01;03

Нелинейный анализ закономерностей реализации неустойчивости Рэлея–Тейлора на заряженной границе раздела сред

© А.И. Григорьев, Д.М. Пожарицкий

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 25 октября 2006 г. В окончательной редакции 18 июля 2007 г.)

В третьем порядке малости по произведению амплитуды волны на волновое число найдено аналитическое асимптотическое решение задачи о расчете нелинейной стадии неустойчивости Рэлея–Тейлора на однородно заряженной границе раздела двух несмешивающихся идеальных несжимаемых жидкостей, одна из которых проводящая, а другая — диэлектрическая. Выяснилось, что наличие заряда на границе раздела сред приводит к расширению диапазона длин волн, претерпевающих неустойчивость, за счет смещения в область коротких длин волн и к уменьшению длины волны, обладающей максимальным инкрементом. В итоге характерный линейный масштаб деформации поверхности раздела сред, связанный с протеканием тяжелой жидкости в легкую, уменьшается с возрастанием поверхностной плотности электрического заряда пропорционально корню квадратному из параметра Тонкса–Френкеля, характеризующего устойчивость поверхности раздела по отношению к распределенному по ней заряду.

PACS: 47.10.-g

Введение

Исследование неустойчивости Рэлея–Тейлора, интенсивно проводившееся в середине прошлого века в связи с проблемами разработки ядерного оружия [1], в последние годы развивается в связи с проблемами инерционного термоядерного синтеза [2–5] и сонолюминесценции [6,7]. Обсуждаемый тип неустойчивости проявляется и на заряженной поверхности мениска жидкости на торце капиллярной трубки [8] в разнообразных устройствах для электродиспергирования жидкости (см., например, обзоры [9,10] и указанную там литературу). В подобной ситуации определяющую роль в силовом воздействии на поверхность жидкости играет давление электрического поля, и кроме неустойчивости Рэлея–Тейлора может реализоваться неустойчивость Тонкса–Френкеля [8,11,12]. Исследованию влияния электрического поля на закономерности реализации неустойчивости Рэлея–Тейлора на заряженной границе раздела сред посвящена настоящая работа.

1. Формулировка задачи

Пусть идеальные, несжимаемые жидкости с плотностями ρ_1 и ρ_2, где $\rho_1 \le \rho_2$, заполняют в поле сил тяжести полупространства $z \le 0$ и $z > 0$ соответственно в декартовой системе координат, орт $\mathbf{e}_z$ которой направлен против направления ускорения силы тяжести $\mathbf{e}_z \parallel -\mathbf{g}$. Примем, что верхняя жидкость является диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε_*, нижняя — идеальным проводником, а на границе раздела сред, которая характеризуется коэффициентом поверхностного натяжения σ, однородно распределен электрический заряд с поверхностной плотностью κ так, что в верхней жидкости существует однородное электростатическое поле $E_0 \equiv 4\pi\kappa/\varepsilon_*$, направленное параллельно орту $\mathbf{e}_z$.

Будем рассматривать плоскую периодическую капиллярно-гравитационную волну конечной, но малой по сравнению с ее длиной, амплитуды, бегущую по границе раздела жидкостей в положительном направлении орта $\mathbf{e}_x$. Уравнение волны в начальный момент времени имеет вид:

$$t = 0: \qquad \xi(x,t) = a\cos(kx - \omega t). \tag{1}$$

Уравнение границы раздела жидкостей, искаженной волновым движением, запишем в виде $z = \xi(x,t)$. Поставим целью расчет параметров нелинейной волны в рассматриваемой системе в аналитической асимптотической процедуре с точностью до четвертого порядка малости по произведению амплитуды волны a на ее волновое число k (т. е. введем малый параметр $\varepsilon \equiv ak$). Проследим эволюцию профиля волны во времени, задаваясь вопросом: каким образом „тяжелая“ жидкость будет „проваливаться“ в более легкую среду и какое влияние на этот процесс оказывает электрический заряд, распределенный по границе раздела. Все рассмотрение проведем в безразмерных переменных, в которых $\rho_1 = g = \sigma = 1$. Тогда масштабами измерения расстояния, времени, частоты будут

$$\alpha \equiv \sqrt{\sigma/\rho_1 g}; \quad \sqrt{\alpha/g}; \quad \sqrt{g/\alpha}.$$

Математическая модель сформулированной задачи в рассматриваемой системе имеет вид

$$z > \xi: \qquad \Delta\Phi = 0; \quad \Delta\varphi_2 = 0;$$

$$z \le \xi: \qquad \Delta\varphi_1 = 0;$$

$$z=\xi: \qquad -\rho\,\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}-\rho z-\frac{\rho}{2}\left(\nabla\varphi_2\right)^2+\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}+z$$

$$+\frac{1}{2}\left(\nabla\varphi_1\right)^2+\frac{\varepsilon_*\left(\nabla\Phi\right)^2}{8\pi}=-\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\left(1+\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\right)^{-3/2};$$

$$\rho=\frac{\rho_2}{\rho_1}\geq 1;$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial t}+\frac{\partial\xi}{\partial x}\,\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}=\frac{\partial\varphi_1}{\partial z};\quad \frac{\partial\xi}{\partial t}+\frac{\partial\xi}{\partial x}\,\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}=\frac{\partial\varphi_2}{\partial z};\quad \Phi=0;$$

$$z\to\infty: \qquad \nabla\Phi\to -E_0\mathbf{e}_z;\quad \nabla\varphi_2\to 0;$$

$$z\to-\infty: \qquad \nabla\varphi_1\to 0. \tag{2}$$

Для однозначной разрешимости обсуждаемой задачи кроме (1) необходимо сформулировать еще одно начальное условие. Однако в задачах аналитического асимптотического расчета нелинейного волнового движения проблема выбора начальных условий оказывается довольно тонким вопросом, поскольку произвольное заданное второе начальное условие может привести к неоправданному увеличению громоздкости решения. Поэтому в классических аналитических расчетах нелинейных периодических волн второе граничное условие выбирается на финальной стадии решения так, чтобы аналитический вид решения был наименее громоздким. Фактически требование определения второго начального условия заменяется принципом; искать решение, наименее громоздкое в смысле математического описания. Именно такой подход используется в настоящей работе.

