial\Psi^{(1)}}{\partial T_0} - \frac{\varepsilon_d - 1}{4\pi\varepsilon_d} \frac{d\Phi_{\text{ex}}^{(0)}}{dr} \left(\frac{d^2\Phi_{\text{ex}}^{(0)}}{dr^2} \xi^{(1)} + \frac{\partial\Phi_{\text{ex}}^{(1)}}{\partial r} \right) = 0;$$

$$\int_{z_0}^{z_0+\lambda} \int_0^{2\pi} \xi^{(1)}(\varphi, z, t) d\varphi dz = 0.$$

Из (7), (8) для функции поправки первого порядка малости к профилю волны $\xi^{(1)}(\varphi, z, T_0, T_1)$ получим выражение

$$\xi^{(1)}(\varphi, z, T_0, T_1) = [\xi^{(+)}(T_1) \exp(im\varphi) + \xi^{(-)}(T_1) \exp(-im\varphi)] \exp(i\vartheta). \quad (9)$$

Явный вид функций $\xi^{(\pm)}(T_1)$ может быть определен лишь при анализе задач следующих порядков малости. Несложно убедиться, что функция $\xi^{(1)}$ в виде (9) удовлетворяет условию неизменности объема (6).

Поскольку поправки первого порядка малости к потенциалу поля скоростей $\Psi^{(1)}(\mathbf{r}, t)$ и электрическому потенциалу $\Phi_{\text{in}}^{(1)}(\mathbf{r}, t)$ и $\Phi_{\text{ex}}^{(1)}(\mathbf{r}, t)$ связаны с функцией $\xi^{(1)}$

граничными условиями на свободной поверхности струи, будем искать выражения для $\Psi^{(1)}(\mathbf{r}, t)$, $\Phi_{\text{in}}^{(1)}(\mathbf{r}, t)$ и $\Phi_{\text{ex}}^{(1)}(\mathbf{r}, t)$ в виде

$$\Psi^{(1)}(\mathbf{r}, T_0, T_1) = I_m(kr) [B^{(+)}(T_1) \exp(im\varphi) + B^{(-)}(T_1) \exp(-im\varphi)] \exp(i\vartheta);$$

$$\Phi_{\text{in}}^{(1)}(\mathbf{r}, T_0, T_1) = I_m(kr) [C^{(+)}(T_1) \exp(im\varphi) + C^{(-)}(T_1) \exp(-im\varphi)] \exp(i\vartheta);$$

$$\Phi_{\text{ex}}^{(1)}(\mathbf{r}, T_0, T_1) = K_m(kr) [D^{(+)}(T_1) \exp(im\varphi) + D^{(-)}(T_1) \exp(-im\varphi)] \exp(i\vartheta), \quad (10)$$

где зависимость поправок к потенциалам $\Psi^{(1)}$, $\Phi_{\text{in}}^{(1)}$ и $\Phi_{\text{ex}}^{(1)}$ от координаты r определяется из уравнений Лапласа и должна удовлетворять условиям ограниченности; $I_m(kr)$ и $K_m(kr)$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода. Подставив (10) и (9) в (3), (5) и приравняв коэффициенты при экспонентах с одинаковыми показателями, получим

$$B^{(\pm)}(T_1) = \frac{-i\omega\xi^{(\pm)}(T_1)}{kI'_m(k)}; \quad C^{(\pm)}(T_1) = \frac{2\pi\mu}{\varepsilon_d} g_{\text{in}} \frac{\xi^{(\pm)}(T_1)}{I_m(k)};$$

$$D^{(\pm)}(T_1) = 2\pi\mu g_{\text{ex}} \frac{\xi^{(\pm)}(T_1)}{K_m(k)};$$

$$g_{\text{in}} \equiv \frac{2\varepsilon_d + (\varepsilon_d - 1)H_m(k)}{\varepsilon_d G_m(k) - H_m(k)}; \quad g_{\text{ex}} \equiv \frac{2 + (\varepsilon_d - 1)G_m(k)}{\varepsilon_d G_m(k) - H_m(k)};$$

$$G_m(x) \equiv x I'_m(x)/I_m(x); \quad H_m(x) \equiv x K'_m(x)/K_m(x);$$

здесь штрихами обозначены производные функций Бесселя.

Таким образом, выражения для поправок первого порядка малости к потенциалу поля скоростей $\Psi^{(1)}$ и к электростатическим потенциалам $\Phi_{\text{in}}^{(1)}$ и $\Phi_{\text{ex}}^{(1)}$ имеют вид:

$$\Psi^{(1)}(\mathbf{r}, T_0, T_1) = -i\omega \frac{I_m(kr)}{kI'_m(k)} [\xi^{(+)}(T_1) \exp(im\varphi) + \xi^{(-)}(T_1) \exp(-im\varphi)] \exp(i\vartheta);$$

$$\Phi_{\text{in}}^{(1)}(\mathbf{r}, T_0, T_1) = \frac{2\pi\mu}{\varepsilon_d} g_{\text{in}} \frac{I_m(kr)}{I_m(k)} [\xi^{(+)}(T_1) \exp(im\varphi) + \xi^{(-)}(T_1) \exp(-im\varphi)] \exp(i\vartheta);$$

$$\Phi_{\text{ex}}^{(1)}(\mathbf{r}, T_0, T_1) = 2\pi\mu g_{\text{ex}} \frac{K_m(kr)}{K_m(k)} [\xi^{(+)}(T_1) \exp(im\varphi) + \xi^{(-)}(T_1) \exp(-im\varphi)] \exp(i\vartheta); \quad (11)$$

