01;04

К теории нелинейного отклика в неидеальной плазме

© Г.А. Павлов

Институт проблем химической физики РАН,
142432 Черноголовка, Московская область, Россия
e-mail: pavlov@icp.ac.ru

(Поступило в Редакцию 7 августа 2007 г.)

Развита теория нелинейного отклика для изучения нелинейных явлений и нелинейных транспортных процессов в неидеальных кулоновских системах. На основе теории нелинейного отклика на механические возмущения исследованы временно́е плазменное эхо и преобразование волн в неидеальной кулоновской системе. Рассмотрены общие ограничения на нелинейные функции реакции. Сформулирована модель для определения квадратичных функций реакции. Найдены условия реализации временного плазменного эха и преобразования волн. Показано, что данные нелинейные явления в неидеальной плазме могут быть инициированы ультракороткими импульсами поля.

Разработана теория переноса для определения барнеттовских транспортных свойств неидеальной многоэлементной плазмы. Предложена процедура сравнения феноменологических уравнений сохранения заряженной сплошной среды и уравнений движения для операторов соответствующих динамических переменных. Алгоритм Мори использован для вывода уравнений движения операторов динамических переменных в форме обобщенных уравнений Ланжевена. Подробно рассмотрено линеаризованное барнеттовское приближение. Обсуждаются свойства матрицы коэффициентов при старших производных в системе уравнений сохранения в линеаризованном барнеттовском приближении, существенные для гидродинамических приложений. Сопоставлены различные варианты теории нелинейного отклика.

PACS: 52.35.Mw, 52.25.Fi

Введение

Необходимость в изучении нелинейных явлений и нелинейных переносных процессов в неидеальных кулоновских системах (т. е. системах заряженных частиц с межчастичным взаимодействием порядка температуры) с помощью теории нелинейного отклика возникла в связи с отсутствием исследований в данной области. В работе обсуждаются варианты теории нелинейного отклика на механические и термические возмущения. Механические возмущения системы являются результатом действия внешних полей, соответствующий вариант теории отклика описывает нелинейные явления. При этом полный гамильтониан системы с учетом внешнего возмущения представляет собой сумму гамильтониана невозмущенной системы и гамильтониана взаимодействия системы частиц с внешним полем. Термические возмущения (возмущения температуры, массовой скорости, среднее поле в среде и т. п.) не допускают такого представления. Вариант теории отклика на термические возмущения, позволяющий описать соответствующие процессы переноса, развит в настоящей работе. Как известно, нелинейное взаимодействие волн, нелинейное взаимодействие волн со средой, оптико-акустические эффекты, эховые явления и т. п. интенсивно изучались теоретически и экспериментально для плазмы и электронного газа со слабым межчастичным взаимодействием (см., например, [1,2]). Теоретическое исследование перечисленных явлений, как правило, базировалось на кинетических уравнениях Власова, Ландау или на соответствующих квантово-механических приближениях.

В то же время нелинейная реакция неидеальной заряженной системы на электрическое поле лишь недавно была рассмотрена в работе [3], хотя данная проблема достаточно важна. Явления, определяющиеся продольной реакцией неидеальной заряженной системы (временное плазменное эхо и преобразование волн), изучены ниже. С этой целью предложен модельный подход, использующий результаты теории отклика, так как применение кинетических уравнений в данном случае некорректно, а последовательный анализ невозможен из-за сильного межчастичного взаимодействия. Подход основан на ряде точных соотношений для нелинейных функций реакции, флуктуационно-диссипативной теореме и т. п., полученных с помощью теории нелинейного отклика, и на результатах соответствующего анализа для плазмы и электронного газа со слабым межчастичным взаимодействием. При расчетах по модели использованы данные численных экспериментов по линейным характеристикам двухкомпонентной кулоновской системы (см., например, [4]). Найдены условия реализации упомянутых нелинейных явлений в неидеальной плазме, которая может быть получена в эксперименте.

Теория отклика на термические возмущения для определения барнеттовских коэффициентов переноса неидеальной многоэлементной плазмы развита в п. 2. Этот подход может использоваться и для других сплошных заряженных сред: одно- и двухкомпонентных кулоновских систем, электролитов, жидких металлов, ядерной материи, а также для плотных нейтральных сред. Переносные процессы в барнеттовском приближении определяют, как известно, следующие гидродинамические явления: распространение звука, структуру слабых ударных волн, термоконвекцию и т. д. Для вычисления барнеттовских транспортных коэффициентов в случае сред со слабым межчастичным взаимодействием (газа или плазмы) применяется кинетическое уравнение Больцмана и хорошо известный метод Чепмена–Энскога [5,6]. В то же время проблема определения барнеттовских коэффициентов переноса для неидеальных сред до сих пор не решена. Для таких сред развиты приближения лишь для линейных соотношений переноса (см., например, [7]). Ниже использован подход (ср. с [8]), который заключается в сравнении феноменологических уравнений сохранения заряженной сплошной среды и уравнений движения для операторов соответствующих динамических переменных. При выводе уравнений движения операторов динамических переменных в форме обобщенных уравнений Ланжевена использован алгоритм Мори. Подробно рассмотрено линеаризованное барнеттовское приближение. Обсуждаются свойства матрицы коэффициентов при старших производных в системе уравнений сохранения в линеаризованном барнеттовском приближении, существенные для гидродинамических приложений. Заметим, что в данном подходе информация о формах уравнений сохранения и потоков массы, тепла, импульса и заряда определяет микроскопические выражения для транспортных коэффициентов в потоках.

1. Явления нелинейного отклика в неидеальной кулоновской системе

Временное плазменное эхо характеризуется следующим качественным механизмом (см., например, [2]). Пусть электрическое поле $\sim \exp(-ik_1x)$ помещено в плазму, и соответствующие колебания затухают. Поле возмущает остаточные колебания электронной функции распределения $f_1(v)\exp(-ik_1x + ik_1vt)$. Для достаточно больших времен t эти колебания не создают электрического поля, так как интеграл по скорости исчезает из-за осцилляций. Если через время τ поле $\sim \exp(ik_2x)$ вновь поместить в плазму, то оно затухнет и сохранится возмущение первого порядка электронной функции распределения $f_2(v)\exp[ik_2x - ik_2v(t-\tau)]$. Но возникнут возмущения второго порядка в виде $f_1(v)f_2(v)\exp[i(k_2-k_1)x + ik_2v\tau - i(k_2-k_1)vt]$ из-за остаточных колебаний электронной функции распределения от первой волны. В последней экспоненте коэффициент при скорости v исчезнет при $t = \tau k_2/(k_2-k_1)$, поэтому интеграл по скорости в данном случае конечен, и электрическое поле вновь появится в плазме. Если время τ больше времени затухания колебаний и $k_2/(k_2-k_1)$ порядка единицы, то третье поле появится позже затухания первых двух. В таком случае говорят о возникновении плазменного эха. Заметим, что в слабонеидеальной плазме затухание Ландау более существенно, чем столкновительное, но в плотной плазме может реализоваться обратная ситуация (ср. с [2]).

