01;03

О массопереносе, связанном с нелинейным капиллярно-гравитационным волновым движением на поверхности вязкой жидкости

© А.В. Климов, А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 4 июня 2007 г.)

Получено аналитическое асимптотическое выражение для горизонтального потока жидкости, связанного с периодической нелинейной капиллярной волной в слое вязкой жидкости конечной глубины, имеющее второй порядок малости по отношению амплитуды волны к ее длине. Выяснилось, что поток жидкости определяется нелинейной компонентой вихревой части поля скоростей, а его величина независимо от толщины слоя увеличивается с ростом вязкости жидкости и с уменьшением длины волны. В тонких слоях жидкости величина потока быстро уменьшается во времени от максимального значения с ростом вязкости, длины волны и поверхностной плотности заряда. Если поверхность жидкости заряжена, то при приближении поверхностной плотности заряда к критической в смысле реализации неустойчивости Тонкса–Френкеля величина горизонтального потока жидкости быстро уменьшается.

PACS: 66.20.+d, 47.35.Pq

Введение

Еще в середине XIX в. Стокс в приближении идеальной жидкости показал, что с нелинейной волной связан поток жидкости в направлении движения волны [1]. В середине XX в. Лонгет–Хиггинс [2] обобщил исследования Стокса на случай жидкости вязкой, введя специально для этого исследования понятие пограничного слоя у свободной поверхности жидкости, поскольку аналитическое решение задачи о нелинейном периодическом волновом движении в вязкой жидкости в то время не было найдено. Однако, как показано в [3], толщина пограничного слоя в [2] была оценена с существенной погрешностью, и поля скоростей, рассчитываемые на основе приближенной теории пограничного слоя, определялись с почти стопроцентной погрешностью, отразившейся и на расчете нелинейного переноса жидкости волной. Уже в этом столетии получено аналитическое асимптотическое решение задачи о расчете периодического нелинейного капиллярно-гравитационного волновода движения в вязкой жидкости как в бесконечно глубокой [4,5], так и в жидкости конечной глубины [6,7]. В этой связи появилась возможность проведения корректного аналитического исследования потока жидкости, переносимого нелинейной волной в вязкой жидкости. Этой проблеме и посвящена настоящая работа.

1. Математическая постановка задачи

Пусть несжимаемая жидкость с массовой плотностью ρ, кинематической вязкостью ν, коэффициентом поверхностного натяжения γ заполняет в поле тяжести $\mathbf{g} \parallel -\mathbf{n}_z$ безграничный по площади слой $-d \le z \le 0$ в декартовой системе координат x, y, z (за $\mathbf{n}_z$ обозначен орт оси z). Снизу жидкость ограничена поверхностью $z = -d$ — твердым дном, на котором выполняется условие прилипания. В положительном направлении оси x бежит плоская капиллярно-гравитационная волна малой, но конечной амплитуды a (много меньшей длины волны). Над поверхностью жидкости находится вакуум. Сверху на проводящую жидкость действует электрическое поле напряженностью $\mathbf{E}_0 \parallel \mathbf{g}$. Свободная поверхность жидкости подвержена возмущениям малой амплитуды так, что ее форма представляется функцией координаты и времени: $z = \xi(x, t)$. Поверхностная плотность электрического заряда $\kappa = 4\pi E_0$ в равновесном состоянии, когда свободная поверхность жидкости совпадает с плоскостью $z = 0$, постоянна вдоль поверхности.

С учетом вышесказанного математическая формулировка задачи расчета нелинейного волнового движения имеет вид

$$-d \le z \le \xi: \quad \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{U}) \times \mathbf{U} = -\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{\rho}p + \frac{1}{2}U^2 + gz\right)$$

$$+\ \nu \Delta \mathbf{U}; \qquad \operatorname{div}\mathbf{U} = 0;$$

$$z \ge \xi: \qquad \Delta\Phi = 0;$$

$$z = \xi: \qquad \Phi = 0; \qquad \frac{\partial \xi}{\partial t} + \mathbf{U} \bullet \boldsymbol{\nabla}\xi = 0;$$

$$\boldsymbol{\tau} \bullet (\mathbf{n} \bullet \boldsymbol{\nabla})\mathbf{U} + \mathbf{n} \bullet (\boldsymbol{\tau} \bullet \boldsymbol{\nabla})\mathbf{U} = 0;$$

$$p - 2\rho\nu\mathbf{n}\bullet(\mathbf{n}\bullet\nabla)\mathbf{U} + \frac{(\nabla\Phi)^2}{8\pi} = -\gamma\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\left(1+\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\right)^{-3/2};$$

$$z=-d: \quad \mathbf{U}=0; \qquad z\to\infty: \quad \nabla\Phi = -E_0\cdot\mathbf{n}_z;$$

где $\mathbf{U}(\mathbf{r},t)$ — поле скоростей и $p(\mathbf{r},t)$ — гидродинамическое давление внутри жидкости; $\Phi(\mathbf{r},t)$ — потенциал электрического поля; $\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\tau}$ представляют собой соответственно единичные вектора нормали и касательной к свободной поверхности жидкости. Аналитическое асимптотическое решение задачи ищется в рамках теории возмущений. Малый параметр, по которому будет вестись разложение, определяется отношением амплитуды волны в первом порядке приближений a к длине волны: $\varepsilon\equiv a/\lambda$.