2. Процедура разбиения задачи по порядкам малости

Очевидно, что в нулевом приближении по ε поверхность раздела сред находится в невозмущенном состоянии и описывается уравнением $z=0$, жидкости покоятся, а электрическое поле однородно:

$$\xi^{(0)}\equiv 0;\qquad \nabla\varphi_1^{(0)}\equiv 0;\quad \nabla\varphi_2^{(0)}\equiv 0;\quad \nabla\Phi^{(0)}\equiv -E_0\mathbf{e}_z.$$

Подставив эти выражения в (2), получим

$$\Phi_0\equiv -E_0\,z.$$

Неизвестными функциями в задаче являются: возмущение границы раздела сред $\xi(x,t)$, потенциал поля скоростей в первой среде (нижней) $\varphi_1(\mathbf{r},t)$, потенциал поля скоростей во второй среде (верхней) $\varphi_2(\mathbf{r},t)$ и потенциал электростатического поля $\Phi(\mathbf{r},t)$. Будем их искать в виде разложений

$$\xi=\varepsilon\xi^{(1)}+\varepsilon^2\xi^{(2)}+\varepsilon^3\xi^{(3)}+\varepsilon^4\xi^{(4)}+O(\varepsilon^5),$$

$$\Phi=-E_0z+\varepsilon\Phi^{(1)}+\varepsilon^2\Phi^{(2)}+\varepsilon^3\Phi^{(3)}+\varepsilon^4\Phi^{(4)}+O(\varepsilon^5),$$

$$\varphi_1=\varepsilon\varphi_1^{(1)}+\varepsilon^2\varphi_1^{(2)}+\varepsilon^3\varphi_1^{(3)}+\varepsilon^4\varphi_1^{(4)}+O(\varepsilon^5),$$

$$\varphi_2=\varepsilon\varphi_2^{(1)}+\varepsilon^2\varphi_2^{(2)}+\varepsilon^3\varphi_2^{(3)}+\varepsilon^4\varphi_2^{(4)}+O(\varepsilon^5).$$

Решать задачу будем методом многих масштабов. Для этого примем, что неизвестные функции $\xi^{(i)}(x,t)$, $\Phi^{(i)}(\mathbf{r},t)$, $\varphi_1^{(i)}(\mathbf{r},t)$, $\varphi_2^{(i)}(\mathbf{r},t)$ зависят, помимо координат x и z, от разных временны́х масштабов: от основного $T_0\equiv t$ и более медленных: $T_1\equiv\varepsilon t$, $T_2\equiv\varepsilon^2 t$, $T_3\equiv\varepsilon^3 t$, т. е.

$$\xi^{(i)}(x,t)=\xi^{(i)}(x,T_0,T_1,T_2,T_3);$$

$$\Phi^{(i)}(\mathbf{r},t)=\Phi^{(i)}(x,z,T_0,T_1,T_2,T_3),$$

$$\varphi_1^{(i)}(\mathbf{r},t)=\varphi_1^{(i)}(x,z,T_0,T_1,T_2,T_3);$$

$$\varphi_2^{(i)}(\mathbf{r},t)=\varphi_2^{(i)}(x,z,T_0,T_1,T_2,T_3).$$

С учетом этого оператор дифференцирования по времени принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial T_0}+\varepsilon\,\frac{\partial}{\partial T_1}+\varepsilon^2\,\frac{\partial}{\partial T_2}+\varepsilon^3\,\frac{\partial}{\partial T_3}+O(\varepsilon^4). \tag{4}$$

Граничные условия на поверхности раздела сред также разложим по малому параметру ε в окрестности невозмущенной границы раздела: $z=0$. При разложении частных производных по времени $(\partial\xi/\partial t)$ и $(\partial\varphi_i/\partial t)$ будем учитывать (4). Подставив разложения (3) в (2), собрав слагаемые при одинаковых степенях ε и приравняв их нулю, разобьем задачу на порядки малости от первого до четвертого.

2а. Задача первого порядка малости

Математическая формулировка задачи первого порядка малости имеет вид

$$z>0: \qquad \Delta\Phi^{(1)}=0;\quad \Delta\varphi_2^{(1)}=0,$$

$$z<0: \qquad \Delta\varphi_1^{(1)}=0,$$

$$z=0:$$

$$-\rho\xi^{(1)}-\rho\,\frac{\partial\varphi_2^{(1)}}{\partial T_0}+\xi^{(1)}+\frac{\partial\varphi_1^{(1)}}{\partial T_0}-\frac{E_0}{4\pi}\,\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial z}+\frac{\partial^2\xi^{(1)}}{\partial x^2}=0,$$

$$\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial T_0}-\frac{\partial\varphi_1^{(1)}}{\partial z}=0;\quad \frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial T_0}-\frac{\partial\varphi_2^{(1)}}{\partial z}=0;\quad \Phi^{(1)}-E_0\xi^{(1)}=0,$$

$$z\to\infty: \qquad \nabla\Phi^{(1)}\to 0;\quad \nabla\varphi_2^{(1)}\to 0,$$

$$z\to-\infty: \qquad \nabla\varphi_1^{(1)}\to 0.$$

При решении задачи порядка малости отыскивются аналитические выражения для $\xi^{(1)}(x,t)$, $\Phi^{(1)}(\mathbf{r},t)$, $\varphi_1^{(1)}(\mathbf{r},t)$, $\varphi_2^{(1)}(\mathbf{r},t)$, а также дисперсионное уравнение, имеющее вид

$$\omega^2\equiv-\left[\frac{k}{(1+\rho)}\left((\rho-1)+Wk-k^2\right)\right];\quad W=\frac{\varepsilon_*E_0^2}{4\pi\sqrt{\rho_1 g\sigma}}.$$

Параметр W, определяемый как отношение давления электрического поля на границу раздела к капиллярному давлению под искривленной волновым движением границей, характеризует устойчивость поверхности раздела сред по отношению к однородно распределенному по ней электрическому заряду (при $\rho_2=0$ его называют параметром Тонкса–Френкеля).