Рассмотрим строгое определение временнóго эха в неидеальной кулоновской системе. Несмотря на то что качественный анализ эха выполнен в терминах электроной функции распределения, количественный анализ данного явления второго порядка следует провести в рамках теории нелинейного отклика. Сформулируем, следуя Кубо, вариант нелинейной теории отклика на механические возмущения, для того чтобы описать временнóе плазменное эхо. Выпишем квантовое уравнение Лиувилля для матрицы плотности $\rho(t)$ (см., например, [7])

$$i\hbar\frac{\partial\rho}{\partial t} = \left[H + H^{\text{ext}}, \rho\right]; \qquad \rho|_{t\to-\infty} = \rho_0,$$

где $\hbar$ — константа Планка; $\rho_0 = e^{\beta H}$ — невозмущенная матрица плотности; H — гамильтониан системы, $\beta = 1/k_BT$; T — температура; k_B — константа Больцмана, H^{ext} — малая добавка к гамильтониану из-за внешнего возмущения; [.,.] означает коммутатор. Для общности положим

$$H^{\text{ext}} = -\sum_j \int d\mathbf{r} B_j(\mathbf{r}) b_j^{\text{ext}}(\mathbf{r}, t),$$

где оператор $B(\mathbf{r})$ соответствует некоторому наблюдаемому свойству системы (например, плотности заряда); $b^{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)$ — обобщенная внешняя сила (например, потенциал внешнего заряда). Уравнение Лиувилля имеет следующее решение:

$$\rho(t) = \rho_0 + \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-iH(t-t')}\,\frac{1}{i\hbar}\left[H^{\text{ext}}, \rho\right] e^{iH(t-t')/\hbar} dt'$$

или в итерациях

$$\rho(t) = \rho_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(i\hbar)^n} \int\limits_{-\infty}^{t} dt_1 \int\limits_{-\infty}^{t_1} dt_2 \ldots \int\limits_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n e^{-iHt/\hbar}$$
$$\times \Big[H^{\text{ext}}(t_1)\big[H^{\text{ext}}(t_2)\ldots[H^{\text{ext}}(t_n), \rho_0]\ldots\big]e^{iHt}\Big];$$
$$H^{\text{ext}}(t) = e^{iHt/\hbar} H^{\text{ext}} e^{-iHt/\hbar}.$$

Отклик системы на внешнее возмущение имеет вид

$$\langle B\rangle = \langle B\rangle_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(i\hbar)^n} \int\limits_{-\infty}^{t} \int\limits_{-\infty}^{t_1} \ldots \int\limits_{-\infty}^{t_{n-1}} Tr\Big\{B(\mathbf{r}, t)$$
$$\times \Big[H_{t_1}^{\text{ext}}(t_1)\big[H_{t_2}^{\text{ext}}(t_2)\ldots[H_{t_n}^{\text{ext}}(t_n), \rho_0]\ldots\big]\Big]\Big\} dt_1 \ldots dt_n.$$

Здесь $\langle\ldots\rangle$, $\langle\ldots\rangle_0$ — усреднение по матрице плотности ρ и по невозмущенной матрице плотности ρ_0 соответственно. Квадратичный отклик есть

$$\langle B\rangle^{(2)} = \frac{1}{(i\hbar)^2}$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{t}\int\limits_{-\infty}^{t_1} Tr\Big\{B(\mathbf{r},t)\big[H^{\text{ext}}_{t_1}(t_1)[H^{\text{ext}}_{t_2}(t_2),\rho_0]\big]\Big\}dt_1dt_2;$$

$$\langle B_i\rangle^{(2)} = \sum_{j,k}\int\limits_{-\infty}^{t}\int\limits_{-\infty}^{t_1}\hat{\chi}^{(2)}_{ijk}(t-t_1,t-t_2;\mathbf{r}-\mathbf{r}_1,\mathbf{r}-\mathbf{r}_2)$$

$$\times\, b^{\text{ext}}_j(\mathbf{r}_1,t_1)b^{\text{ext}}_k(\mathbf{r}_2,t_2)dt_1dt_2d\mathbf{r}_1d\mathbf{r}_2.$$

Здесь $B(\mathbf{r},t)$ — оператор в представлении Гейзенберга. Для того чтобы описать эхо, необходимо использовать физическое определение данного явления. Временно́е плазменное эхо в неидеальной кулоновской системе определяется квадратичным откликом $\mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{r},t)$. Определение последнего следует из известных соотношений ($\mathbf{D}$ — внешнее поле)

$$\mathbf{D} = \varepsilon\big(\mathbf{E}^{(1)} + \mathbf{E}^{(2)} + \ldots\big) + \tilde{\chi}^{(2)}\big(\mathbf{E}^{(1)} + \mathbf{E}^{(2)} + \ldots\big)$$

$$\times\big(\mathbf{E}^{(1)} + \mathbf{E}^{(2)} + \ldots\big) + \ldots,$$

$$\varepsilon\mathbf{E}^{(2)} = -\tilde{\chi}^{(2)}\mathbf{E}^{(1)}\mathbf{E}^{(1)}.$$

Поэтому точное выражение для фурье-образа квадратичного отклика $E^{(2)}(\mathbf{r},t)$ неидеальной кулоновской системы с использованием уравнения Пуассона имеет вид (см., например, [9])

$$E^{(2)}(\mathbf{k},\omega) = -\frac{1}{\varepsilon^L(\mathbf{k},\omega)}\int\frac{d\omega'}{2\pi}\frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}$$

$$\times\,\chi^{(2)}\big(\omega-\omega',\mathbf{k}-\mathbf{k}';\omega',\mathbf{k}'\big)E^{(1)}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}',\omega-\omega'}E^{(1)}_{\mathbf{k}',\omega'}, \qquad (1)$$

$$E^{(1)}(k,\omega) = -\frac{i4\pi}{k}\frac{\rho^{(0)}(k,\omega)}{\varepsilon^L(k,\omega)}.$$

Здесь $E^{(1)}$ — среднее поле в среде, ε^L — продольная диэлектрическая проницаемость, $\chi^{(2)}$ — квадратичная поляризуемость, связанная с продольной квадратичной функцией реакции заряд–заряд, $\mathbf{k} = \mathbf{k}' + \mathbf{k}''$, $\omega = \omega' + \omega''$. Плотность внешнего заряда $\rho^{(0)}$ имеет вид [2]

$$\rho^{(0)}(\mathbf{r},t) = \rho_{(1)}e^{i\mathbf{k}_1\mathbf{r}}\delta(\omega_0 t) + \rho_{(2)}e^{i\mathbf{k}_2\mathbf{r}}\delta\big[\omega_0(t-\tau)\big], \qquad (2)$$

что соответствует появлению внешних зарядов с амплитудами $\rho_{(1)}$ и $\rho_{(2)}$ в среде с временны́м интервалом $\tau > 1/\gamma$ (γ — декремент затухания лэнгмюровской волны, ω_0 — константа).