Для однозначной разрешимости обсуждаемой задачи необходимо сформулировать еще и начальные условия, которых в соответствии с количеством и порядком производных по времени формулируемой задачи должно быть два. Однако в задачах подобного рода проблема выбора начальных условий оказывается довольно тонким вопросом, поскольку произвольное заданное начальное условие может привести к неопределенному увеличению громоздкости решения. Поэтому при расчетах нелинейного периодического волнового движения на поверхности жидкости начальные условия выбираются так, чтобы аналитическое описание решения было наименее громоздким [8–10]. Фактически требование определения начального условия заменяется принципом: искать решение, наименее громоздкое в смысле математического описания.

Так, в качестве первого начального условия, как правило, используется условие, что все нелинейные поправки к профилю волны, полю скоростей, гидродинамическому давлению внутри жидкости, потенциалу электрического поля над поверхностью жидкости, имеющие вид бегущих волн и являющиеся в первом порядке приближений периодическими функциями аргумента $\theta\equiv St-kx$, являются функциями аргумента $m\theta$, где целое число $m>1$. Иными словами, принимается, что амплитудные множители при возможных нелинейных поправках к характеристикам волны с аргументом θ равны нулю.

Второе начальное условие накладывается на поле скоростей и выбирается на финальной стадии анализа таким образом, чтобы получающееся в результате решение имело наименее громоздкий вид. Для проводимого исследования существен лишь тот факт, что второе начальное условие отлично от нуля и, как показывает расчет [6,7], положительно, т. е. в начальный момент времени с волной связано поле скоростей с положительной проекцией на ось x.

В приведенной формулировке задача решена в [6,7]. Имея в виду цель проводимого в настоящей работе исследования массопереноса, обусловленного нелинейной волной, не станем выписывать найденные в [6,7] аналитические выражения для всех искомых функций ввиду их громоздкости, но приведем лишь выражение горизонтальной проекции поля скоростей течения жидкости, связанного с волной $u(\mathbf{r},t)\equiv U_x(\mathbf{r},t)$:

$$u(x,z,t) = \varepsilon u_1(x,z,t) + \varepsilon^2\big(u_2^+(x,z,t) + u_2^*(x,z,t) + \alpha^2 L(z,t)\big); \quad \alpha\equiv\sqrt{\gamma/\rho g}, \tag{1}$$

где α — капиллярная постоянная жидкости, а выражения для компонент решения u_1, u_2^+, u_2^*, L вынесены в „Приложение А“ ввиду их громоздкости. Здесь следует отметить, что громоздкость математических расчетов и получаемых результатов, на которую было сделано много ссылок выше, долгое время препятствовала аналитическому исследованию нелинейных капиллярно-гравитационных волн в вязкой жидкости, и только после появления мощных пакетов аналитических компьютерных вычислений эту трудность удалось преодолеть.

На основании (1) можно получить аналитическое выражение для горизонтального потока жидкости, связанного с нелинейной волной, бегущей по поверхности жидкости.

2. Расчет горизонтального потока, связанного с нелинейной волной

Значение горизонтального потока жидкости через плоское сечение, заданное геометрическим местом точек:

$$\Omega = \{x=x_0;\ y_0<y<y_0+\Delta y;\ z<0\},$$

где x_0, y_0, Δy — произвольные величины размерности длины, определится интегралом

$$Q(x_0,\Delta y,t) = \rho\Delta y\int_{-d}^{0} u(x_0,z,t)dz. \tag{2}$$

В качестве искомой оценки величины горизонтального потока жидкости, вызванного нелинейной волной, возьмем $Q(x_0,\Delta y,t)$, усредненную по всевозможным значениям x_0. Поскольку подынтегральная функция в (2) — горизонтальная компонента скорости – периодична по x_0 с периодом, равным длине волны λ, то искомой величиной — обозначим ее $\Phi(\Delta y,t)$ — будет значение $Q(x_0,\Delta y,t)$, усредненное по длине волны, т. е.

$$\Phi(\Delta y,t) = \frac{\rho\Delta y}{\lambda}\int_{x_0}^{x_0+\lambda}\left(\int_{-d}^{0} u(\xi,z,t)dz\right)d\xi. \tag{3}$$

Подставив (1) в (3) и проинтегрировав, получим

$$\Phi(\Delta y, t) = a^2\rho\Delta y \Bigg(\mathrm{Re}\, r_0 \exp(2\mathrm{Re}\, St)$$

$$- \frac{\nu \mathrm{Re}\, r_1}{\mathrm{Re}\, S}\Bigg(1 - \exp(2\mathrm{Re}\, St) - 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \mathrm{erfc}\left(\frac{d(2n+1)}{2\sqrt{t\nu}}\right)$$

$$+ \exp(2\mathrm{Re}\, St)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\big(\exp(2n+1)dw_0\big)$$

$$\times \mathrm{erfc}\left(\frac{d(2n+1)}{2\sqrt{t\nu}} + w_0\sqrt{t\nu}\right) + \exp\big(-(2n+1)dw_0\big)$$

$$\times \mathrm{erfc}\left(\frac{d(2n+1)}{2\sqrt{t\nu}} - w_0\sqrt{t\nu}\right)\Bigg)\Bigg)$$

$$+ \frac{\mathrm{Re}\, r_2}{w_0}\exp(2\mathrm{Re}\, St)\Bigg(\mathrm{erfc}(-w_0\sqrt{t\nu}) - \mathrm{erfc}(w_0\sqrt{t\nu})$$

$$- 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\Bigg(\exp(2ndw_0)\,\mathrm{erfc}\left(\frac{nd}{\sqrt{t\nu}} + w_0\sqrt{t\nu}\right)$$

$$+ \exp(-2ndw_0)\,\mathrm{erfc}\left(\frac{nd}{\sqrt{t\nu}} - w_0\sqrt{t\nu}\right)\Bigg)\Bigg), \tag{4}$$