Из динамического граничного условия (4) после подстановки в него решений (9) и (11) можно получить дисперсионное уравнение, связывающее частоту колебаний

$\omega_m(k)$ с волновым числом k и азимутальным числом m , совпадающее с полученным в линейном анализе [18]:

$$\begin{aligned} \omega_m^2(k) &= \frac{G_m(k)}{\varepsilon_d f_m(k)} \left\{ (k^2 + m^1 - 1) \varepsilon_d f_m(k) \right. \\ &\quad + W [\varepsilon_d (4 + (\varepsilon_d - 3) G_m(k)) \\ &\quad \left. + (3\varepsilon_d - 1 + (\varepsilon_d - 1)^2 G_m(k)) H_m(k) \right\}; \\ f_m(x) &\equiv \varepsilon_d G_m(x) - H_m(x); \quad W = \pi \mu^2. \end{aligned} \quad (12)$$

В пределе $\varepsilon_d \rightarrow \infty$ и $\mu = 2\chi$, где χ — плотность поверхностного заряда струи электропроводящей жидкости, уравнение (12) сводится к дисперсионному уравнению для нелинейных осцилляций заряженной струи электропроводной жидкости, полученному в [19] (при таком переходе предполагается неизменным заряд, приходящийся на единицу длины струи).

Задача второго порядка малости

Математическая формулировка задачи второго порядка малости имеет вид

$$\Delta \Psi^{(2)} = 0; \quad \Delta \Phi_{\text{ex}}^{(2)} = 0; \quad \Delta \Phi_{\text{in}}^{(2)} = 0;$$

$$r \rightarrow 0: \quad |\Psi^{(2)}| = \text{const}, \quad |\Phi_{\text{in}}^{(2)}| = \text{const};$$

$$r \rightarrow \infty: \quad |\nabla \Phi_{\text{ex}}^{(2)}| \rightarrow 0;$$

$$\begin{aligned} r = 1: \quad \frac{\partial \Psi^{(2)}}{\partial r} - \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial T_0} &= \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial T_1} - \frac{\partial^2 \Psi^{(1)}}{\partial r^2} \xi^{(1)} \\ &\quad + \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial \varphi} \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial z}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Phi_{\text{in}}^{(2)} - \Phi_{\text{ex}}^{(2)} + \left(\frac{d\Phi_{\text{in}}^{(0)}}{dr} - \frac{d\Phi_{\text{ex}}^{(0)}}{dr} \right) \xi^{(2)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 \Phi_{\text{ex}}^{(0)}}{dr^2} - \frac{d^2 \Phi_{\text{in}}^{(0)}}{dr^2} \right) (\xi^{(1)})^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{\text{ex}}^{(1)}}{\partial r} - \frac{\partial \Phi_{\text{in}}^{(1)}}{\partial r} \right) \xi^{(1)}; \\ &\left(\varepsilon_d \frac{d^2 \Phi_{\text{in}}^{(0)}}{dr^2} - \frac{d^2 \Phi_{\text{ex}}^{(0)}}{dr^2} \right) \xi^{(2)} + \varepsilon_d \frac{\partial \Phi_{\text{in}}^{(2)}}{\partial r} - \frac{\partial \Phi_{\text{ex}}^{(2)}}{\partial r} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{d^3 \Phi_{\text{ex}}^{(0)}}{dr^3} - \varepsilon_d \frac{d^3 \Phi_{\text{in}}^{(0)}}{dr^3} \right) (\xi^{(1)})^2 \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 \Phi_{\text{ex}}^{(1)}}{\partial r^2} - \varepsilon_d \frac{\partial^2 \Phi_{\text{in}}^{(1)}}{\partial r^2} \right) \xi^{(1)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\varepsilon_d \frac{d\Phi_{\text{in}}^{(0)}}{dr} - \frac{d\Phi_{\text{ex}}^{(0)}}{dr} \right) \left[\left(\frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial z} \right)^2 \right] \\ &\quad + \left(\frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right) (\varepsilon_d \Phi_{\text{in}}^{(2)} - \Phi_{\text{ex}}^{(2)}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\xi^{(2)} + \frac{\partial^2 \xi^{(2)}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \xi^{(2)}}{\partial z^2} - \mu \left(\Phi_{\text{in}}^{(2)} + \frac{d\Phi_{\text{in}}^{(0)}}{dr} \xi^{(2)} \right) \\ &\quad + \frac{\varepsilon_d - 1}{4\pi \varepsilon_d} \frac{d\Phi_{\text{ex}}^{(0)}}{dr} \left(\frac{d^2 \Phi_{\text{ex}}^{(0)}}{dr^2} \xi^{(2)} + \frac{\partial \Phi_{\text{ex}}^{(2)}}{\partial r} \right) - \frac{\partial \Psi^{(2)}}{\partial T_0} \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \varphi} \right)^2 - \left(\frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial z} \right)^2 \right] + 2\xi^{(1)} \frac{\partial^2 \xi^{(1)}}{\partial \varphi^2} \\ &\quad + \mu \left(\frac{\partial \Phi_{\text{in}}^{(1)}}{\partial r} \xi^{(1)} + \frac{1}{2} \frac{d^2 \Phi_{\text{in}}^{(0)}}{dr^2} (\xi^{(1)})^2 \right) + (\xi^{(1)})^2 \\ &\quad - \frac{\varepsilon_d - 1}{8\pi \varepsilon_d} \left\{ \left(\frac{d^2 \Phi_{\text{ex}}^{(0)}}{dr^2} \xi^{(1)} + \frac{\partial \Phi_{\text{ex}}^{(1)}}{\partial r} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{d\Phi_{\text{ex}}^{(0)}}{dr} \left(\frac{\partial^2 \Phi_{\text{ex}}^{(1)}}{\partial r^2} \xi^{(1)} + \frac{1}{2} \frac{d^3 \Phi_{\text{ex}}^{(0)}}{dr^3} (\xi^{(1)})^2 \right) \right\} \\ &\quad - \frac{(\varepsilon_d - 1)^2}{8\pi \varepsilon_d} \frac{d\Phi_{\text{ex}}^{(0)}}{dr} \left\{ \left(\frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{d\Phi_{\text{ex}}^{(0)}}{dr} \xi^{(1)} + 2\Phi_{\text{ex}}^{(1)} \right) \right\} + \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial T_1} + \frac{\partial^2 \Psi^{(1)}}{\partial T_0 \partial r} \xi^{(1)} \\ &\quad - \frac{\varepsilon_d - 1}{8\pi} \left[\left(\frac{\partial \Phi_{\text{ex}}^{(1)}}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{\text{ex}}^{(1)}}{\partial z} \right)^2 \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial z} \right)^2 \right]; \\ &\quad \int_{z_0}^{z_0 + \lambda} \int_0^{2\pi} [\xi^{(2)} + 0.5(\xi^{(1)})^2] d\varphi dz = 0. \end{aligned}$$