Используя определение $E^{(1)}$, перепишем соотношение для $E^{(2)}$ через функцию реакции $\hat{\chi}^{(2)}$

$$\hat{\chi}^{(2)}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2;\omega_1,\omega_2) = \chi^{(2)}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2;\omega_1,\omega_2)$$

$$\times\big[\varepsilon^L(\mathbf{k},\omega)\varepsilon^L(\mathbf{k}_1,\omega_1)\varepsilon^L(\mathbf{k}_2,\omega_2)\big]^{-1}.$$

Таблица 1. Параметры временно́го плазменного эха для кулоновских систем ($k_1a = 0.155$; $k_2a = 0.3$; $\Gamma = e^2/aT$, $r_s = a/a_0$, $a_0 = \hbar^2/me^2$, $a = (3/4\pi n)^{1/3}$, $v^{ab}(r) = z_az_b(e^2/r)\big(1-\exp(-r/\lambda_{ab}\big)$, $\lambda_{ab} = \hbar(2\pi\mu_{ab}T)^{-1/2}$)

Γ	r_s	T, eV	n, cm^{-3}	ν/ω_p	ω_k/ω_p	γ_k/ω_p
2	1	13.6	$1.61\cdot10^{24}$	0.007	1.2	0.011
0.5	1	54.5	$1.61\cdot10^{24}$	0.01	1.3	0.035
0.5	0.4	136	$2.52\cdot10^{25}$	0.02	1.27	0.04

Таблица 2. Параметры преобразования волн для кулоновских систем ($ka = 0.3$; определения из табл. 1)

Γ	r_s	T, eV	n, cm^{-3}	E_0, V/cm	$\tilde{\gamma}/\omega_p$	γ_k/ω_p
2	1	13.6	$1.61\cdot10^{24}$	10^8	0.01	0.03
0.5	1	54.5	$1.61\cdot10^{24}$	10^9	0.05	0.12
0.5	0.4	136	$2.52\cdot10^{25}$	10^{11}	1	0.12

Данная функция реакции описывает квадратичный отклик на внешнее поле $\mathbf{D}$, поэтому функция $\hat{\chi}^{(2)}$ может быть непосредственно определена с помощью нелинейной теории отклика. Используя определение $\langle B_i\rangle^{(2)}$, уравнение Пуассона и H^{ext} в форме ($\varphi^{(0)}$, ρ_i — внешний потенциал и плотность заряда в среде; η — малая положительная постоянная, обеспечивающая адиабатичность возмущения)

$$H^{\text{ext}} = \sum_i\int dr\rho_i(\mathbf{r})\varphi^{(0)}(\mathbf{r},t)e^{\eta t},$$

микроскопическое выражение для квадратичной функции реакции $\hat{\chi}^{(2)}$ можно легко найти (см., например, [10,11]).

Несмотря на определение временно́го плазменного эха через функции реакции $\chi^{(2)}$ и $\hat{\chi}^{(2)}$, последовательное вычисление этих функций (и других нелинейных функций реакции) классических и квантовых неидеальных кулоновских систем практически невозможно. Данная трудность возникает в первую очередь из-за неприменимости теории возмущений (вследствие отсутствия малого параметра, $\Gamma \sim 1$, см. табл. 1, 2). Компьютерное моделирование нелинейных функций реакции также не проведено (в противоположность линейным функциям реакции [4]). Вследствие этого модельные подходы приобретают особое значение. Важную роль при построении модельных приближений играют ограничения на величину нелинейных функций реакции, которые касаются их аналитических свойств, областей существования и т.п.

Модельный подход, предложенный и использованный в данной работе, заключается в следующем. Рассмотрены явные аппроксимации функций реакции (и временны́х корреляционных функций) с несколькими подгоночными параметрами. Естественно, что формы аппроксимаций определяются, в частности, физическими соображениями. Определение параметров проводится с помощью известных частотных моментов функций реакции (и временны́х корреляционных функций) и, при необходимости, — других точных соотношений (правил сумм) для данных функций. Частотные моменты и правила сумм являются по-существу термодинамическими характеристиками неидеальных кулоновских систем, поэтому информация о данных характеристиках является относительно полной.

Рассмотрим частотные моменты функций реакции. Частотные моменты и правила сумм для $\hat{\chi}^{(2)}$ непосредственно определяются при использовании флуктуационно-диссипативной теоремы [10,11]. Но описание временного плазменного эха и преобразования волн удобно проводить, используя функцию $\hat{\chi}^{(2)}$. Поэтому, основываясь на соотношении между $\chi^{(2)}$ и $\hat{\chi}^{(2)}$, после преобразований определим зависимости между частотными моментами данных функций реакции [3]

$$\chi_l^1 = \hat{\chi}_l, \quad \chi_l^3 = \hat{\chi}_l^3 - 4\hat{\omega}_l^0\hat{\chi}_l^1,$$

$$\chi_l^5 = \hat{\chi}_l^5 - 4\hat{\omega}_l^0\hat{\chi}_l^3 - 4\hat{\omega}_l^2\hat{\chi}_l^1 + 16(\hat{\omega}_l^0)^2\hat{\chi}_l^1 \text{ и т.д.,}$$

$$\chi_l'' = \int \omega_1''\mathrm{Re}\chi^{(2)}(\mathbf{k}_1, \omega_1; \mathbf{k}_2, \omega_2)d\omega,$$

$$\hat{\chi}_l^n = \int \omega_1^n\mathrm{Re}\hat{\chi}^{(2)}(\mathbf{k}_1, \omega_1; \mathbf{k}_2, \omega_2)d\omega_1,$$

$$\hat{\omega}_l^n = \int \omega^n\mathrm{Re}\hat{\sigma}^l(\mathbf{k}, \omega)d\omega. \tag{3}$$

Здесь $\mathrm{Re}\chi^{(2)}$, $\mathrm{Re}\hat{\chi}^{(2)}$ представляют собой нечетные функции ω_1 (при $\omega_2 \to \infty$), связанные с соответствующими мнимыми частями соотношениями Крамерса–Кронига. Внешняя продольная электропроводность среды — $\hat{\sigma}^l$, частотные моменты ее действительной части известны (см., например, [7]). Частотные моменты (3) целесообразно использовать для определения $\chi^{(2)}$ по результатам классической проблемы моментов [12].

Другой набор частотных моментов для $\chi^{(2)}$, который определяет данную функцию (т. е. подгоночные параметры в аппроксимации) согласно предложенной модели, можно получить из соотношения [13] (T — температура в энергетических единицах, e — электронный заряд)

$$\int d\omega_2\mathrm{Im}\left[\frac{\chi^{(2)}(\mathbf{k}_1, \omega_1; \mathbf{k}_2, \omega_2)}{\omega_1\omega_2} - \frac{\chi^{(2)}(\mathbf{k}, \omega; -\mathbf{k}_1, -\omega_1)}{\omega\omega_1}\right.$$
$$\left. - \frac{\chi^{(2)}(\mathbf{k}, \omega; -\mathbf{k}_2, -\omega_2)}{\omega\omega_2}\right] = \pi\frac{e}{T}\frac{\mathrm{Im}\varepsilon^L(\mathbf{k}_1, \omega_1)}{\omega_1}\frac{k_1}{kk_2}, \tag{4}$$

частотных моментов $\mathrm{Im}\varepsilon^L$ ($\varepsilon^L = 1 + i4\pi\sigma^L/\omega$, σ^L — истинная продольная электропроводность, частотные моменты которой известны [7]) и свойств этих функций. Кроме того, имеют место следующие соотношения [9] (ω_p — плазменная частота, m — масса электрона)

$$\int \omega_1\mathrm{Re}\chi^{(2)}(\mathbf{k}_1, \omega_1; \mathbf{k}_2, \omega_2 \to \infty)d\omega_1$$
$$= -\frac{\pi}{2}\frac{e}{m}\frac{\omega_p^2}{\omega_2^2}\frac{k_1}{kk_2}\mathbf{k}_2\mathbf{k},$$

$$\int \omega_2\mathrm{Re}\chi^{(2)}(\mathbf{k}_1, \omega_1 \to \infty; \mathbf{k}_2, \omega_2)d\omega_2$$
$$= -\frac{\pi}{2}\frac{e}{m}\frac{\omega_p^2}{\omega_1^2}\frac{k_2}{kk_1}\mathbf{k}_1\mathbf{k}. \tag{5}$$

Зависимости (4), (5) применимы для вычисления подгоночных параметров в простых явных аппроксимациях $\chi^{(2)}$.