где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число; S — комплексная частота волны, являющаяся решением дисперсионного уравнения

$$\mathrm{Det}\, M = 0;$$

$$M =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -i\,\frac{q}{k} & 0 \\ 0 & 1 & -i & 0 & 0 \\ -k\mathrm{Sh\,dk} & -k\mathrm{Ch\,dk} & ik\mathrm{Ch}\, dq & ik\mathrm{Sh\,dq} & S \\ -\nu(k^2+q^2)\rho\mathrm{Ch\,dk} & -\nu(k^2+q^2)\rho\mathrm{Sh\,dk} & 2i\nu\rho kq\mathrm{Sh\,dq} & 2i\nu\rho kq\mathrm{Ch\,dq} & -\frac{\rho}{k}\,\omega_0^2 \\ -2ik^2\mathrm{Sh\,dk} & -2ik^2\mathrm{Ch\,dk} & -(k^2+q^2)\mathrm{Ch\,dq} & -(k^2+q^2)\mathrm{Sh\,dq} & 0 \end{pmatrix};$$

$$\omega_0^2 = gk\left(1 + \frac{\gamma}{pg}k^2 - \frac{E_0^2}{4\pi\rho g}k\right),$$

выражения для r_0, r_1, r_2 приведены в „Приложении B“. Как и следовало ожидать, вклад в горизонтальный поток жидкости дает только нелинейная компонента вихревой части поля скоростей, $-\nu$ и $\sim a^2$ (или $\sim \varepsilon^2$). Поскольку r_0 и r_2 пропорциональны ν то в (4) коэффициент кинематической вязкости υ можно вынести за скобки, и в качестве общего множителя в выражении для потока образуется комбинация $\rho\nu$, т. е. коэффициент динамической вязкости $\eta \equiv \rho\nu$, которому и будет пропорциональна величина потока. Тем не менее коэффициент кинематической вязкости входит в определение характерного линейного масштаба изменения интенсивности вихревой части движения жидкости q^{-1} и в определение частоты волны S.

3. Анализ решения

Ниже в качестве количественной характеристики горизонтального потока жидкости будет использоваться величина $\Phi(\Delta t, t)$, определенная внутри вертикального слоя на базе геометрического места точек:

$$V_{\Delta y} = \big\{-\infty < x < \infty;\ y_0 < y < y_0 + \Delta y;\ -d < z < 0\big\};$$

при ширине слоя Δy, равной одному метру, т. е. $\Phi_*(t) \equiv \Phi(100\,\mathrm{cm}, t)$.

Нижеследующие иллюстративные расчеты проведены в предположении, что жидкостью является вода. Внешнее электрическое поле полагается отсутствующим (напряженность поля $E_0 = 0$), кроме специально оговоренных случаев. Предполагается, что температура воды (кроме специально оговоренных случаев) равна 293 K, а значения физико-химических параметров воды, важных для проводимого исследования, принимаются следующими: плотность $\rho = 0.99823\,\mathrm{g/cm^3}$, коэффициент поверхностного натяжения $\gamma = 72.8\,\mathrm{dyne/cm}$, коэффициент динамической вязкости $\eta = 0.01004P$. Амплитуды всех волн в проведенных расчетах брались равными $a = 0.001$ cm.

На рис. 1–4 приведены зависимости величины Φ_* от времени при различных значениях физико-химических параметров и внешней среды. Указанные зависимости построены для времени $0 < t < T^*$, где T^* — значение момента времени, критического для сохранения