2b. Исследование дисперсионного соотношения

Критические условия реализации неустойчивости границы раздела сред (критические величины волнового числа k и параметра W) по отношению к гравитационным и электрическим силам определяется условиями

$$\omega^2 = 0; \quad \frac{\partial \omega}{\partial k} = 0.$$

Из первого условия следует, что правая часть дисперсионного уравнения обращается в нуль при $k = k_*$, где

$$k_* = \frac{1}{2}\left(W + \sqrt{W^2 + 4(\rho - 1)}\right)$$

и есть критическое для реализации неустойчивости значение волнового числа, определяющее правую границу диапазона волновых чисел неустойчивости волн $0 \leq k \leq k_*$ (рис. 1). Несложно видеть, что при достаточно больших значениях параметра W (когда $W \gg 4(\rho - 1)$) критическая величина волнового числа определится величиной параметра W:

$$k_* \approx W.$$

Для длинных волн при $0 < k < k_*$ выполняется соотношение: $\omega^2 < 0$ (рис. 2), и следовательно, виртуальные волновые возмущения границы раздела с волновыми числами из этого диапазона экспоненциально нарастают со временем. Для коротких волн с волновыми числами $k > k_*$ квадрат частоты положителен: $\omega^2 > 0$, а волновые виртуальные возмущения границы раздела с волновыми числами из указанного диапазона не будут приводить к неустойчивости.

Поскольку нас интересуют именно неустойчивые решения, дальнейший анализ проведем в диапазоне волновых чисел $0 < k < k_*$, а дисперсионное уравнение перепишем следующим образом:

$$\omega^2 = \omega_*^2 i^2 \Rightarrow \omega - i\gamma,$$

$$\gamma^2 \equiv \left[\frac{k}{(1+\rho)}\left((\rho - 1) + Wk - k^2\right)\right],$$

где γ имеет смысл инкремента неустойчивости. Из (5) видно, что величина инкремента растет с увеличением параметра W. Приравняв нулю производную от инкремента по волновому числу, несложно найти выражение для волнового числа волны, обладающей максимальным инкрементом

$$k_{\max} = \frac{1}{3}\left(W + \sqrt{W^2 + 3(\rho - 1)}\right).$$

Видно, что инкремент увеличивается с ростом параметра W, и при больших значениях параметра W, когда $W \gg 4(\rho - 1)$, зависимость волнового числа волны с максимальным инкрементом от параметра W становится линейной $k_{\max} \approx 2W/3$. Величина инкремента перестает

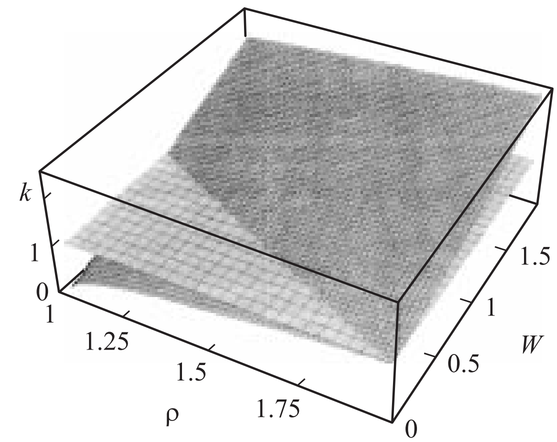

Рис. 1. Зависимость критического безразмерного волнового числа k от отношения плотностей $\rho \geq 1$ и величины параметра Тонкса–Френкеля W, пересеченная плоскостью $k = 1$.

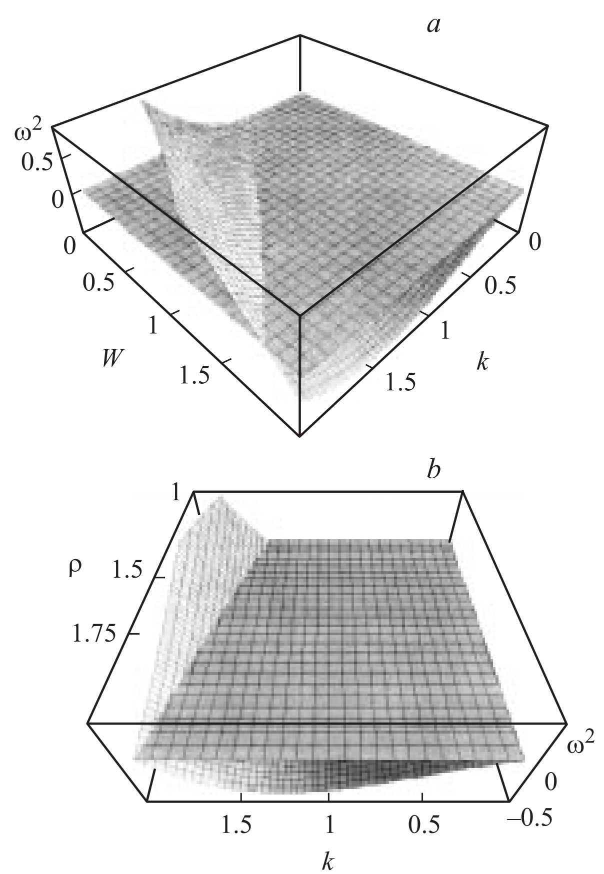

Рис. 2. Пересеченная плоскостью $\omega^2 = 0$ зависимость квадрата безразмерной частоты ω^2 от безразмерного волнового числа k и a — параметра Тонкса–Френкеля W при $\rho = 1.5$; b — отношения плотностей $\rho \geq 1$ при $W = 1.5$.

зависеть от волнового числа, а его зависимость от параметра W и отношения плотностей ρ становится более простой:

$$\gamma \approx \sqrt{(\rho - 1)W/(\rho + 1)}.$$

Из сказанного ясно, что увеличение плотности поверхностного заряда на границе раздела сред будет приводить к уменьшению длины наиболее неустойчивой волны и к увеличению инкремента ее неустойчивости.