Правые части граничных условий играют роль функций неоднородности и выражаются через ранее найденные решения нулевого и первого порядков малости. На основании вида неоднородностей, используя метод разделения переменных, поправки к решению второго порядка малости можно представить как

$$\begin{aligned} \xi^{(2)}(\mathbf{r}, t) &= [A_{22}^{(+)} \exp(i2m\varphi) + A_{22}^{(-)} \exp(-i2m\varphi) + A_{02}] \\ &\quad \times \exp(i2\vartheta) + A_{00} + [A_{11}^{(+)} \exp(im\varphi) + A_{11}^{(-)} \exp(-im\varphi)] \\ &\quad \times \exp(i\vartheta) + A_{20} \exp(i2m\varphi); \\ \Psi^{(2)}(\mathbf{r}, t) &= I_{2m}(2kr) [B_{22}^{(+)} \exp(i2m\varphi) + B_{22}^{(-)} \exp(-i2m\varphi)] \\ &\quad \times \exp(i2\vartheta) + I_0(2kr) B_{02} \exp(i2\vartheta) + r^{2m} B_{20} \exp(i2m\varphi) \\ &\quad + B_{00}(t) + I_m(kr) [B_{11}^{(+)} \exp(im\varphi) \\ &\quad + B_{11}^{(-)} \exp(-im\varphi)] \exp(i\vartheta); \\ \Phi_{\text{in}}^{(2)}(\mathbf{r}, t) &= I_{2m}(2kr) [C_{22}^{(+)} \exp(i2m\varphi) + C_{22}^{(-)} \exp(-i2m\varphi)] \\ &\quad \times \exp(i2\vartheta) + I_0(2kr) C_{02} \exp(i2\vartheta) + r^{2m} C_{20} \exp(i2m\varphi) \\ &\quad + I_m(kr) [C_{11}^{(+)} \exp(im\varphi) + C_{11}^{(-)} \exp(-im\varphi)] \exp(i\vartheta); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{ex}}^{(2)}(\mathbf{r}, t) = & K_{2m}(2kr) [D_{22}^{(+)} \exp(i2m\varphi) \\ & + D_{22}^{(-)} \exp(-i2m\varphi)] \exp(i2\vartheta) + K_0(2kr) D_{02} \\ & \times \exp(i2\vartheta) + r^{-2m} D_{20} \exp(i2m\varphi) + D_{00} \ln r \\ & + K_m(kr) [D_{11}^{(+)} \exp(im\varphi) + D_{11}^{(-)} \exp(-im\varphi)] \\ & \times \exp(i\vartheta) + f(t). \end{aligned} \quad (13)$$

После подстановки выражений (13) в граничные условия и приравнивания коэффициентов при экспонентах с одинаковыми показателями несложно получить систему уравнений для отыскания функций $A_{nl}^{(\pm)}$, $B_{nl}^{(\pm)}$, $C_{nl}^{(\pm)}$ и $D_{nl}^{(\pm)}$, $n, l = \{0, 2\}$. Решив эту систему уравнений, найдем зависимость $A_{nl}^{(\pm)}$ от комплексных амплитуд $\xi^{(\pm)}$, а также дифференциальное уравнение относительно $\xi^{(\pm)}$:

$$\partial \xi^{(\pm)} / \partial T_1 = 0; \quad A_{00} = -(|\xi^{(+)}|^2 + |\xi^{(-)}|^2) / 2; \quad A_{11}^{(\pm)} = 0;$$

$$A_{22}^{(\pm)} = a_1 (\xi^{(\pm)})^2; \quad A_{02} = a_2 2\xi^{(+)} \xi^{(-)}; \quad A_{20} = a_3 2\xi^{(+)} \overline{\xi^{(-)}}, \quad (14)$$