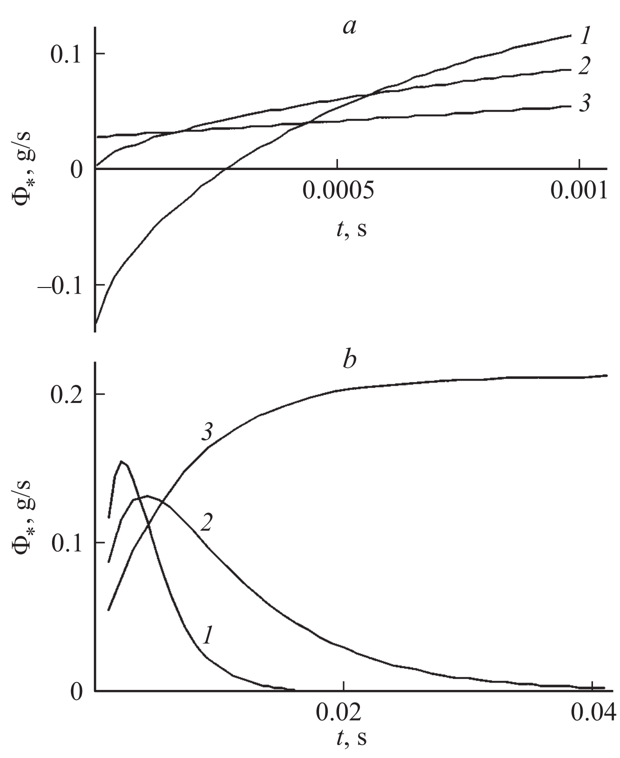

Рис. 1. Зависимости величины потока жидкости Φ_* от времени при $\lambda = 0.1$ cm, $\eta = \eta_*$ и различных значениях толщины слоя жидкости: *1* — $d = 0.008$, *2* — 0.0145 cm, *3* — ∞; *a* — на временном интервале $0 \le t \le 0.001$ s; *b* — $0 \le t \le 0.04$ s.

равномерной пригодности асимптотического выражения для горизонтальной компоненты поля скоростей (1). Временны́е интервалы, на которых иллюстрируются искомые зависимости, приведенные на рис. 1–4, указаны в секундах и на первый взгляд весьма незначительны, но при пересчете на периоды капиллярно-гравитационных волн для всех представленных зависимостей они соответствуют нескольким периодам.

На рис. 1 приведены зависимости величины Φ_* от времени для различных толщин слоя жидкости для волны фиксированной длины. Несложно видеть, что чем меньше толщина слоя жидкости, тем быстрее в начале процесса нарастает величина потока жидкости со временем и тем быстрее убывает за счет диссипации, достигнув максимума.

На рис. 2 представлена зависимость величины Φ_* от времени при различных значениях коэффициента динамической вязкости жидкости при фиксированной толщине слоя жидкости и для бесконечно глубокой жидкости. На данном рисунке в зависимостях *1* и *3* вязкость завышена или занижена по сравнению с реальным значением вязкости, которое имеет вода при температуре 293 K, что соответствует изменению величины коэффициента динамической вязкости с температурой. Последнее сделано для того, чтобы продемонстрировать характер и степень влияния вязкости на процесс увлечения массы жидкости нелинейной волной. Из рис. 2 видно, что чем больше вязкость жидкости, тем больше максимальная величина потока жидкости Φ_* (что, впрочем, легко видеть из аналитического выражения (4)) и тем выше скорость его изменения во времени: быстрее нарастает в начале процесса и быстрее убывает за счет диссипации энергии.

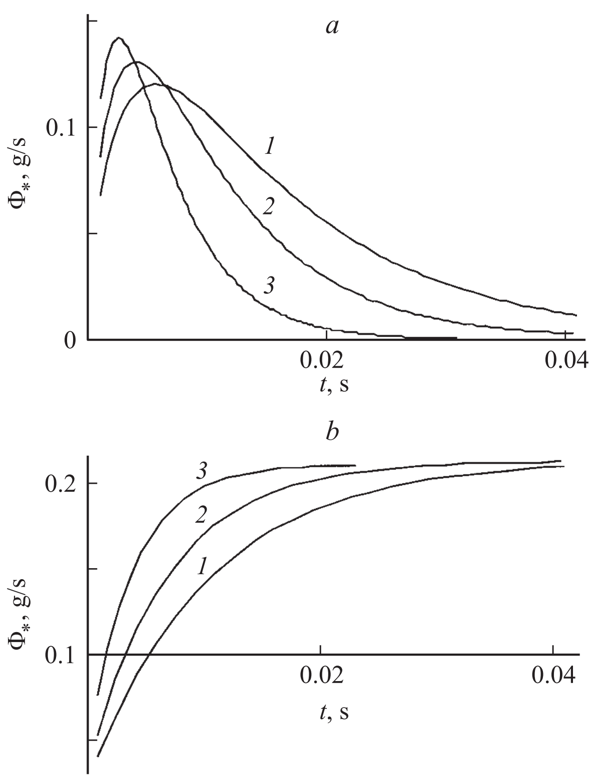

Рис. 2. Зависимости величины потока жидкости Φ_* от времени при $\lambda = 0.1$ cm различных значениях коэффициента динамической вязкости: *1* — $\eta = 0.65\eta_*$, *2* — $\eta = \eta_*$, *3* — $\eta = 1.8\eta_*$; η_* — определено при температуре 293 K; *a* — для слоя жидкости толщиной $d = 0.0145$ cm; *b* — для бесконечно глубокой жидкости.