Выражения для профиля волны, потенциалов полей скоростей и электростатического потенциала в первом порядке малости отыскиваются в виде (черта над символом означает комплексное сопряжение)

$$\xi^{(1)}(x,T_0)=\left(\frac{1}{2}\zeta\exp(ikx)+\frac{1}{2}\bar{\zeta}\exp(-ikx)\right)\exp(\gamma T_0),$$

$$\varphi_1^{(1)}(\mathbf{r},t)=-\frac{\gamma}{2k}\zeta\exp(-kz)\exp(ikx)\exp(\gamma T_0)$$
$$+\frac{\gamma}{2k}\bar{\zeta}\exp(-kz)\exp(-ikx)\exp(\gamma T_0);$$

$$\varphi_2^{(1)}(\mathbf{r},t)=\frac{\gamma}{2k}\zeta\exp(kz)\exp(ikx)\exp(\gamma T_0)$$
$$-\frac{\gamma}{2k}\bar{\zeta}\exp(kz)\exp(-ikx)\exp(\gamma T_0);$$

$$\Phi^{(1)}(\mathbf{r},t)=\frac{E_0}{2}\zeta\exp(-kz)\exp(ikx)\exp(\gamma T_0)$$
$$+\frac{E_0}{2}\bar{\zeta}\exp(-kz)\exp(-ikx)\exp(\gamma T_0);$$

$$\zeta=\zeta(T_1,T_2,T_3). \quad (6)$$

2c. Задача второго порядка малости

Математическая формулировка задачи второго порядка малости имеет вид

$$z>0:\qquad \Delta\Phi^{(2)}=0;\quad \Delta\varphi_2^{(2)}=0,$$

$$z<0:\qquad \Delta\varphi_1^{(2)}=0,$$

$$z=0:$$

$$-\rho\xi^{(2)}-\rho\frac{\partial\varphi_2^{(2)}}{\partial T_0}+\xi^{(2)}+\frac{\partial\varphi_1^{(2)}}{\partial T_0}-\frac{E_0}{4\pi}\frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial z}+\frac{\partial^2\xi^{(2)}}{\partial x^2}=\Lambda_{21},$$

$$\frac{\partial\xi^{(2)}}{\partial T_0}-\frac{\partial\varphi_1^{(2)}}{\partial z}=\Lambda_{22};\qquad \frac{\partial\xi^{(2)}}{\partial T_0}-\frac{\partial\varphi_2^{(2)}}{\partial z}=\Lambda_{23};$$

$$\Phi^{(2)}-E_0\xi^{(2)}=\Lambda_{24},$$

$$z\to\infty:\qquad \nabla\Phi^{(2)}\to 0;\quad \nabla\varphi_2^{(2)}\to 0,$$

$$z\to-\infty:\qquad \nabla\varphi_1^{(2)}\to 0,$$

где функции неоднородностей в правых частях граничных условий при $z=0$ имеют вид

$$\Lambda_{21}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi_1^{(1)}}{\partial z}\right)^2+\frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial\varphi_2^{(1)}}{\partial z}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi_1^{(1)}}{\partial x}\right)^2$$
$$+\frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial\varphi_2^{(1)}}{\partial x}\right)^2-\frac{\partial\varphi_1^{(1)}}{\partial T_1}+\rho\frac{\partial\varphi_2^{(1)}}{\partial T_1}-\xi^{(1)}\frac{\partial^2\varphi_1^{(1)}}{\partial T_0\partial z}$$
$$+\rho\xi^{(1)}\frac{\partial^2\varphi_2^{(1)}}{\partial T_0\partial z}-\frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial z}\right)^2-\frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial x}\right)^2$$
$$+\frac{E_0}{4\pi}\xi^{(1)}\frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial z^2};$$

$$\Lambda_{22}=-\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial T_1}+\xi^{(1)}\frac{\partial^2\varphi_1^{(1)}}{\partial z^2}-\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1^{(1)}}{\partial x},$$

$$\Lambda_{23}=-\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial T_1}+\xi^{(1)}\frac{\partial^2\varphi_2^{(1)}}{\partial z^2}-\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial x}\frac{\partial\varphi_2^{(1)}}{\partial x},$$

$$\Lambda_{24}=-\xi^{(1)}\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial z}.$$

Решение задачи второго порядка малости для профиля волны, потенциалов полей скоростей и электростатического потенциала имеет вид

$$\xi^{(2)}(x,t)=\Omega_{21}\left(\frac{1}{2}\zeta^2\exp(2ikx)+\frac{1}{2}\bar{\zeta}^2\exp(-2ikx)\right)$$
$$\times\exp(2\gamma t),$$

$$\Omega_{21}=k\big((\rho-1)(k^2+2Wk-(\rho-1)\big)/\Xi_1;$$

$$\varphi_1^{(2)}=-\frac{1}{2}\Omega_{22}\big(i\zeta^2\exp(2ikx)-i\bar{\zeta}^2\exp(-2ikx)\big)$$
$$\times\exp(2\gamma t)\exp(-2kz);$$

$$\Omega_{22}=-\gamma\big((1+3\rho)\alpha^2k^2+2W\alpha k+2(\rho-1)\big)/\Xi_1;$$

$$\varphi_2^{(2)}=\frac{1}{2}\Omega_{23}\big(i\zeta^2\exp(2ikx)-i\bar{\zeta}^2\exp(-2ikx)\big)$$
$$\times\exp(2\gamma t)\exp(2kz);$$

$$\Omega_{23}=-\gamma\big((3+\rho)\alpha^2k^2-2W\alpha k+2\rho(\rho-1)\big)/\Xi_1;$$

$$\Phi^{(2)}=\frac{kE_0}{2}\zeta\bar{\zeta}+\frac{kE_0}{2}\Omega_{24}\big(\zeta^2\exp(2ikx)+\bar{\zeta}^2\exp(-2ikx)\big)$$
$$\times\exp(2\gamma t)\exp(-2kz);$$