где черта обозначает комплексное сопряжение. Выражения для коэффициентов a_1 , a_2 и a_3 приведены в Приложении А. Из уравнения (14) следует, что комплексные амплитуды $\xi^{(\pm)}$, а следовательно и величины $A_{nl}^{(\pm)}$, $B_{nl}^{(\pm)}$, $C_{nl}^{(\pm)}$ и $D_{nl}^{(\pm)}$, не зависят от временного масштаба T_1 . Коэффициенты $B_{nl}^{(\pm)}$, $C_{nl}^{(\pm)}$ и $D_{nl}^{(\pm)}$, необходимые для определения поправок второго порядка малости к потенциалу поля скоростей и к электростатическим потенциалам внутри и вне струи соответственно, можно получить, зная a_i :

$$B_{22}^{(\pm)} = -ib_1 (\xi^{(\pm)})^2 = \frac{-i}{2k I'_{2m}(2k)} (2\omega a_1 - X_1) (\xi^{(\pm)})^2;$$

$$B_{00}(t) = 2b_0 T_0 A_{00};$$

$$B_{02} = -ib_2 2\xi^{(+)} \xi^{(-)} = \frac{-i}{2k I'_0(2k)} (2\omega a_2 - X_2) \xi^{(+)} \xi^{(-)};$$

$$B_{11}^{(\pm)} = B_{20} = 0;$$

$$C_{22}^{(\pm)} \equiv c_1 (\xi^{(\pm)})^2 = \frac{2\pi\mu}{\varepsilon_d I_{2m}(2k) f_{2m}(2k)}$$

$$\times \left\{ [2\varepsilon_d + (\varepsilon_d - 1)H_{2m}(2k)] a_1 - \varepsilon_d L - 2\varepsilon_d (k^2 + m^2)(g_{\text{in}} - g_{\text{ex}}) - H_{2m}(2k)M \right\} (\xi^{(\pm)})^2;$$

$$C_{02} \equiv c_2 2\xi^{(+)} \xi^{(-)} = \frac{2\pi\mu}{\varepsilon_d I_0(2k) f_0(2k)}$$

$$\times \left\{ [2\varepsilon_d + (\varepsilon_d - 1)H_0(2k)] a_2 - \varepsilon_d L - 2\varepsilon_d k^2 (g_{\text{in}} - g_{\text{ex}}) - H_0(2k)M \right\} 2\xi^{(+)} \xi^{(-)};$$

$$C_{20} \equiv c_3 2\xi^{(+)} \overline{\xi^{(-)}} = \frac{\pi\mu}{m\varepsilon_d (\varepsilon_d + 1)} \left\{ 2[\varepsilon_d - m(\varepsilon_d - 1)] a_3 - \varepsilon_d L - 2\varepsilon_d m^2 (g_{\text{in}} - g_{\text{ex}}) + 2mM \right\} 2\xi^{(+)} \overline{\xi^{(-)}}; \quad C_{11}^{(\pm)} = 0;$$

$$D_{22}^{(\pm)} \equiv d_1 (\xi^{(\pm)})^2 = \frac{2\pi\mu}{K_{2m}(2k) f_{2m}(2k)}$$

$$\times \left\{ [2 + (\varepsilon_d - 1)G_{2m}(2k)] a_1 - L - 2(k^2 + m^2)(g_{\text{in}} - g_{\text{ex}}) - G_{2m}(2k)M \right\} (\xi^{(\pm)})^2; \quad D_{11}^{(\pm)} = 0;$$

$$D_{02} \equiv d_2 2\xi^{(+)} \xi^{(-)} = \frac{2\pi\mu}{K_0(2k) f_0(2k)}$$

$$\times \left\{ [2 + (\varepsilon_d - 1)G_{2m}(2k)] a_2 - L - 2k^2 (g_{\text{in}} - g_{\text{ex}}) - G_0(2k)M \right\} 2\xi^{(+)} \xi^{(-)};$$

$$D_{00} = -4\pi\mu(1 + L)A_{00};$$

$$D_{20} \equiv d_3 2\xi^{(+)} \overline{\xi^{(-)}} = \frac{\pi\mu}{m(\varepsilon_d + 1)} \left\{ 2[1 + m(\varepsilon_d - 1)] a_3 - L - 2m^2 (g_{\text{in}} - g_{\text{ex}}) - 2mM \right\} 2\xi^{(+)} \overline{\xi^{(-)}};$$

$$f(t) = 4\pi\mu(1 - g_{\text{in}} G_m(k)/\varepsilon_d + g_{\text{ex}} H_m(k)) A_{00}; \quad (15)$$

$$L \equiv 1 - g_{\text{in}} G_m(k) + g_{\text{ex}} H_m(k);$$

$$M \equiv 0.5(\varepsilon_d + 1) - g_{\text{in}} G_m(k) + \varepsilon_d g_{\text{ex}} H_m(k).$$

Все вновь введенные обозначения представлены в Приложении.