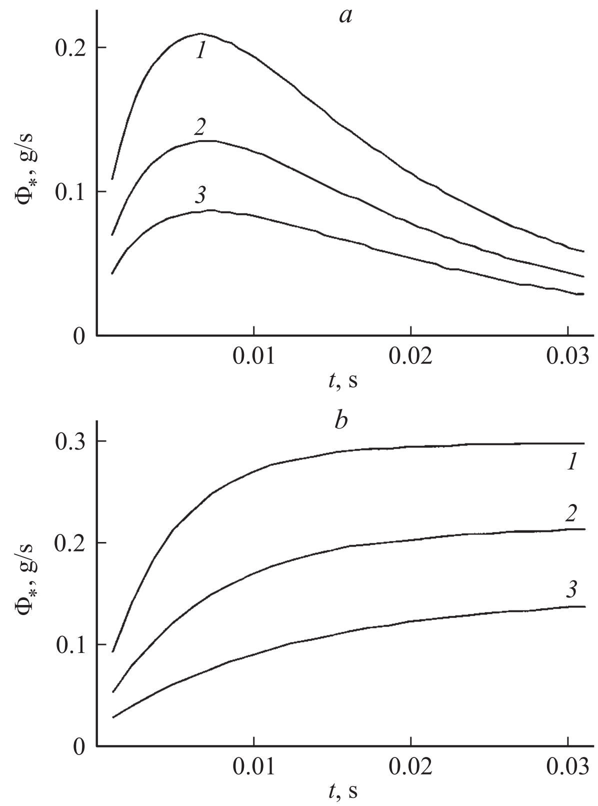

Рис. 3. Зависимости величины потока жидкости Φ_* от времени при $\eta = \eta_*$ и различных значениях длины волны: *1* — $\lambda = 0.08$, *2* — 0.1, *3* — 0.13 cm; *a* — для слоя жидкости толщиной $d = 0.02$ cm; *b* — для бесконечно глубокой жидкости.

На рис. 3 приведены зависимости величины Φ_* от времени при различных значениях длин волн. Из рис. 3 можно видеть, что независимо от толщины слоя с уменьшением длины волны растет амплитудное значение горизонтального потока жидкости Φ_*, и для волн с большей длиной волны величины потока Φ_* нарастает со временем медленнее, чем для волн с меньшей длиной волны.

На рис. 4 приведены зависимости величины потока жидкости Φ_* от времени при различных значениях параметра Тонкса–Френкеля W

$$W = E_0^2 / 4\pi\sqrt{\rho g \gamma},$$

определяемого отношением электростатического давления на свободную поверхность жидкости к давлению капиллярных сил и характеризующего устойчивость однородно заряженной поверхности электропроводной жидкости по отношению к поверхностному заряду [11].

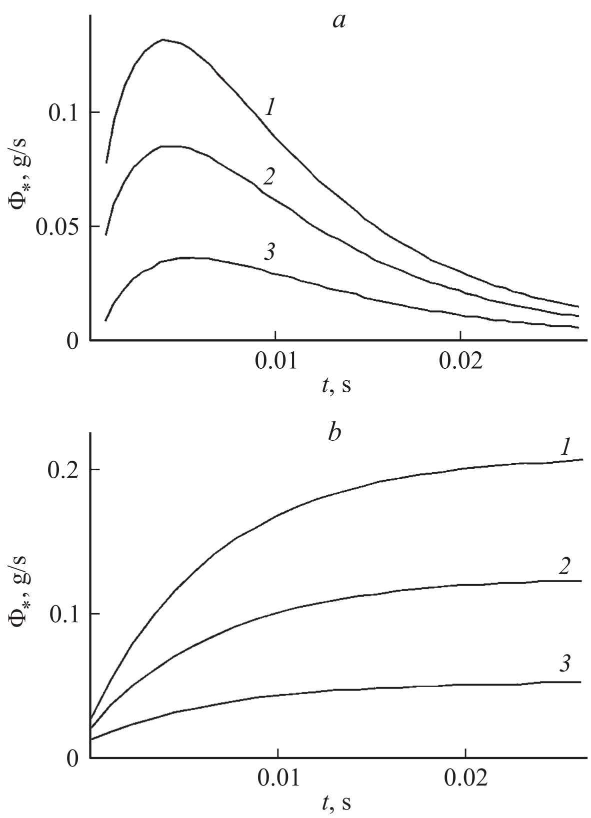

Рис. 4. Зависимости величины потока жидкости Φ_* от времени при $\lambda = 0.1$ cm, $\eta = \eta_*$ и различных значениях параметра Тонкса–Френкеля: *1* — $W = 0$, *2* — 1.28, *3* — 1.86; *a* — для слоя жидкости толщиной $d = 0.0145$ cm; *b* — для бесконечно глубокой жидкости.

Из рис. 4 видно, что независимо от толщины слоя жидкости с ростом напряженности внешнего электрического поля амплитудное значение потока жидкости и скорость его нарастания во времени снижается, т. е. электрическое поле оказывает тормозящее действие на величину горизонтального потока жидкости.

Кроме того, расчеты показывают, что с приближением значения параметра Тонкса–Френкеля к критическому для реализации неустойчивости заряженной жидкости по отношению к поверхностному заряду — неустойчивости Тонкса–Френкеля — значению $W_* \approx 2$ скорость роста горизонтального потока жидкости Φ_* снижается до нуля. При $W > 2$ значение потока жидкости в объеме Φ_* даже убывает со временем от начального. Известно [3,12], что с приближением величины напряженности электрического поля у поверхности жидкости к состоянию, в котором возможна реализация неустойчивости Тонкса–Френкеля, скорость движения волн по поверхности жидкости сильно замедляется и обращается в нуль при $W = 2$, интенсивность конвективного вихревого движения в жидкости при этом сильно увеличивается.