$$\Omega_{24}=-\big((1+3\rho)\alpha^2k^2+2W\alpha k+2(\rho-1)\big)/\Xi_1;$$

$$\Xi_1\equiv-2(1+\rho)\big[(\rho-1)+2k^2\big]. \quad (7)$$

2d. Задача третьего порядка малости

Математическая формулировка задачи третьего порядка малости имеет вид

$$z>0: \qquad \Delta\Phi^{(3)}=0; \quad \Delta\varphi_2^{(3)}=0,$$

$$z<0: \qquad \Delta\varphi_1^{(3)}=0,$$

$$z=0:$$

$$-\rho\xi^{(3)}-\rho\frac{\partial\varphi_2^{(3)}}{\partial T_0}+\xi^{(3)}+\frac{\partial\varphi_1^{(3)}}{\partial T_0}-\frac{E_0}{4\pi}\frac{\partial\Phi^{(3)}}{\partial z}+\frac{\partial^2\xi^{(3)}}{\partial x^2}=\Lambda_{31},$$

$$\frac{\partial\xi^{(3)}}{\partial T_0}-\frac{\partial\varphi_1^{(3)}}{\partial z}=\Lambda_{32}; \qquad \frac{\partial\xi^{(3)}}{\partial T_0}-\frac{\partial\varphi_2^{(3)}}{\partial z}=\Lambda_{33};$$

$$\Phi^{(3)}-E_0\xi^{(3)}=\Lambda_{34},$$

$$z\to\infty: \qquad \nabla\Phi^{(3)}\to 0; \quad \nabla\varphi_2^{(3)}\to 0,$$

$$z\to-\infty: \qquad \nabla\varphi_1^{(3)}\to 0.$$

Выражения для функций неоднородностей Λ_{31}, Λ_{32}, Λ_{33}, Λ_{34} в правых частях граничных условий на поверхности раздела, определяющиеся решениями первого и второго порядков малости, имеют вид

$$\Lambda_{31}=\frac{3}{2}\left(\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2\xi^{(1)}}{\partial x^2}-\frac{\partial\varphi_1^{(1)}}{\partial z}\frac{\partial\varphi_1^{(2)}}{\partial z}+\rho\frac{\partial\varphi_2^{(1)}}{\partial z}\frac{\partial\varphi_2^{(2)}}{\partial z}$$
$$-\xi^{(1)}\frac{\partial\varphi_1^{(1)}}{\partial z}\frac{\partial^2\varphi_1^{(1)}}{\partial z^2}+\rho\xi^{(1)}\frac{\partial\varphi_2^{(1)}}{\partial z^2}\frac{\partial^2\varphi_2^{(1)}}{\partial z^2}-\frac{\partial\varphi_1^{(1)}}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1^{(2)}}{\partial x}$$
$$+\rho\frac{\partial\varphi_2^{(1)}}{\partial x}\frac{\partial\varphi_2^{(2)}}{\partial x}-\xi^{(1)}\frac{\partial\varphi_1^{(1)}}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi_1^{(1)}}{\partial z\partial x}+\rho\xi^{(1)}\frac{\partial\varphi_2^{(1)}}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi_2^{(1)}}{\partial z\partial x}$$
$$-\frac{\partial\varphi_1^{(1)}}{\partial T_2}+\rho\frac{\partial\varphi_2^{(1)}}{\partial T_2}-\frac{\partial\varphi_1^{(2)}}{\partial T_1}+\rho\frac{\partial\varphi_2^{(2)}}{\partial T_1}-\xi^{(1)}\frac{\partial^2\varphi_1^{(1)}}{\partial T_1\partial z}$$
$$+\rho\xi^{(1)}\frac{\partial^2\varphi_2^{(1)}}{\partial T_1\partial z}-\xi^{(2)}\frac{\partial^2\varphi_1^{(1)}}{\partial T_0\partial z}+\rho\xi^{(2)}\frac{\partial^2\varphi_2^{(1)}}{\partial T_0\partial z}-\xi^{(1)}\frac{\partial^2\varphi_1^{(2)}}{\partial T_0\partial z}$$
$$+\rho\xi^{(1)}\frac{\partial^2\varphi_2^{(2)}}{\partial T_0\partial z}-\frac{1}{2}(\xi^{(1)})^2\frac{\partial^3\varphi_1^{(1)}}{\partial T_0\partial z^2}+\frac{\rho}{2}(\xi^{(1)})^2\frac{\partial^3\varphi_2^{(1)}}{\partial T_0\partial z^2}$$
$$-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial z}\frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial z}+\frac{E_0}{4\pi}\xi^{(2)}\frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial z^2}-\frac{1}{4\pi}\xi^{(1)}\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial z}\frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial z^2}$$
$$+\frac{E_0}{4\pi}\xi^{(1)}\frac{\partial^2\Phi^{(2)}}{\partial z^2}+\frac{E_0}{8\pi}(\xi^{(1)})^2\frac{\partial^3\Phi^{(1)}}{\partial z^3}-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial x}\frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial x}$$
$$-\frac{1}{4\pi}\xi^{(1)}\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial x}\frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial x\partial z};$$

$$\Lambda_{32}=-\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial T_2}-\frac{\partial\xi^{(2)}}{\partial T_1}+\xi^{(2)}\frac{\partial^2\varphi_1^{(1)}}{\partial z^2}+\xi^{(1)}\frac{\partial^2\varphi_1^{(2)}}{\partial z^2}$$
$$+\frac{1}{2}(\xi^{(1)})^2\frac{\partial^3\varphi_1^{(1)}}{\partial z^3}-\frac{\partial\xi^{(2)}}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1^{(1)}}{\partial x}-\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1^{(2)}}{\partial x}$$
$$-\xi^{(1)}\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi_1^{(1)}}{\partial x\partial z};$$

$$\Lambda_{33}=-\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial T_2}-\frac{\partial\xi^{(2)}}{\partial T_1}+\xi^{(2)}\frac{\partial^2\varphi_2^{(1)}}{\partial z^2}+\xi^{(1)}\frac{\partial^2\varphi_2^{(2)}}{\partial z^2}$$
$$+\frac{1}{2}(\xi^{(1)})^2\frac{\partial^3\varphi_2^{(1)}}{\partial z^3}-\frac{\partial\xi^{(2)}}{\partial x}\frac{\partial\varphi_2^{(1)}}{\partial x}-\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial x}\frac{\partial\varphi_2^{(2)}}{\partial x}$$
$$-\xi^{(1)}\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi_2^{(1)}}{\partial x\partial z};$$

$$\Lambda_{34}=-\xi^{(2)}\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial z}-\xi^{(1)}\frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial z}-\frac{1}{2}(\xi^{(1)})^2\frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial z^2}.$$