Необходимые аппроксимации $\chi^{(2)}$ и $1/\varepsilon^L$ (см. (1)) могут быть выбраны различными способами. Например, аппроксимация для квадратичной функции отклика — в форме решения кинетического уравнения Ландау (или Власова) с подгоночными параметрами, которые могут быть определены из уравнений (3), (4) или (5). Функция $\mathrm{Im}\ 1/\varepsilon^L$ связана с помощью линейной флуктуационно-диссипативной теоремы с динамическим структурным фактором среды $S(k, \omega)$, аппроксимации для которого хорошо известны (см., например, [4,7]), а $\mathrm{Re}1/\varepsilon^L$ найдена с помощью соотношения Крамерса–Кронига.

Определим аппроксимацию $\chi^{(2)}$ плотной высокотемпературной заряженной среды в форме, соответствующей решению уравнения Власова (см., например, [9]) с одним подгоночным параметром ν (эффективная частота столкновений), что обеспечивает правильную асимптотику формы эха в пределе $\Gamma \ll 1$ (и $\nu \to 0$, ср. с [2,14]). В этом случае, выполнив обратное преобразование Фурье в (1), найдем качественную форму $E^{(2)}(\mathbf{r}, t)$, используя ν, нули $\{\bar{\omega}\}$ ($\bar{\omega}_k = \omega_k - i\gamma_k$) функций $\varepsilon^L(k, \omega)$ и принимая во внимание антипараллельность $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$,

$$E^{(2)}(\mathbf{r}, t)$$
$$\sim \begin{cases} e^{ikr - \frac{k}{k_1}(\gamma_{k_1} - \nu)\cdot(\tau' - t) - \nu\tau'} \cos\left[\dfrac{k}{k_1}\omega_k(t - \tau')\right], & t < \tau', \\ e^{ikr - (\gamma_k - \nu)\cdot(t - \tau') - \nu\tau'} \cos[\omega_k(t - \tau')], & t > \tau'. \end{cases}$$

Параметр ν определен из (4) и зависит от $\{k_i\}$ так, чтобы $\gamma > \nu$ (см. табл. 1). Так как k_1 и k примерно равны (т. е. нули $\bar{\omega}_i$ примерно одинаковы) и $k = k_2 - k_1 > 0$, получим

$$E^{(2)}(\mathbf{r}, t) \sim e^{ikr - \gamma_k'/t - \tau'/ - \nu\tau'}\cos[\omega_k(t - \tau')],$$

$$\tau' = \frac{k_2}{k_2 - k_1}\tau; \tag{6}$$

здесь $\gamma_k' = (\gamma_k - \nu)$, $E^{(2)}(\mathbf{r}, t)$ пропорционально $\tau\rho_1\rho_2$.

Фактор $\nu\tau'$ значительно уменьшает амплитуду эха для положительных ν, эхо практически симметрично по времени.

Рассмотрим условия реализации соотношения (6) для неидеальной кулоновской системы, используя физические соображения, аналитические свойства линейных функций отклика и данные компьютерного эксперимента для классической двухкомпонентной кулоновской системы. Величина ω_k найдена из результатов компьютерного моделирования $S_e(k,\omega)$ классической двухкомпонентной кулоновской системы по положению хорошо определенного максимума динамического структурного фактора, при этом $\omega_k > \omega_p$ (и слабо зависит от k для достаточно малых k, см. [4,7] и ссылки там). Декременты затухания оценены по соотношению [15]

$$\gamma_k \approx [\partial \mathrm{Re}\varepsilon^L(k,\omega)/\partial\omega|_{\omega=\omega_k}]^{-1}\mathrm{Im}\varepsilon^L(k,\omega)|_{\omega=\omega_k};$$

$$\mathrm{Re}\varepsilon^L(k,\omega_k) = 0;$$

$$S(k,\omega) = \frac{k^2 T \mathrm{Im}\varepsilon^L(k,\omega)}{4\pi^2 e^2 n\omega|\varepsilon^L(k,\omega)|^2};$$

с помощью результатов компьютерного моделирования $S_e(k,\omega)$ неидеальной кулоновской системы [4] ($\gamma < \omega_k$, табл. 1; n — концентрация электронов). Другую оценку γ можно получить, экстраполировав результаты для ленгмюровских колебаний из [14]. Известно, что второй импульс возмущения ($\sim \rho_{(2)}$ см. (2)) вводится в среду до затухания осцилляций функции распределения электронов с характерным временем $\tilde{\tau}$, приближенно равным $(\tilde{\nu} v_T^2 k^2/3)^{-1/3}$ (v_T, $\tilde{\nu}$ — средняя тепловая скорость и частота столкновений электрона) [14]. Поэтому необходимо выполнение условия $\tilde{\tau} > \tau$ $(k < n^{1/3})$. Время действия возмущающих зарядов ($\Delta\tau$) в (2) должно быть достаточно малым по сравнению с τ и другими характерными временами, т. е. в целом можно написать

$$\omega_k > \gamma, \quad \tilde{\tau} > \tau > 1/\gamma. \tag{7}$$

В этом случае реализуются условия, которые позволяют рассматривать явление временнóго плазменного эха в неидеальной кулоновской системе (см. табл. 1). Различные способы определения ω_k, γ дают приблизительно одинаковые значения. Заметим, что при другом (нежели в табл. 1) соотношении $\{k_i\}$ эхо может быть несимметричным по времени и зависеть от других $\bar{\omega}_i$. Эффективность изложенного метода в широком диапазоне параметров зависит от полноты информации о линейных функциях реакции заряженной среды в соответствующих условиях.