Запись окончательных выражений

Форма свободной поверхности струи в произвольный момент времени с учетом выражений (8), (13) и (14) будет описываться соотношением

$$\begin{aligned} r(\varphi, z, t) = & 1 + \varepsilon \cos(m\varphi) \cos(kz - \omega t) + 0.25\varepsilon^2 \{-0.5 \\ & + [a_1 \cos(2m\varphi) + a_2] \cos[2(kz - \omega t)] + a_3 \cos(2m\varphi)\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Выражения для потенциалов электрического поля внутри и вне струи, а также для гидродинамического потенциала, выписанные с точностью до малых второго порядка включительно, с учетом (15) примут вид:

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{r}, t) = & \varepsilon \frac{\omega I_m(kr)}{k I'_m(k)} \cos(m\varphi) \sin(kz - \omega t) + 0.25\varepsilon^2 \{-b_0 t \\ & + [b_1 I_{2m}(2kr) \cos(2m\varphi) + b_2 I_0(2kr)] \sin[2(kz - \omega t)]\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{in}}(\mathbf{r}, t) = & -\frac{\pi\mu r^2}{\varepsilon_d} + \varepsilon \frac{2\pi\mu}{\varepsilon_d} g_{\text{in}} \frac{I_m(kr)}{I_m(k)} \cos(m\varphi) \\ & \times \cos(kz - \omega t) + 0.25\varepsilon^2 \{ [c_1 I_{2m}(2kr) \cos(2m\varphi) \\ & + c_2 I_0(2kr)] \cos[2(kz - \omega t)] + c_3 r^{2m} \cos(2m\varphi) \}; \end{aligned}$$

$$\Phi_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\pi\mu}{\varepsilon_d} - 2\pi\mu \ln r + \varepsilon 2\pi\mu g_{\text{ex}} \frac{K_m(kr)}{K_m(k)} \cos(m\varphi) \times \cos(kz - \omega t) + 0.25\varepsilon^2 \{ 2\pi\mu [-1 + g_{\text{in}} G_m(k)/\varepsilon_d - g_{\text{ex}} H_m(k) + (1+L) \ln r] + [d_1 K_{2m}(2kr) \cos(2m\varphi) + d_2 K_0(2kr)] \cos[2(kz - \omega t)] + d_3 r^{-2m} \cos(2m\varphi) \}. \quad (17)$$

При предельном переходе к идеально проводящей жидкости ($\varepsilon_d \rightarrow \infty$ и $\mu = 2\chi$, где χ — плотность поверхностного заряда струи электропроводной жидкости) амплитудные коэффициенты a_i , b_i и d_i в выражениях (16) и (17) сводятся к соответствующим коэффициентам в выражениях для потенциалов, полученных в [18] для случая электропроводной жидкости; коэффициенты c_i обращаются в нуль.

Обсуждение полученных результатов

На рис. 1–3 представлены зависимости от параметра W величин $\alpha_i \equiv a_i^d/a_i^c$ (отношения коэффициентов при нелинейных поправках в выражении для формы струи диэлектрической жидкости a_i^d к соответствующим коэффициентам при нелинейных поправках выражения для формы струи электропроводной жидкости a_i^c , аналитические выражения для которых можно найти в [9]), для различных значений азимутального числа m . Из приведенных рисунков видно, что зависимости коэффициентов a_i от параметра W заметно отличаются от таковых для идеально проводящей жидкости, причем для a_1 при $m = 2$ и 3 расхождение достигает 40 и 60% соответственно, а в прочих случаях составляет $\sim 10\%$.

Бросается в глаза то обстоятельство, что α_i различны для различных мод. Это означает, что в ситуации, когда начальная деформация струи определена не одной модой, а суперпозицией нескольких мод, что чаще всего и реализуется на практике, конкуренция между несколькими модами, одновременно претерпевающими неустойчивость [18,19], будет приводить к результату, зависящему при прочих равных условиях от электрофизических свойств жидкостей, подвергаемых электродиспергированию. Сравнение рис. 1, *a, b*; 1, *a, b* и 3, *a, b* показывает, что направление изменения коэффициентов при нелинейных поправках при переходе от идеально проводящей жидкости к идеально диэлектрической может быть различным: на рис. 1 значение соответствующих коэффициентов при этом увеличивается для обеих сравниваемых мод, на рис. 3 — уменьшаются, а на рис. 2 для $m = 1$ коэффициент α_2 увеличивается, а для $m = 2$ — уменьшается. Во всех случаях увеличение параметра W (возрастание заряда, приходящегося на единицу длины струи) приводит к повышению α_i .

Интересно, что во всех случаях возрастание абсолютной величины a_1 в несколько раз превышает соответствующее изменение значения коэффициентов a_2 и a_3 и даже в ситуации, когда коэффициенты a_2 и a_3