В проведенном анализе бросается в глаза то обстоятельство, что разница в амплитудных величинах горизонтальных потоков жидкости, порождаемых нелинейными волнами, достаточно слабо зависит от толщины слоя, изменяясь в полтора–два раза при изменении толщины слоя от величины, сравнимой с длиной волны, до бесконечно большой глубины. Этот факт находит свое объяснение, если вспомнить, что горизонтальный поток жидкости, порождаемый нелинейной волной, определяется вихревой частью нелинейной поправки к полю скоростей, быстро затухающей по мере удаления от поверхности жидкости на характерном линейном масштабе порядка длины волны [13]. Поэтому при превышении толщиной слоя некоторого характерного линейного масштаба, который можно назвать толщиной пограничного слоя у свободной поверхности жидкости [13], поток жидкости, порождаемый нелинейной волной, перестает увеличиваться.

Заключение

Найдено аналитическое асимптотическое выражение для горизонтального потока жидкости, связанного с периодической нелинейной капиллярной волной в слое вязкой жидкости конечной глубины, имеющее второй порядок малости по отношению амплитуды волны к ее длине. Оказалось, что поток жидкости определяется нелинейной компонентой вихревой части поля скоростей, а его величина независимо от толщины слоя увеличивается с ростом вязкости жидкости и с уменьшением длины волны. Интересно, что вязкость жидкости и толщина слоя жидкости влияют на величину потока жидкости Φ_* качественно сходным образом, а именно: малая толщина слоя жидкости влияет на величину горизонтального потока жидкости так же, как большая вязкость, и наоборот — большая толщина слоя жидкости влияет так же, как малая вязкость жидкости. Чем больше вязкость или чем меньше толщина слоя жидкости, тем выше скорость нарастания потока жидкости Φ_* в начальный момент времени, тем скорее нарастание величины потока жидкости Φ_* сменяется его затуханием, и тем в дальнейшем выше скорость его затухания. Это подтверждает, что вязкость жидкости, а также близость дна к поверхности жидкости способствуют более быстрому увеличению массы жидкости поверхностной волной. С ростом напряженности внешнего электрического поля у свободной поверхности жидкости скорость нарастания потока жидкости Φ_* в начальный момент времени максимальное значение потока жидкости во времени и скорость его дальнейшего убывания во времени снижаются. Факт убывания со временем величины потока Φ_* в жидкости в состояниях, близких к критическим для реализации неустойчивости Тонкса–Френкеля, дает основания полагать, что кинетическая энергия поверхностной волны слишком медленно переходит в энергию направленного движения массы жидкости в приповерхностном слое объема жидкости. Бо́льшая часть кинетической энергии поверхностной волны просто рассеивается из-за вязкости и не успевает перейти в энергию направленного движения массы жидкости в объеме.

Приложение А. Составляющие решения для горизонтальной компоненты поля скоростей течения вязкой жидкости, связанного с нелинейной волной

$$u_1(x,z,t) = \alpha \exp(\operatorname{Re} S\cdot t)\Big(-|v_1|\exp\big(\operatorname{Re} q(d+z)\big)$$
$$\times\cos\big(\operatorname{Im} S\cdot t - kx + \operatorname{Im} q(d+z) + \arg v_1\big)$$
$$+|v_2|\exp\big(-\operatorname{Re} q(d+z)\big)$$
$$\times\cos\big(\operatorname{Im} S\cdot t - kx - \operatorname{Im} q(d+z) + \arg v_2\big)$$
$$+|v_3|\operatorname{Ch} k(d+z)\cos\big(\operatorname{Im} S\cdot t - kx + \arg v_3\big)$$
$$+|v_4|\operatorname{Sh} k(d+z)\cos\big(\operatorname{Im} S\cdot t - kx + \arg v_4\big)\Big);$$

$$u_2^+(x,z,t) = \alpha^2\exp(2\operatorname{Re} S\cdot t)$$
$$\times\Big(-|v_7|\sin(\operatorname{Im} q(d+z) + \arg v_7)\exp\big((k+\operatorname{Re} q)(d+z)\big)$$
$$+|v_8|\sin(\operatorname{Im} q(d+z) - \arg v_8)\exp\big(-(k+\operatorname{Re} q)(d+z)\big)$$
$$+|v_9|\sin\big(\operatorname{Im} q(d+z) - \arg v_9\big)\exp\big((k-\operatorname{Re} q)(d+z)\big)$$
$$-|v_{10}|\sin\big(\operatorname{Im} q(d+z) + \arg v_{10}\big)\exp\big(-(k-\operatorname{Re} q)(d+z)\big)$$
$$-v_{11}\exp\big(2\operatorname{Re} q(d+z)\big) - v_{12}\exp\big(-2\operatorname{Re} q(d+z)\big)$$
$$-v_{13}\cos\big(2\operatorname{Im} q(d+z)\big) - v_{14}\sin\big(2\operatorname{Im} q(d+z)\big)$$
$$+|v_{15}|\sin\big(2\operatorname{Im} S\cdot t - 2kx - \operatorname{Im} q(d+z) + \arg v_{15}\big)$$
$$\times\exp\big((k-\operatorname{Re} q)(d+z)\big)$$
$$+|v_{16}|\sin\big(2\operatorname{Im} S\cdot t - 2kx + \operatorname{Im} q(d+z) + \arg v_{16}\big)$$
$$\times\exp\big(-(k-\operatorname{Re} q)(d+z)\big)$$
$$+|v_{17}|\sin\big(2\operatorname{Im} S\cdot t - 2kx + \operatorname{Im} q(d+z) + \arg v_{17}\big)$$
$$\times\exp\big((k+\operatorname{Re} q)(d+z)\big)$$
$$+|v_{18}|\sin\big(2\operatorname{Im} S\cdot t - 2kx + \operatorname{Im} q(d+z) + \arg v_{18}\big)$$
$$\times\exp\big(-(k+\operatorname{Re} q)(d+z)\big)\Big);$$