Преобразование волн представляет собой преобразование осцилляций электрического поля в плазме вследствие их взаимодействия. Это явление возникает в течение времени, которое существенно меньше времени затухания осцилляций [1]. Рассмотрим условия взаимодействия и преобразования волн в неидеальной кулоновской системе. Как известно, преобразование волн имеет место в случае резонанса колебаний, т. е. когда

$$\omega_k = \sum_1^2 \omega_{k_i}; \quad \mathbf{k} = \sum_1^2 \mathbf{k}_i. \tag{8}$$

Временнáя зависимость амплитуд волн $E_k^{(1)}$ ($E_k^{(1)}(t) = E_k^{(1)}\cos(\omega_k t + \phi_k)$) определяется уравнениями (9), в которых затуханием волн пренебрегается (по предположению)

$$\frac{\partial A_k}{\partial t} = s_k \sum_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2} V_{k;k_1,k_2} A_{k_1} A_{k_2},$$

$$A_k = (16\pi)^{-1/2}|\varepsilon'_k|^{1/2} E_k e^{-i\phi_k}, \quad s_k = \mathrm{sgn}\varepsilon'_k,$$

$$V_{k;k_1,k_2} = -(4\pi)^{1/2}\chi^{(2)}(k_1,\omega_{k_1};k_2,\omega_{k_2})|\varepsilon'_k\varepsilon'_{k_1}\varepsilon'_{k_2}|^{-1/2},$$

$$\varepsilon'_k = [\partial\varepsilon^L(k,\omega)/\partial\omega]_{\omega=\omega_k}. \tag{9}$$

Уравнения для A_{k_i} получены с использованием свойств симметрии матрицы V [1]. Распадная неустойчивость имеет место в плазме, когда s_{k_i} имеют одинаковые знаки, а взрывная неустойчивость реализуется в противоположном случае. В первом случае лэнгмюровская волна $(\mathbf{k},\omega)$ распадается на лэнгмюровскую $(\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}, \omega_1)$ и ионно-акустическую $(\mathbf{k}_2, \omega_2)$ волны в плазме с различными температурами электронов и ионов. Инкремент нарастания этих волн $\tilde{\gamma}$ пропорционален интенсивности распадающейся волны ($V = |V_{k;k_1,k_2}|$) и квадратичной функции реакции $\chi^{(2)}$

$$\tilde{\gamma} \sim V|A_k|. \tag{10}$$

Во втором случае амплитуды взаимодействующих волн нарастают, насыщение достигается с учетом нелинейности более высокого порядка.

Сравним характерные времена распадной неустойчивости ($\sim 1/\tilde{\gamma}$), релаксации электронной и ионной температур, затухания лэнгмюровских и ионно-акустических колебаний в гипотетических условиях неидеальной кулоновской системы. Для сравнения использованы параметры табл. 1 (где T соответствует электронной температуре T_e, $T_e \gg T_i$ — ионная температура) и оценка $V(\chi^{(2)})$ по предложенной выше модели для различных температур электронов и ионов. Оценки показывают, что времена релаксации электронной и ионной температур, затухания ионно-акустических колебаний больше времени затухания лэнгмюровских колебаний. Поэтому необходимо сравнивать γ^{-1} с $\tilde{\gamma}^{-1}$ для определения условий реализации распадной неустойчивости в неидеальной кулоновской системе. Показано, что $\gamma^{-1} > \tilde{\gamma}^{-1}$ (см. табл. 2) для достаточно интенсивных электрических полей при длинах волн $\{k\} < n^{1/3}$. Поэтому преобразование волн может реализовываться в плотной высокотемпературной заряженной среде с различными температурами компонент.

Квадратичный вклад в торможение быстрой частицы с зарядом Z в среде $\sim \hat{\chi}^{(2)}$ может быть исследован для неидеальной кулоновской системы по предложенной модели. Данный вклад пропорционален $\rho^{(2)}$ ($\sim Z^3$, где $\rho = \rho^{(1)} + \rho^{(2)} + \ldots$ — плотность наведенного заряда).

Рассмотрим условия экспериментальной реализации нелинейных явлений, например, для временнóго плазменного эха в неидеальной заряженной среде — условие, связанное с периодом действия инициирующего поля (см. (2)). Данный период должен быть достаточно мал по сравнению с другими характерными временами явления (ср. с (7)). Если экстраполировать результаты анализа, проведенного выше для гипотетической кулоновской системы, на неидеальную плазму, которая может быть создана в эксперименте (где $n \sim 10^{21}$), можно заключить, что $\Delta\tau$ должно быть порядка фемтосекунд (или даже аттосекунд) в зависимости от условий в плазме. В течение этого периода времени неидеальная плазма характеризуется замороженным составом и может адекватно моделироваться кулоновской системой. Следовательно, временно́е плазменное эхо в неидеальной плазме может быть инициировано сверхкороткими импульсамим поля. Возможность реализации таких полей исследована (см., например, [16]). Аналогичная экстраполяция результатов, выполненная для преобразования волн, показывает существенное уменьшение интенсивности электрического поля, необходимого для реализации явления в неидеальной плазме, полученной в эксперименте, по сравнению с данными табл. 2. Значения характерных времен этого процесса легко найти из табл. 2 для соответствующей плазменной частоты.

2. Транспортные процессы в неидеальной плазме

Описание транспортных процессов с помощью известного метода Кубо не может быть проведено. Такая ситуация возникает из-за отсутствия общей формулировки поправки (H^{ext}) к гамильтониану системы от термических возмущений. Значения характерных времен транспортных процессов, как известно, соответствуют гидродинамическому описанию системы и на много порядков больше характерных времен нелинейных явлений, рассмотренных выше. Транспортные процессы, такие как диффузия, теплопроводность, вязкость, электропроводность и т. п., связаны внутренними неоднородностями в среде. В нелинейном случае невозможно разделить переносные процессы, связанные с действием полей и возмущениями температуры, массовой скорости, концентраций химических элементов, поэтому нелинейная реакция среды на данные возмущения должна описываться единым образом. Выражения для барнеттовских коэффициентов через нелинейные функции реакции могут быть получены по процедуре [8]. Данные выражения находятся путем сравнения феноменологических нелинейных уравнений сохранения для заряженной сплошной среды и операторных уравнений для динамических переменных в форме обобщенных уравнений Ланжевена. При этом подход к описанию нелинейных транспортных процессов во многом аналогичен подходу, принятому в предыдущем пункте, поскольку в нем используются как уравнение для матрицы плотности среды [17,18], так и феноменология нелинейных процессов [19,20].

Ниже в качестве первого шага к исследованию нелинейных транспортных процессов подробно рассмотрено линеаризованное барнеттовское приближение. Обсуждаются свойства матрицы коэффициентов при старших производных в системе уравнений сохранения в линеаризованном барнеттовском приближении, существенные для гидродинамических приложений. Согласно процедуре [8], начнем с операторных уравнений для динамических переменных в форме обобщенных уравнений Ланжевена для неидеальной многоэлементной заряженной среды. Вывод данных уравнений проведем с использованием алгоритма [21]. Кратко обсудим вывод. Выпишем скалярное произведение гейзенберговских операторов $A(t)$ и $B(t_0)$, которые соответствуют гидродинамическим переменным

$$\langle A(t); B(t_0)\rangle = Tr\rho_0 \int_0^\beta d\lambda e^{\lambda H} A(t) e^{-\lambda H} B(t_0). \tag{11}$$

Сформулируем определение проекционного оператора P и другие определения

$$PG(t) = \frac{\langle G(t); B(t_0)\rangle}{\langle B(t_0); B(t_0)\rangle} \cdot B(t_0);$$

$$B(t) = \sum(t; t_0) \cdot B(t_0) + B'(t);$$

$$\sum(t; t_0) = \langle B(t); B(t_0)\rangle / \langle B(t_0); B(t_0)\rangle;$$

$$B'(t) = (1 - P)B(t). \tag{12}$$

Очевидно, что $P^2 = P$, проекционный оператор выделяет медленно меняющуюся часть переменной и определяет проекцию переменной на $B(t_0)$. Найдем уравнение движения для $B(t_0)$, используя разложение для $B(t)$

$$\dot{B}(t_0) = i[H, B(t_0)]/\hbar = i\hat{\omega}B(t_0) + K(t_0);$$

$$i\hat{\omega} = \left[\frac{d}{dt}\sum(t; t_0)\right]_{t=t_0}; \quad K(t_0) = (1 - P)\dot{B}(t_0). \tag{13}$$