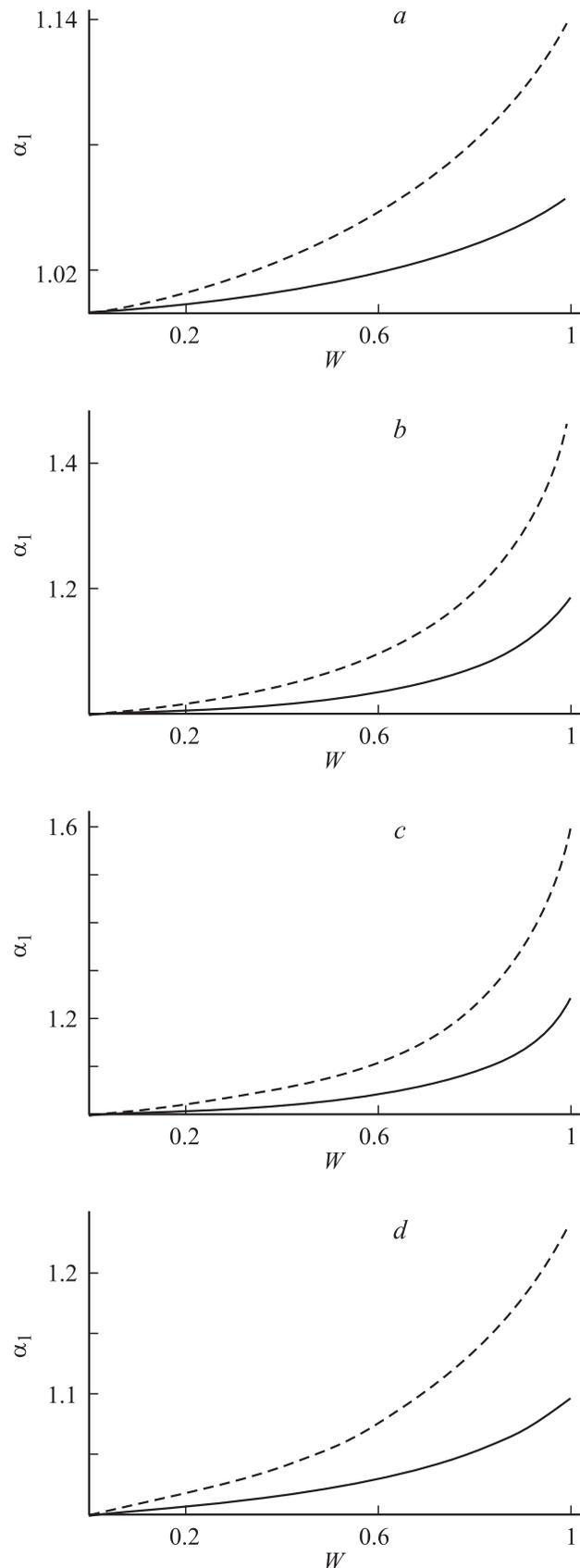


Рис. 1. Зависимости $\alpha_1 \equiv a_1^d/a_1^c$ от параметра W . Пунктир — данные для $\varepsilon_d = 30$, сплошная линия — для $\varepsilon_d = 80$: a — $m = 1$, b — 2 , c — 3 , d — 4 .

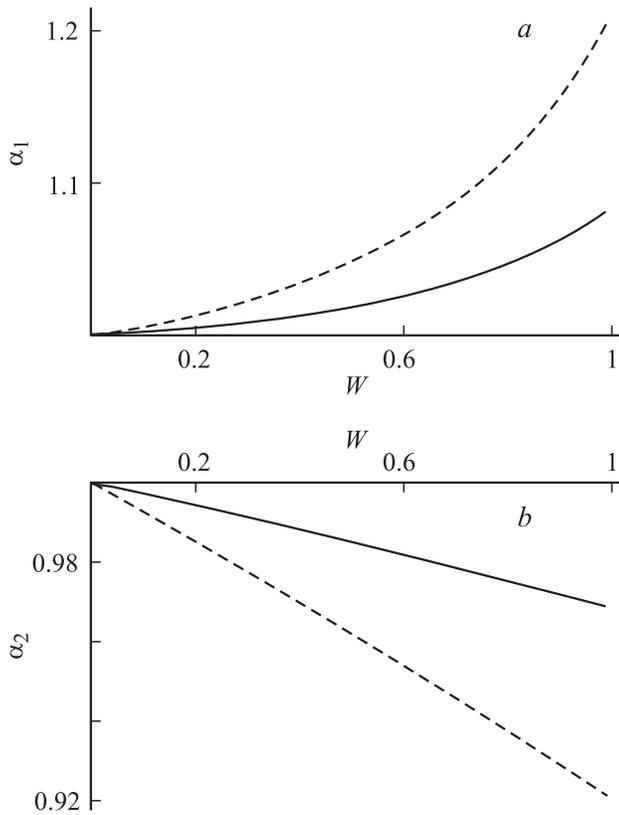


Рис. 2. То же, что на рис. 1, для $\alpha_2 \equiv \alpha_2^d/\alpha_2^c$: $a - m = 1$, $b - m = 2$.

уменьшаются, одновременное увеличение коэффициента a_1 приводит к росту суммарной амплитуды нелинейных поправок при переходе от идеально проводящей жидкости к диэлектрической. Таким образом, можно сделать вывод, что наличие объемного заряда в жидкости, подвергаемой электродиспергированию, приводит к возрастанию амплитуды волны с удвоенными и волновым и азимутальным числами, что в конечном итоге ведет к дестабилизации струи.

Интересно, также отметить, что разница между значениями коэффициентов при нелинейных поправках для диэлектрической и идеально проводящей жидкостями быстро увеличивается с уменьшением диэлектрической проницаемости жидкости, и для таких жидкостей, как жидкий водород или жидкий гелий, может стать весьма существенной.