В результате решения задачи третьего порядка малости отыскиваются нелинейные поправки

$$\xi^{(3)}(x,t)=\Omega_{31}\left(\frac{1}{2}\xi^3\exp(3ikx)+\frac{1}{2}\bar{\xi}^3\exp(-3ikx)\right)$$
$$\times\exp(3\gamma t),$$

$$\Omega_{31}=k^2\Big(2k^4(3\rho^2-10\rho+3)+32W^2k^2-(\rho-1)$$
$$\times(21\rho^2-22\rho+21)k^2+32Wk(\rho-1)[k^2-(\rho-1)]$$
$$+(\rho-1)^2[6\rho^2-20\rho+6]\Big)/\Xi_1\Xi_2;$$

$$\varphi_1^{(3)}=\frac{1}{2}\Omega_{32}\xi\bar{\xi}\big(i\xi\exp(ikx)-i\bar{\xi}\exp(-ikx)\big)\exp(\gamma t)$$
$$\times\exp(-kz)+\frac{1}{2}\Omega_{33}\big(i\xi^3\exp(3ikx)-i\bar{\xi}^3\exp(-3ikx)\big)$$
$$\times\exp(3\gamma t)\exp(-3kz);$$

$$\Omega_{32}=\frac{gk^2}{\omega_0}\Big([22+4\rho-2\rho^2](\rho-1)^2+\alpha^2k^2\big[8W^2(5+3\rho)$$
$$-(\rho-1)(23-34\rho-25\rho^2)\big]-2\alpha^4k^4(-5+10\rho+7\rho^2)$$
$$-2W\alpha k\big[(\rho-1)(-27-6\rho+5\rho^2)$$
$$+8\alpha^2k^2(\rho-3)^2\big]\Big)/8(1+\rho)^2\Xi_1;$$

$$\Omega_{33}=\gamma k\Big(32W^2\alpha^2k^2-8(\rho-3)(\rho-1)^2-\alpha^2k^2(\rho-1)$$
$$\times(-33-82\rho+15\rho^2)+2\alpha^4k^4(3+26\rho+39\rho^2)$$
$$+8W\alpha k\big[-(\rho-7)(\rho-1)+\alpha^2k^2(5+13\rho)\big]\Big)/\Xi_1\Xi_2;$$

$$\varphi_2^{(3)}=\frac{1}{2}\Omega_{34}\xi\bar{\xi}\big(i\xi\exp(ikx)-i\bar{\xi}\exp(-ikx)\big)\exp(\gamma t)$$
$$\times\exp(kz)+\frac{1}{2}\Omega_{35}\big(i\xi^3\exp(3ikx)-i\bar{\xi}^3\exp(-3ikx)\big)$$
$$\times\exp(3\gamma t)\exp(3kz);$$

$$\Omega_{34}=\frac{gk^2}{\gamma}\Big([2-4\rho-22\rho^2](\rho-1)^2+8W^2\alpha^2k^2(1+3\rho)$$
$$+2\alpha^4k^4(7+10\rho-5\rho^2)-\alpha^2k^2(\rho-1)(25+34\rho-23\rho^2)$$
$$+2W\alpha k\big[-(-9-18\rho+7\rho^2)(\rho-1)$$
$$+4\alpha^2k^2(-3-6\rho+\rho^2)\big]\Big)/8(1+\rho)^2\Xi_1;$$

$$\Omega_{35}=-\gamma k\Big(32W^2\alpha^2k^2+8\rho(3\rho-1)(\rho-1)^2$$
$$-\alpha^2k^2(\rho-1)(15-82\rho-33\rho^2)$$
$$+2\alpha^4k^4(39+26\rho+3\rho^2)-8W\alpha k\big[(7\rho-1)(\rho-1)$$
$$+\alpha^2k^2(13+5\rho)\big]\Big)/\Xi_1\Xi_2;$$

$$\Phi^{(3)}=\frac{E_0}{2}\,\Omega_{36}\,\xi\bar{\xi}\big(\xi\exp(ikx)+\bar{\xi}\exp(-ikx)\big)\exp(\gamma t)$$
$$\times\exp(-kz)+\frac{E_0}{2}\,\Omega_{37}\big(\xi^3\exp(3ikx)+\bar{\xi}^3\exp(-3ikx)\big)$$
$$\times\exp(3\gamma t)\exp(-3kz);$$

$$\Omega_{36}=-k^2\big(4\alpha^2k^2(2\rho-1)+12W\alpha k$$
$$+(5\rho-7)(1-\rho)\big)/4\Xi_1;$$

$$\Omega_{37}=k^2\Big(32W^2\alpha^2k^2-8(\rho-3)(\rho-1)^2+2\alpha^4k^4(3+26\rho$$
$$+39\rho^2)+\alpha^2k^2(\rho-1)(-33-82\rho+15\rho^2)$$
$$+8W\alpha k\big[-(\rho-7)(\rho-1)+\alpha^2k^2(5+13\rho)\big]\Big)/\Xi_1\Xi_2;$$

$$\Xi_2\equiv-8(1+\rho)\big[(\rho-1)+3k^2\big]. \qquad (8)$$

При прешении задачи третьего порядка малости, как результат, также получается зависимость амплитуды волны ξ от временны́х масштабов T_2 и T_3

$$\xi(T_1,T_2)=\frac{1}{\sqrt{2\beta_1^2(T_3)\delta T_2+1}}\,\beta_1(T_3)\exp\big(i\beta_2(T_3)\big),$$

$$\delta\equiv k^3\big(16W^2k^2+16Wk(\rho-1)\big[k^2-(\rho-1)\big]$$
$$+8(\rho-1)^2(1+\rho^2)-k^2(\rho-1)(1-30\rho+\rho^2)$$
$$+2k^4(1-6\rho+\rho^2)\big)/8\gamma(1+\rho)^2\Xi_1. \qquad (9)$$

Здесь $\beta_2(T_3)$ — функции, которые могут зависеть только от T_3, явный вид которых определяется при решении задачи более высокого порядка малости.