Воздействуем оператором $(1 - P)$ на уравнение движения для $B(t)$

$$dB(t)/dt = i\left[H, B(t)\right]/\hbar \equiv iLB(t),$$

тогда $dB'(t)/dt - (1 - P)iLB'(t) = \sum(t)K$. Если ввести определение

$$B'(t) = \int_{t_0}^{t} \sum(t - s) f(s),$$

то из предыдущего уравнения найдем

$$f(t) \equiv u(t)K. \quad u(t) = \exp\left[t(1 - P)iL\right]. \tag{13'}$$

Наконец, используя результаты и определения $(11)-(13)'$, полученные выше, выпишем уравнение движения для $B(t)$ в виде обобщенного уравнения Ланжевена в двух эквивалентных формах

$$dB(t)/dt = \int_0^t \theta(t-s)y(s)ds = f(t);$$

$$dB(t)/dt - i\hat{\omega}B(t) + \int_0^t \Gamma(t-s)y(s)ds = f(t);$$

$$\Gamma(t) = 2i\hat{\omega}\delta(t) - \theta(t); \quad \sum(z) = \left(z - \theta(z)\right)^{-1};$$

$$\langle f(t); B(t_0)^* \rangle = 0. \tag{14}$$

В (14) правая часть соответствует „случайной силе“, функция θ и Γ — транспортным процессам, $\Sigma(z)$ есть преобразование Лапласа от $\Sigma(t)$; функции $\theta(t)$, $f(t)$ определены черезе B (и Σ) и H. Заметим, что обобщенное уравнение Ланжевена можно трактовать как матричное уравнение, когда $B(t)$ и $f(t)$ — вектора (столбцы), а $\hat{\omega}$, $\theta(t)$ и Γ — квантовые матрицы.

Линеаризованные барнеттовские выражения для потоков (см. (20)) содержат обычные и барнеттовские феноменологические кинетические коэффициенты (α, β). Для обычных коэффициентов в заряженной среде выражения известны (см., например, [7]), а линеаризованные барнеттовские коэффициенты найдены ниже. Согласно схеме определения данных коэффициентов выпишем известную систему уравнений сохранения для сплошной заряженной среды в линеаризованной форме (см., например, [7])

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[u(\mathbf{r},t) - \frac{u+p}{\rho_m}\rho_m(\mathbf{r},t)\right] = -\operatorname{div}\mathbf{J}'_q;$$

$$\rho_m \frac{\partial}{\partial t} c_a(\mathbf{r},t) = -\operatorname{div}\mathbf{J}_a;$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_m(\mathbf{r},t) = -\operatorname{div}\rho_m\mathbf{u}; \quad \frac{\partial}{\partial t}\rho_m\mathbf{u} = -\operatorname{div}(p\delta_{ij} + \hat{\pi}). \tag{15}$$

Здесь и ниже $\mathbf{J}'_q$, $\mathbf{J}_a$ и $\hat{\pi}$ — потоки тепла, массы (и заряда) и импульса (см. (20), (21)), u — плотность внутренней энергии, T — температура, p — давление, ρ_m — плотность, c_a — массовая доля химического элемента a, v_l и v_t — продольная и поперечная компоненты массовой скорости $\mathbf{u}$. Операторные определения этих величин известны (см., например, [7]). Система уравнений (15), как известно, может быть сведена к алгебраической системе уравнений с помощью преобразования Фурье−Лапласа. При записи алгебраической системы, как обычно, использована нелокальная по пространству и времени зависимость потоков от термодинамических сил через обобщенные коэффициенты переноса (см., например, [7]). Для среды с ньютоновской реологией алгебраическая форма системы уравнений сохранения имеет вид ($a, b = 1, \ldots, N_a - 1$; N_a — число химических элементов, составляющих среду)

$$\begin{aligned}
zQ(k,z) - Q(k) &= -k^2\big[\alpha_{11}(k,z)T(k,z) \\
&\quad + T\alpha_{1b}(k,z)L_b(k,z) + ik\alpha_{1v}(k,z)v_l(k,z)\big]; \\
z\rho_m c_a(k,z) - \rho_m c_a(k) &= -k^2\big[\alpha_{a1}(k,z)T(k,z) \\
&\quad + \alpha_{ab}(k,z)L_b(k,z) + ik\alpha_{av}(k,z)v_l(k,z)\big]; \\
z\rho(k,z) - \rho_m(k,z) &= -k^2\rho_m\frac{ik}{k^2}v_l(k,z); \\
zv_l(k,z) - v_l(k,z) &= -k^2\frac{1}{ik\rho_m}\big[k^2\beta_{v1}(k,z)T(k,z) \\
&\quad + k^2\beta_{vb}(k,z)L_b(k,z) + p(k,z) + ik\tilde{b}(k,z)v_i(k,z)\big]; \\
zv_t(k,z) - v_t(k) &= -k^2\frac{1}{\rho_m}\eta(k,z)v_t(k,z); \\
L_b(k,z) &= T(\mu_b/T)(k,z) \\
&\quad + (4\pi e^2/k^2)c_\rho(k,z)\delta_{b\rho}\rho_m/(m_b m_e).
\end{aligned} \tag{16}$$

Здесь μ_b, $p = \mu_b$, $p(T, \rho_m, c_a, \rho_m)$ — удельный химический потенциал химического элемента „b“ и давление; $\tilde{b} = (4/3)\eta + \xi$; η, ξ — коэффициенты вязкости; индекс ρ соответствует массовой доле объемного заряда в среде. В данной системе уравнений члены $\sim k^3$ соответствуют линеаризованным барнеттовским коэффициентам переноса. Матричная форма системы уравнений есть

$$zB(\mathbf{k},z) - B(\mathbf{k}) = -k^2M(\mathbf{k},z)X(\mathbf{k},z); \tag{17}$$

$$^tB = \big[Q(k,z), \{\rho_m c_a(k,z)\}, \rho_m(k,z), v_l(k,z), v_t(k,z)\big];$$

$$Q(k,z) = u(k,z) - \rho_m(k,z)(u+p)/\rho_m;$$

$$^tX = \big[T(k,z), \{\rho_m c_a(k,z)\}, \rho_m(k,z), v_l(k,z), v_t(k,z)\big];$$

$$B = R_{BX}X.$$

Согласно процедуре, после умножения этого уравнения на $B(-\mathbf{k})$ и усреднения получим матричное уравнение относительно корреляционных функций. Далее необходимо найти микроскопические выражения для линеаризованных барнеттовских кинетических коэффициентов, входящих в M (обычные коэффициенты в данной матрице известны). С этой целью используем обобщенное уравнение Ланжевена для операторов динамических переменных (14). Затем, если принять во внимание координатную зависимость операторов, умножить уравнения на $B(\mathbf{r})$, усреднить по матрице плотности ρ_0, то после преобразования Фурье−Лапласа операторное уравнение для корреляционных функций второго порядка, вообще говоря, будет иметь вид ($\tilde{\Theta}$ соответствует преобразованию Фурье−Лапласа от θ из (14))

$$z\langle B(\mathbf{k},z)B(-\mathbf{k},0)\rangle - \langle B(\mathbf{k})B(-\mathbf{k})\rangle = \tilde{\Theta}\langle B(\mathbf{k},z)B(-\mathbf{k},0)\rangle.$$