Из выражений для коэффициентов a_j несложно видеть, что положения внутренних нелинейных резонансов, в окрестности которых происходит нелинейная перекачка энергии между модами, определяющееся условием обращения в нуль знаменателей a_j , для диэлектрической жидкости, формально имеет такой же вид, что и для идеально проводящей:

$$4\omega_m^2(k) = \omega_{2m}^2(2k).$$

Однако следует учитывать, что дисперсионное уравнение, из которого рассчитываются зависимости $\omega_m^2(k)$

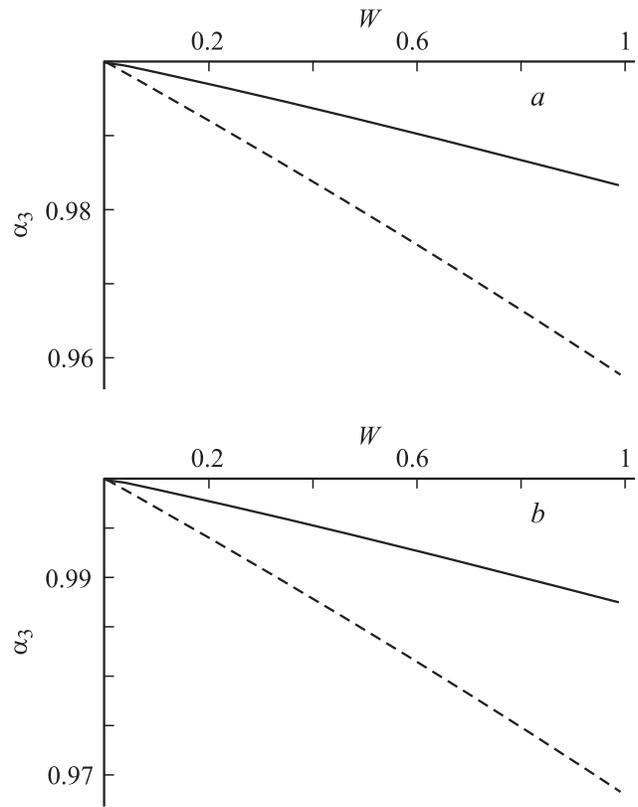


Рис. 3. То же, что на рис. 1, для $\alpha_3 \equiv \alpha_3^d/\alpha_3^c$: $a - m = 1$, $b - m = 2$.

и $\omega_{2m}^2(2k)$, в рассматриваемых ситуациях различаются, и при малых величинах диэлектрической проницаемости ϵ_d (например, для жидкого водорода или жидкого гелия) длины резонансных волн для диэлектрической жидкости и идеально проводящей могут значительно отличаться.

Заключение

С точностью до слагаемых второго порядка малости по амплитуде начальной деформации найдено аналитическое асимптотическое решение задачи о расчете нелинейных осцилляций однородно объемно заряженной струи идеальной несжимаемой жидкости. При сравнении с параметрами нелинейно осциллирующей заряженной струи идеально проводящей жидкости выяснилось, что при равных электрических зарядах, приходящихся на единицу длины струи, характеристики осцилляций струи диэлектрической жидкости с малыми диэлектрическими проницаемостями могут существенно (на десятки процентов) отличаться от таковых для струи идеально проводящей жидкости. Это обстоятельство может быть одним из факторов, объясняющих большое разнообразие экспериментально наблюдаемых режимов электродиспергирования жидкостей [7,15,16].

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 05-08-01147-а и 06-01-00066-а.

Приложение

Обозначения, использованные при записи решения второго порядка малости

$$a_1 \equiv P_1/Q_1; \quad Q_1 = -\varepsilon_d f_{2m}(2k) [4\omega_m^2(k) - \omega_{2m}^2(2k)];$$

$$P_1 = -(Y_1 G_{2m}(2k) + 2\omega X_1) \varepsilon_d f_{2m}(2k) + W G_{2m}(2k) \times \left\{ 2\varepsilon_d (L + H_{2m}(2k)) + 0.5(\varepsilon_d^2 - 1) G_{2m}(2k) H_{2m}(2k) + 2(k^2 + m^2)(g_{in} - g_{ex})(2\varepsilon_d + (\varepsilon_d - 1) H_{2m}(2k)) - g_{in} G_m(k) [\varepsilon_d + 1 + (\varepsilon_d - 1) G_{2m}(2k)] H_{2m}(2k) + g_{ex} H_m(k) [3\varepsilon_d - 1 + \varepsilon_d(\varepsilon_d - 1) G_{2m}(2k)] H_{2m}(2k) \right\};$$

$$a_2 \equiv P_2/Q_2; \quad Q_2 = -\varepsilon_d f_0(2k) [4\omega_m^2(k) - \omega_0^2(2k)];$$

$$P_2 = -(Y_2 G_0(2k) + 2\omega X_2) \varepsilon_d f_0(2k) + W G_0(2k) \times \left\{ 2\varepsilon_d (L + H_0(2k)) + 0.5(\varepsilon_d^2 - 1) G_0(2k) H_0(2k) + 2k^2 (g_{in} - g_{ex})(2\varepsilon_d + (\varepsilon_d - 1) H_0(2k)) - g_{in} G_m(k) [\varepsilon_d + 1 + (\varepsilon_d - 1) G_0(2k)] H_0(2k) + g_{ex} H_m(k) [3\varepsilon_d - 1 + \varepsilon_d(\varepsilon_d - 1) G_0(2k)] H_0(2k) \right\};$$

$$a_3 \equiv P_3/Q_3;$$

$$Q_3 = \varepsilon_d (1 + \varepsilon_d) (1 - 4m^2) m$$

$$+ W(2m - 1) [(\varepsilon_d - 1)^2 m + 2\varepsilon_d];$$

$$P_3 = m\varepsilon_d (1 + \varepsilon_d) Y_3 + W \left\{ m^2 (\varepsilon_d^2 - 1) + \varepsilon_d (2m - L) + 2m^2 (g_{in} - g_{ex})(\varepsilon_d (m - 1) - m) - g_{in} G_m(k) m (2 + (2m + 1)(\varepsilon_d - 1)) + g_{ex} H_m(k) m (3\varepsilon_d - 1 + 2m\varepsilon_d(\varepsilon_d - 1)) \right\};$$