$$L(z,t) = \frac{r_{12}}{2w_0}\exp(\nu w_0^2 t)$$
$$\times\left(\exp(w_0 z)\operatorname{erfc}\left(-\frac{-z}{2\sqrt{\nu t}} - w_0\sqrt{\nu t}\right)\right.$$
$$\left.-\exp(-w_0 z)\operatorname{erfc}\left(\frac{-z}{2\sqrt{\nu t}} + w_0\sqrt{\nu t}\right)\right)$$
$$-\frac{r_{12}}{2w_0}\exp(\nu w_0^2 t)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$$
$$\times\Big(\exp\big(w_0(z - d(2+2n))\operatorname{erfc}(\delta^{(-)} - w_0\sqrt{\nu t}\big)$$
$$+\exp\Big(w_0(-z - d(2+2n))\operatorname{erfc}\big(\delta^{(+)} - w_0\sqrt{\nu t}\big)\Big)$$
$$-\exp\Big(-w_0(z - d(2+2n))\operatorname{erfc}\big(\delta^{(-)} + w_0\sqrt{\nu t}\big)\Big)$$
$$-\exp\Big(w_0(z + d(2+2n))\operatorname{erfc}\big(\delta^{(+)} + w_0\sqrt{\nu t}\big)\Big)$$
$$+\frac{r_2}{2}\exp(\nu w_0^2 t)\Big)$$
$$\times\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\Big(\exp(w_0(z - d(1+2n))\operatorname{erfc}(\beta^{(-)}w_0\sqrt{\nu t})\Big)$$
$$+\exp\Big(w_0(-z - d(1+2n))\operatorname{erfc}(\beta^{(+)} - w_0\sqrt{\nu t})\Big)$$
$$+\exp\Big(-w_0(z - d(1+2n))\operatorname{erfc}(\beta^{(-1)} + w_0\sqrt{\nu t})\Big)$$
$$+\exp\Big(-w_0(z - d(1+2n))\operatorname{erfc}(\beta^{(+)} + w_0\sqrt{\nu t})\Big)\Big),$$

где

$$\beta^{(\pm)} \equiv \frac{d(1+2n)\pm z}{2\sqrt{\nu t}};\quad \delta^{(\pm)} \equiv \frac{d(2+2n)\pm z}{2\sqrt{\nu t}};$$

$$r_{12} = -\frac{k^2\nu\operatorname{Im} q}{(k^2+q\bar{q})|3k^2 - q^2 + 2k\bar{q}|^2}$$
$$\times\Big(14k^7 + 2k^6 q - 21k^5 q^2 - 2k^4 q^3 + 3k^3 q^4$$
$$+13k^5 q\bar{q} + 4k^4 q^2\bar{q} - 30k^3 q^3\bar{q} - 10k^2 q^4\bar{q}$$
$$+6kq^5\bar{q} + 2q^6\bar{q} - 7k^3 q^2\bar{q}^2 - 16k^2 q^3\bar{q}^2$$
$$+3kq^4\bar{q}^2 + 2q^5\bar{q}^2 + 3kq^3\bar{q}^3 + 2q^4\bar{q}^3\Big);$$

$$c_{01} = -\frac{i\nu}{2\Delta_{Z_1}}\Big(4k\nu^2\rho w_1(16k^4 - w_1^4)R_{22}$$
$$+8ik^2\nu^2\rho w_1(4k^2 - w_1^2)R_{13}\operatorname{Ch} dw_1$$
$$-\big(2ik\rho\omega_1^2 R_{13} + \rho\omega_1^2(4k^2 + w_1^2)R_{11}$$
$$-2k\nu(16k^4 - w_1^4)R_{121}\big)\operatorname{Sh} dw_1 - i\nu^2\rho w_1$$
$$\times(16k^4 - w_1^4)R_{13}\operatorname{Ch} 2dk + w_1\big(4\rho k\omega_1^2 R_{11}$$
$$+i\rho\omega_1^2 R_{13} - 8k^2\nu(4k^2 - w_1^2)R_{121}\big)\operatorname{Sh} 2dk$$
$$-32k^3\nu^2\rho w_1(4k^2 - w_1^2)R_{22}\operatorname{Ch} 2dk\operatorname{Ch} dw_1$$
$$-32ik^3\nu^2\rho w_1(4k^2 - w_1^2)R_{21}\operatorname{Sh} 2dk\operatorname{Ch} dw_1$$
$$+\rho(4k^2 - w_1^2)\big(\omega_1^2 R_{22} + i\nu^2(4k^2 + w_1^2)R_{21}\big)$$
$$\times\operatorname{Ch} 2dk\operatorname{Sh} dw_1 + i\rho(4k^2 - w_1^2)$$
$$\times\big(\omega_1^2 R_{21} - i\nu^2(4k^2 + w_1^2)R_{22}\big)\operatorname{Sh} 2dk\operatorname{Sh} dw_1\Big);$$