Для того чтобы найти выражения для линеаризованных барнеттовских кинетических коэффициентов из M

через $\tilde{\Theta}$, следует переписать последнее уравнение в форме матричного уравнения, которое следует из (17), и сопоставить соответствующие члены в этих уравнениях. С другой стороны, определения элементов $\tilde{\Theta}$ через корреляционные функции вытекают из последнего уравнения. Так можно получить удобные выражения для линеаризованных барнеттовских кинетических коэффициентов через корреляционные функции, которые позволят провести компьютерное моделирование коэффициентов. Поскольку принято определять кинетические коэффициенты через корреляционные функции потоков, то после дальнейших преобразований матрица M выражается через матрицу корреляционных функций операторных выражений для потоков J_{BB} (аналогичная процедура для обычных кинетических коэффициентов детально описана в [7])

$$J_{BB}(\mathbf{k}, z) - \Phi(\mathbf{k}) = \left[1 + \frac{k^2}{z} M(\mathbf{k}, z) R_{BX}^{-1}\right]^{-1}$$

$$\times M(\mathbf{k}, z) R_{BX}^{-1} \langle B(\mathbf{k}) B(-\mathbf{k})\rangle_0 / (V k_B T);$$

$$\Phi(\mathbf{k}) = (V k_B T k^2)^{-1} \left(\frac{d}{dt} \langle B(\mathbf{k}) B(-\mathbf{k})\rangle_0\right).$$

Матрицы $\Phi(\mathbf{k})$ и $\langle B(\mathbf{k})B(-\mathbf{k})\rangle_0$, связанные с $\hat{\omega}$, рассчитаны в [7]. После вычисления матрицы, обратной матрице в квадратных скобках в длинноволновом пределе, и перемножений найдем определения для линеаризованных коэффициентов Барнетта в длинноволновом и низкочастотном пределе. Для α_{1v} имеем

$$\tilde{\alpha}_{1v}(k, z) = ik\big[\alpha_{1v}(k, z) + (\varepsilon^{-1} - 1)\alpha_{1\rho}\alpha_{\rho v}/\alpha_{\rho\rho}\big]. \quad (18)$$

Здесь $\tilde{\alpha}_{ab}$ соответствует элементу матрицы корреляционных функций J_{BB}. Аналогичное выражение имеет место для α_{av}. Выражения для $\alpha_{\rho\rho}$ и других обычных кинетических коэффициентов в (18) получены в [7]. Выражения для тензорных кинетических коэффициентов при $k^3 - \beta_{va}$, β_{v1} в данном приближении не содержат члена, аналогичного второму слагаемому в правой части (18), т. е., как и в нейтральном случае, не учитывают поляризационных эффектов. Заметим, что кинетические коэффициенты, как и нелинейные явления, определяются временны́ми корреляционными функциями; но если в первом случае фигурируют длинноволновой и низкочастотный пределы функций (см. (18)), то во втором — корреляционные функции при конечных частотах и волновых векторах (см. (1), (9)).

Свойства матрицы коэффициентов при старших производных в системе уравнений сохранения для заряженной сплошной среды, как хорошо известно, определяют общие свойства решений гидродинамических задач. Исследуем свойства матрицы коэффициентов при старших производных (третьего порядка) в системе уравнений сохранения в линеаризованном барнеттовском приближении. Такое исследование позволит установить связь между результатами анализа, проведенного в данной части работы, и гидродинамическими приложениями.

В [7] рассмотрены свойства матрицы коэффициентов при старших производных (второго порядка), образованной обычными кинетическими коэффициентами, в системе уравнений сохранения для неидеальной заряженной сплошной среды. Показано, что данная матрица является произведением матрицы кинетических коэффициентов и матриц, определяемых термодинамическими свойствами среды; при этом матрица кинетических коэффициентов является симметричной положительно определенной. Это обстоятельство позволяет найти условия, при которых матрица при старших производных обладает важным для гидродинамических приложений свойством параболичности. Свойство параболичности матрицы (т. е. положительность вещественных частей собственных значений матрицы) гарантирует положительность и непрерывность решений гидродинамических задач.

Структурой, аналогичной структуре матрицы коэффициентов при старших производных в обычной системе уравнений сохранения, обладает и матрица коэффициентов при старших производных в системе уравнений сохранения в линеаризованном барнеттовском приближении. Поэтому выясним свойства матрицы линеаризованных барнеттовских кинетических коэффициентов. С этой целью рассмотрим производство энтропии многоэлементной конденсированной заряженной среды в линеаризованном барнеттовском приближении (см., например, [22] и обозначения там)

$$\sigma = -(1/T)\big[(\mathbf{J}'_q \cdot \nabla)\ln T + \hat{\pi} \otimes \{\nabla \mathbf{u}\}$$

$$+ p \sum_{a=1}^{N_a - 1} \mathbf{J}_a \cdot (\mathbf{L}_a - \mathbf{L}_\rho) + (1/T)\hat{\mathbf{J}}^T \otimes \{\nabla\nabla\} T$$

$$+ \hat{\mathbf{J}}^u \otimes \{\nabla\nabla\mathbf{u}\} + \mathbf{J}^v \cdot \nabla^2 \mathbf{u} + \sum_{a=1}^{N_a - 1} \hat{J}_a^D \otimes \{\nabla(\mathbf{L}_a - \mathbf{L}_\rho)\}\big]. \quad (19)$$

Особенностью данного выражения по сравнению с обычным выражением для производства энтропии является наличие в нем „физических“ и так называемых „нефизических“ потоков. Физические потоки (первые три потока в (19)) входят в уравнения сохранения (см. (17), индексы в кинетических коэффициентах заменены: $I \to q$). Выражение (19) содержит тепловой поток $\mathbf{J}'_q$, поток импульса $\hat{\pi}$ и массовые потоки $\mathbf{J}_a$, а также „нефизические“ потоки. Выпишем векторные потоки, согласно принципу Кюри для изотропной среды

$$\mathbf{J}_a = -\sum_{a=1}^{N_a - 1} \alpha_{ab}(\mathbf{L}_b - \mathbf{L}_\rho) - \alpha_{aq}\nabla \ln T - \alpha_{au}\nabla^2 \mathbf{u};$$

$$\mathbf{J}'_q = -\sum_{a=1}^{N_a - 1} \alpha_{qa}(\mathbf{L}_a - \mathbf{L}_\rho) - \alpha_{qq}\nabla \ln T - \alpha_{qu}\nabla^2 \mathbf{u};$$

$$\mathbf{J}^v = -\sum_{b=1}^{N_a - 1} \alpha_{ub}(\mathbf{L}_b - \mathbf{L}_\rho) - \alpha_{uq}\nabla \ln T - \alpha_{uu}\nabla^2 \mathbf{u}. \quad (20)$$

Другие тензорные потоки можно записать аналогичным образом. Запишем все потоки в матричной форме