$$b_0 \equiv Y_4 + 0.5 + \frac{W}{\varepsilon_d} [0.5(\varepsilon_d + 1) + (\varepsilon_d - 1)L];$$

$$X_1 = \omega_m(k) [2(k^2 + m^2) - G_m(k)] / G_m(k);$$

$$X_2 = \omega_m(k) [2k^2 - G_m(k)] / G_m(k);$$

$$Y_1 = 1 + 0.5(k^2 - 5m^2)$$

$$+ \omega_m^2(k) [k^2 + m^2 - 3G_m^2(k)] / 2G_m^2(k)$$

$$+ W(2g_{in} G_m(k) - 1) / \varepsilon_d$$

$$- \frac{\varepsilon_d - 1}{2\varepsilon_d} W [3 + k^2 + m^2 - 4g_{ex}(k^2 + m^2 - H_m(k))$$

$$+ g_{ex}^2 H_m^2(k) - \varepsilon_d (k^2 + m^2)(g_{ex} - 1)^2];$$

$$Y_2 = 1 + 0.5(k^2 - 3m^2)$$

$$+ \omega_m^2(k) [k^2 - m^2 - 3G_m^2(k)] / 2G_m^2(k)$$

$$+ W(2g_{in} G_m(k) - 1) / \varepsilon_d$$

$$- \frac{\varepsilon_d - 1}{2\varepsilon_d} W [3 + k^2 - m^2 - 4g_{ex}(k^2 - H_m(k))$$

$$+ g_{ex}^2 H_m^2(k) - \varepsilon_d (k^2 - m^2)(g_{ex} - 1)^2];$$

$$Y_3 = 1 - 0.5(k^2 + 5m^2)$$

$$+ \omega_m^2(k) [k^2 - m^2 - G_m^2(k)] / 2G_m^2(k)$$

$$+ W(2g_{in} G_m(k) - 1) / \varepsilon_d$$

$$- \frac{\varepsilon_d - 1}{2\varepsilon_d} W [3 - k^2 + m^2 - 4g_{ex}(m^2 - H_m(k))$$

$$+ g_{ex}^2 H_m^2(k) + \varepsilon_d (k^2 - m^2)(g_{ex} - 1)^2];$$

$$Y_4 = 1 - 0.5(k^2 + 3m^2)$$

$$+ \omega_m^2(k) [k^2 + m^2 - G_m^2(k)] / 2G_m^2(k)$$

$$+ W(2g_{in} G_m(k) - 1) / \varepsilon_d$$

$$- \frac{\varepsilon_d - 1}{2\varepsilon_d} W [3 - k^2 - m^2 - 4g_{ex} H_m(k)$$

$$+ g_{ex}^2 H_m^2(k) + \varepsilon_d (k^2 + m^2)(g_{ex} - 1)^2].$$

Список литературы

- [1] Ентов В.М., Ярин А.Л. Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа. М.: Изд-во ВИНТИ, 1984. Т. 17. С. 112–197.
- [2] Аметистов Е.В., Блаженков В.В., Городов А.К. и др. Монодиспергирование вещества: принципы и применение. М.: Энергоатомиздат, 1991. 336 с.
- [3] Григорьев А.И., Ширяева С.О., Воронина Н.В., Егорова Е.В. // ЭОМ. 2006. № 6. С. 23–34.
- [4] Kim K., Turnbull R. // J. Appl. Phys. 1976. Vol. 47. N 5. P. 1964–1969.
- [5] Woosley J.P., Turnbull R., Kim K. // J. Appl. Phys. 1988. Vol. 21. P. 4278–4284.
- [6] Pretzl K.P. // Particle World. 1990. Vol. 1. N 6. P. 153–162.
- [7] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Святченко А.А. Классификация режимов работы электрогидродинамических источников жидкокапельных пучков (обзор). Препринт ИМРАН № 25. Ярославль, 1993. 118 с.
- [8] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Левчук Т.В., Рыбакова М.В. // ЭОМ. 2003. № 1. С. 38–43.
- [9] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Левчук Т.В. // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 8. С. 6–14.
- [10] Григорьев А.И., Ширяева С.О., Егорова Е.В. // ЭОМ. 2005. № 1. С. 42–50.
- [11] Ширяева С.О., Воронина Н.В., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 9. С. 31–41.

- [12] Белоножко Д.Ф., Ширяева С.О., Григорьев А.И. Нелинейные волны на заряженной поверхности жидкости. Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 2006. 288 с.
- [13] Ширяева С.О., Воронина Н.В., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2007. Т. 77. Вып. 2. С. 46–55.
- [14] Cloupeau M., Prunet Foch B. // J. Electrostatics. 1990. Vol. 25. P. 165–184.
- [15] Shiryayeva S.O., Grigor'ev A.I. // J. Electrostatics. 1995. Vol. 34. P. 51–59.
- [16] Jaworek A., Krupa A. // J. Aerosol. Sci. 1999. Vol. 30. N 7. P. 873–893.
- [17] Nayfeh F.H. // Phys. Fluids. 1970. N 4. P. 841–847.
- [18] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Левчук Т.В. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 11. С. 22–30.
- [19] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Левчук Т.В., Рыбакова М.В. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 4. С. 5–12.