Общий вид зависимости $\delta=\delta(k,\rho)$ при $W=\mathrm{const}$ проиллюстрирован на рис. 3. Видно, что по абсолютной величине этот множитель невелик, но может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

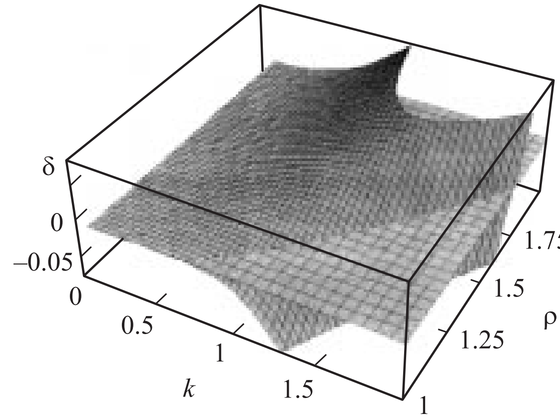

Рис. 3. Зависимость величины безразмерного множителя δ от безразмерного волнового числа k и отношения плотностей $\rho\geq 1$ при значении $W=0.5$, пересеченная плоскостью $\delta=0$.

2e. Задача четвертого порядка малости

Математическая формулировка задачи четвертого порядка малости с точностью до обозначения совпадает с формулировкой задачи третьего порядка малости. Функции неоднородности в правых частях граничных условий имеют весьма громоздкий вид и не приводятся. На этом этапе определению подлежат неизвестные функции $\beta_1(T_3)$, $\beta_2(T_3)$, которые в итоге отыскиваются в виде

$$\beta_1(T_3)=1/k,\quad \beta_2(T_3)=0,$$

следовательно, в (9)

$$\xi(T_2)=1/\sqrt{2\delta T_2+k^2}.$$

3. Запись финального результата

Окончательное аналитическое асимптотическое выражение для профиля неустойчивой волны на однородно заряженной поверхности раздела жидкостей, выписанное с точностью до слагаемых третьего порядка малости, имеет вид

$$\xi(x,t)=\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\delta\varepsilon^2t+k^2}}\cos(kx)\exp(\gamma t)+\frac{\varepsilon^2}{k^2}\,\Omega_{21}\cos(2kx)$$
$$\times\exp(2\gamma t)+\frac{\varepsilon^3}{k^3}\,\Omega_{31}\cos(3kx)\exp(3\gamma t)+O(\varepsilon^4).$$

4. Анализ полученных результатов

На рис. 4 приведены контуры образующей границы раздела в различные моменты времени от начала реализации неустойчивости Рэлея−Тейлора для различных значений волновых чисел, иллюстрирующие временну́ю эволюцию неустойчивости по отношению к гравитационному и электрическому полям границы раздела жидкостей. На рис. 4, *а* приведен профиль поверхности

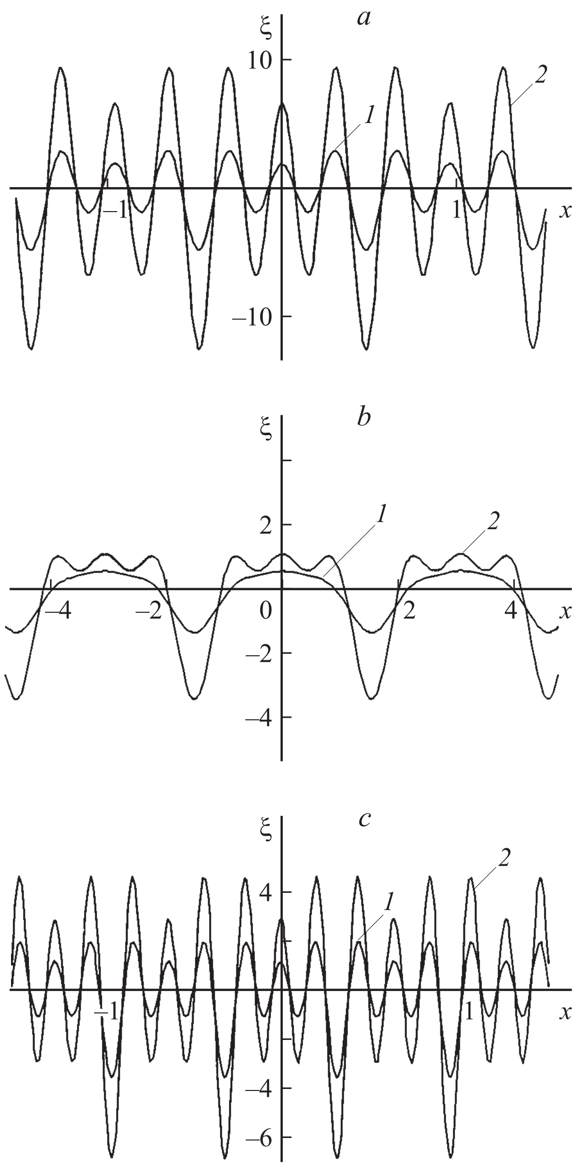

Рис. 4. Профиль неустойчивой границы раздела сред, рассчитанный при различных значениях безразмерного времени, при a — $\varepsilon = 0.001$, $W = 10$, $\rho = 1.5$, $k = 6.67$ (кривая *1* соответствует безразмерному времени $t = 0.8$, *2* — 0.85); b — $\varepsilon = 0.01$, $W = 2$, $\rho = 1.5$, $k = 2$ (*1* — $t = 5$, *2* — 7); c — $\varepsilon = 0.01$, $W = 10$, $\rho = 1.5$, $k = 10$ (*1* — $t = 4.6$, *2* — 4.8).

раздела сред, определенный неустойчивой волной с максимальным при заданном отношении плотностей и величине параметра W значением инкремента неустойчивости. На рис. 4, b и c приведены профили поверхности раздела сред, определенные неоптимальными в смысле величины инкремента волнами: на рис. 4, b взято волновое число меньшее $k_{\max}$, а на рис. 4, c — большее $k_{\max}$. Из сравнения приведенных фигур видно, что амплитуда неустойчивости волны с максимальным инкрементом увеличивается гораздо быстрее, чем у волн с меньшими и большими значениями волновых чисел. Кроме того, из рис. 4 несложно видеть, что рост параметра Тонкса–Френкеля W приводит к уменьшению характерного линейного масштаба, на котором происходит протекание тяжелой жидкости в легкую. Указанное обстоятельство означает более однородное перемешивание жидкостей, разделенных заряженной поверхностью, при реализации неустойчивости Рэлея–Тейлора, чем при отсутствии заряда на границе раздела сред, и может иметь серьезные последствия для всех практических приложений феномена неустойчивости Рэлея–Тейлора.