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_a \\ \mathbf{J}'_q \\ \mathbf{J}^v \\ \hat{\mathbf{J}}_a^D \\ \hat{\pi} \\ \hat{\mathbf{J}}^T \\ \hat{\mathbf{J}}^u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{ab} & \alpha_{aq} & \alpha_{au} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{qb} & \alpha_{qq} & \alpha_{qu} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{ub} & \alpha_{uq} & \alpha_{uu} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_{ab} & \beta_{at} & \beta_{aq} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_{ub} & \beta_{uu} & \beta_{uq} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_{qb} & \beta_{qu} & \beta_{qq} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{vv} \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} \mathbf{L}_b - \mathbf{L}_\rho \\ \nabla \ln T \\ \nabla^2 \mathbf{u} \\ \{\nabla(\mathbf{L}_b - \mathbf{L}_\rho)\} \\ \{\nabla \mathbf{u}\} \\ \{\nabla\nabla\} T \\ \{\nabla\nabla \mathbf{u}\} \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Согласно принципу Кюри, первая матрица в правой части (21) разложена на подматрицу α — „векторные“ кинетические коэффициенты, и подматрицу β — „тензорные“ коэффициенты. По принципу Онсагера, обе подматрицы симметричны. В то же время матрица кинетических коэффициентов в системе уравнений сохранения в линеаризованном барнеттовском приближении, вообще говоря, не является симметричной, поскольку включает в себя только „физические“ кинетические коэффициенты $\{\alpha_{au}, \alpha_{qu}, \beta_{ua}, \beta_{uq}\}$. Следовательно, для матрицы коэффициентов при старших производных в уравнениях сохранения в линеаризованном барнеттовском приближении невозможно провести общий анализ свойств. Другими словами, вычислительный алгоритм, по которому будут найдены барнеттовские кинетические коэффициенты, определит свойства матрицы коэффициентов при старших производных. Такое положение при использовании некорректного вычислительного алгоритма может породить неоправданные трудности и неадекватные решения в соответствующих задачах гидродинамики.

Заключение

Таким образом, в работе обсуждаются подходы к изучению нелинейных явлений и нелинейных транспортных процессов в неидеальной заряженной среде. В обоих случаях исследуемые характеристики зависят от нелинейных функций реакции и соответствующих корреляционных функций среды. Методы описания нелинейных транспортных процессов и нелинейных явлений во многом аналогичны, поскольку используются как уравнение для матрицы плотности среды, так и феноменология нелинейных процессов и явлений.

Поскольку формальные определения характеристик нелинейных явлений обычно известны, проблема заключается в последовательном вычислении формальных выражений или построении моделей для определения функций реакции. В работе предложена модель для описания нелинейных явлений: временно́го плазменного эха и преобразования волн. Подход базируется на применении явных аппроксимаций для функций реакции с подгоночными параметрами. Подгоночные параметры определяются из точных частотных моментов для функций реакции. Установлено соотношение между частотными моментами функций реакции $\chi^{(2)}$ и $\hat{\chi}^{(2)}$. Показано, что временно́е плазменное эхо и преобразование волн могут быть реализованы в условиях неидеальных кулоновских систем. Другие нелинейные явления в неидеальных заряженных средах также могут быть рассмотрены с помощью предложенного подхода. При этом для функции реакции, связанной с конкретным нелинейным явлением, необходимо выполнить исследования точных частотных моментов и найти приемлемые явные аппроксимации.

Обсуждается способ описания нелинейных транспортных процессов для неидеальной многоэлементной (заряженной) сплошной среды. Формальные выражения для нелинейных кинетических коэффициентов предложено определять путем сопоставления барнеттовских феноменологических уравнений сохранения среды и уравнений для операторов соответствующих динамических переменных. При выводе уравнений движения операторов динамических переменных в форме обобщенных уравнений Ланжевена использован алгоритм Мори. В качестве первого шага к исследованию нелинейных транспортных процессов подробно рассмотрено линеаризованное барнеттовское приближение. Обсуждаются свойства матрицы коэффициентов при старших производных в системе уравнений сохранения в линеаризованном барнеттовском приближении, существенные для гидродинамических приложений. В то же время для определения формальных выражений для нелинейных барнеттовских кинетических коэффициентов необходимо проводить дальнейшие исследования в рамках разработанного подхода. Столь же важны конкретные вычисления нелинейных кинетических коэффициентов для неидеальных сред, например методами компьютерного моделирования.

Список литературы

[1] *Галеев А.А., Сагдеев Р.З.* // Вопросы теории плазмы. 1973. Т. 7. Вып. 1. С. 3.

[2] *O'Neil T.M.* // Phys. Fluids. 1968. Vol. 11. N 11. P. 2420–2425.

[3] *Павлов Г.А.* // Письма в ЖТФ. 2007. Т. 33. Вып. 2. С. 36–42.

[4] *Hansen J.-P., Mc Donald I.R.* // Rhys. Rev. A. 1981. Vol. 23. N 4. P. 2041–2059.

[5] *Чепмен С., Каулинг Т.* Математическая теория неоднородных газов. М.: ИЛ, 1960.

[6] *Галкин В.С., Жаров В.А.* // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 3. С. 467–476.

[7] *Pavlov G.A.* Transport processes in plasmas with strong Coulomb interaction. Amsterdam: Gordon & Breach Science Publishers, 2000. (Павлов Г.А. // ТМФ. 1992. Т. 90. № 3. С. 460–468.)

[8] *Pavlov G.A.* // J. Phys. A: Math. Gen. 2003. Vol. 36. N 22. P. 6019–6025.
[9] *Golden K., Kalman G., and Datta T.* // Phys. Rev. A. 1975. Vol. 11. N 6. P. 2147–2151.
[10] *Rommel J.M., Kalman G.* // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 54. N 4. P. 3518–3530.
[11] *Golden K., Kalman G., and Silevitch M.* // J. Stat. Phys. 1972. Vol. 6. N 2/3. P. 87–118.
[12] *Ахиезер Н.И.* Классическая проблема моментов. М.: Гос. Изв-во физ.-мат. лит., 1961.
[13] *Ситенко А.Г.* // ЖЭТФ. 1978. Т. 75. № 1. С. 104–115.
[14] *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.Р.* Физическая кинетика. М.: Наука, 1979.
[15] *Пайнс Д., Нозьер Ф.* Теория квантовых жидкостей. М.: Мир, 1967.
[16] *Naumova N., Sokolov I., Nees J. et al.* // Phys. Rev. Lett. 2004. Vol. 93. P. 195 003.
[17] *Зубарев Д.Н.* Современные проблемы математики ВИНИТИ. Т. 15. М., 1980. С. 131–227.
[18] *Тищенко С.В.* // ТМФ. 1983. Т. 56. № 1. С. 114–124.
[19] *Muller I., Ruggeri T.* Extended thermodynamics. Berlin: Springer, 1992.
[20] *Alekseev A., Baturin S., Pavlov G., and Shiryaev A.* // Macromol. Symp. 2001. Vol. 169. P. 321–328.
[21] *Mori H.* // Progr. Theor. Phys. 1965. Vol. 34. N 3. P. 399–416.
[22] *Жданов В.М., Ролдугин В.И.* // ЖЭТФ. 2002. Т. 122. № 4. С. 789–804.