5. Короткие нелинейные капиллярные волны на границе раздела сред в области $k > k_*$

Как было отмечено выше, мелкомасштабные виртуальные возмущения границы раздела сред не приводят к протеканию тяжелой жидкости в легкую, и на границе раздела сред может существовать коротковолновое (капиллярное) волновое движение. Асимптотический аналитический расчет параметров соответствующих нелинейных волн проводится по использованной выше схеме, а потому, не повторяя его, выпишем готовое выражение для профиля нелинейной волны с точностью до слагаемых третьего порядка малости

$$\xi(x,t) = \frac{\varepsilon}{k}\cos\big(kx - (\omega_0 + \chi\omega_0^{-1}\varepsilon^2)t\big) + \frac{\varepsilon^2}{k^2}\,\Omega_{21}$$

$$\times\cos(2kx - 2\omega_0 t) + \frac{\varepsilon^3}{k^3}\,\Omega_{31}\cos(3kx - 3\omega_0 t) + O(\varepsilon^4),$$

$$\chi \equiv -k\big(16W^2k^2 + 16Wk(\rho-1)\big[k^2 - (\rho-1)\big]$$

$$+ 8(\rho-1)^2(1+\rho^2) - k^2(\rho-1)(1-30\rho+\rho^2)$$

$$+ 2k^4(1-6\rho+\rho^2)\big)/8(1+\rho)^2\Xi_1.$$

Устойчивость границы нарушается, когда квадрат частоты проходит через нуль в область отрицательных значений

$$\omega^2 \equiv \big[\omega_0 + \chi\omega_0^{-1}\varepsilon^2\big]^2 \le 0.$$

В третьем порядке малости это условие запишется в виде

$$\omega^2 = (\omega_0 + \chi\omega_0^{-1}\varepsilon^2)^2 \cong \omega_0^2 + 2\chi\varepsilon^2 \le 0.$$

Видно, что знак нелинейной поправки к частоте определяет влияние нелинейного взаимодействия на устойчивость границы раздела сред по отношению к распределенному на ней электрическому заряду, приводя либо к увеличению устойчивости при положительных χ, либо к снижению устойчивости при отрицательных χ (на рис. 5 приведен общий ход зависимости $\chi = \chi(k, W)$). Нелинейное взаимодействие волн приводит к изменению критической для реализации неустойчивости Тонкса–Френкеля величины безразмерного параметра W, который характеризует устойчивость

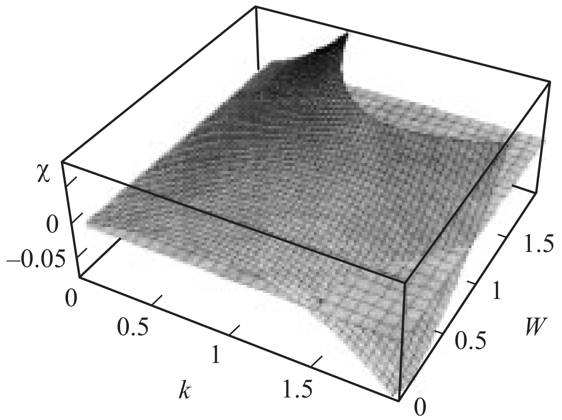

Рис. 5. Зависимость величины безразмерного множителя χ от безразмерного волнового числа k и параметра W при $\rho = 1.5$, пересеченная плоскостью $\chi = 0$.

плоской однородно заряженной поверхности электропроводной жидкости по отношению к поверхностному заряду и безразмерного волнового числа k наиболее неустойчивой волны.

Из выражений для коэффициентов Ω_{21}, Ω_{31}, δ несложно видеть, что формально они имеют резонансный вид, а положения резонансов определяются условиями: $\Xi_1 = 0$ и $\Xi_2 = 0$. Однако волновые числа резонансно взаимодействующих волн лежат в области $0 \leq k \leq k_*$, где волнового движения как такового не существует.

Заключение

Наличие электрического заряда на границе раздела в поле сил тяжести двух несмешивающихся жидкостей различных плотностей в ситуации, когда более плотная жидкость находится над менее плотной жидкостью, приводит к уменьшению характерного линейного масштаба, на котором более плотная жидкость протекает в менее плотную.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 05-08-01147-а и 06-01-00066-а.

Список литературы

[1] *Book D.L.* // Encyclopedia of Fluid Mechanics. Vol. 1. Flow Phenomena and Mesurement. Huston–London–Paris–Tokyo: Gulf Publishing Company, 1986. P. 213–236.

[2] *Sapir M., Havazelet D.* // J. Phys. D: Appl. Phys. 1985. Vol. 18. P. 41–46.

[3] *Kartoon D., Oron D., Arazi L., Shwarts D.* // Laser and Particle Beams. 2003. Vol. 21. P. 327–334.

[4] *Dimonte G.* // Phys. Rev. E. 2004. Vol. 69. N 5. P. 056 305-1–056 305-14.

[5] *Clark D.S.* // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 71. N 5. P. 055 302-1–055 302-4.

[6] *Диденкулов И.Н., Селивановский Д.А., Семенов В.Е., Соколов И.В.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1999. Т. 42. № 2. С. 183–197.

[7] *Goncharov V.N., Li D.* // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 71. N 4. P. 046 306-1–046 306-9.

[8] *Григороев А.И., Земсков А.А., Лазарянц А.Э.* // Электронная обработка материалов. 1991. № 5. С. 35–38.

[9] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Святченко А.А.* // Препринт ИМ РАН. № 25. Ярославль, 1993. 118 с.

[10] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–2.

[11] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 6. С. 102–109.

[12] *Климов А.В., Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 1. С. 32–39.