$$c_{11} = \frac{\nu}{2\Delta_{Z_1}}\Big(8k^2\nu^2\rho(16k^4 - w_1^4)R_{21}$$

$$+ \big(2k\rho\omega_1^2 R_{13} - i\rho\omega_1^2(4k^2 + w_1^2)R_{11}$$

$$+ 2ik\nu(16k^4 - w_1^4)R_{121}\big)\mathrm{Ch}\, dw_1$$

$$- 8k^2\nu^2\rho w_1(4k^2 - w_1^2)R_{13}\mathrm{Sh}\, dw_1$$

$$+ 2k\big(4ik\rho\omega_1^2 R_{11} - \rho\omega_1^2 R_{13}$$

$$- 8ik^2\nu(4k^2 - w_1^2)R_{121}\big)\mathrm{Ch}\, 2dk$$

$$+ 2k\nu^2\rho(16k^4 - w_1^4)R_{13}\mathrm{Sh}2dk$$

$$- 32ik^3\nu^2\rho w_1(4k^2 - w_1^2)R_{22}\mathrm{Ch}\, 2dk\mathrm{Sh}\, dw_1$$

$$+ 32k^3\nu^2\rho w_1(4k^2 - w_1^2)R_{21}\mathrm{Sh}\, 2dk\mathrm{Sh}\, dw_1$$

$$+ i\rho(4k^2 - w_1^2)\big(\omega_1^2 R_{22} + i\nu^2(4k^2 + w_1^2)^2 R_{21}\big)$$

$$\times \mathrm{Ch}\, 2dk\mathrm{Ch}\, dw_1 - \rho(4k^2 - w_1^2)\big(\omega_1^2 R_{21}$$

$$- i\nu^2(4k^2 + w_1^2)^2 R_{22}\big)\mathrm{Sh}\, 2dk\mathrm{Ch}\, dw_1\Big);$$

$$R_{21} = \frac{ik\left((3k^4 + 6k^2q^2 - q^4)\sigma_1^2 + 8k^2q^2\sigma_2^2\right)}{4\nu(k^2 - q^2)(9k^2 - q^2)};$$

$$R_{22} = -\frac{4k^4 q\sigma_1\sigma_2}{\nu(k^2 - q^2)(9k^2 - q^2)};$$

$$v_1 = \frac{1}{2}\left(q(\sigma_1 + \sigma_2)\right); \quad v_2 = \frac{1}{2}\left(q(\sigma_1 - \sigma_2)\right); \quad v_3 = q\sigma_2;$$

$$v_4 = k\sigma_1; \quad v_5 = \frac{k}{2}(\sigma_1 + \sigma_2); \quad v_6 = \frac{k}{2}(\sigma_1 - \sigma_2);$$

$$v_7 = \frac{(k^2 - q^2)(k\overline{\sigma_1} + \bar{q}\overline{\sigma_2})(\sigma_1 + \sigma_2)}{8\nu\left(w_0^2 - (k + q)^2\right)};$$

$$v_8 = \frac{(k^2 - q^2)(k\overline{\sigma_1} - \bar{q}\overline{\sigma_2})(\sigma_1 - \sigma_2)}{8\nu\left(w_0^2(k + q)^2\right)};$$

$$v_9 = \frac{(k^2 - q^2)(k\overline{\sigma_1} + \bar{q}\overline{\sigma_2})(\sigma_1 - \sigma_2)}{8\nu\left(w_0^2(k - q)^2\right)};$$

$$v_{10} = \frac{(k^2 - q^2)(k\overline{\sigma_1} - \bar{q}\overline{\sigma_2})(\sigma_1 + \sigma_2)}{8\nu\left(w_0^2(k - q)^2\right)};$$

$$v_{11} = \frac{k\mathrm{Im}\, q\mathrm{Re}\, q|\sigma_1 + \sigma_2|^2}{4\nu(w_0^2 - 4\mathrm{Re}^2\, q)}; \quad v_{12} = \frac{k\mathrm{Im}\, q\mathrm{Re}\, q|\sigma_1 - \sigma_2|^2}{4\nu(w_0^2 - 4\mathrm{Re}^2\, q)};$$

$$v_{13} = \frac{k\mathrm{Im}\, q\mathrm{Re}\, q(|\sigma_1|^2 - |\sigma_2|^2)}{4\nu(w_0^2 + 4\mathrm{Im}^2\, q)}; \quad v_{14} = \frac{k\mathrm{Im}\, q\mathrm{Re}\, q\mathrm{Im}(\overline{\sigma_2}\sigma_1)}{4\nu(w_0^2 + 4\mathrm{Im}^2\, q)};$$

$$v_{15} = \frac{(k - q)^2(\sigma_1 - \sigma_2)(k\sigma_1 + q\sigma_2)}{8\nu(3k - q)(k + q)};$$

$$v_{16} = \frac{(k - q)^2(\sigma_1 + \sigma_2)(k\sigma_1 - q\sigma_2)}{8\nu(3k - q)(k + q)};$$

$$v_{17} = \frac{(k + q)^2(\sigma_1 + \sigma_2)(k\sigma_1 + q\sigma_2)}{8\nu(3k + q)(k - q)};$$

$$v_{18} = \frac{(k + q)^2(\sigma_1 - \sigma_2)(k\sigma_1 - q\sigma_2)}{8\nu(3k + q)(k - q)};$$

$$v_{19} = \frac{k(k + q)(\sigma_1 + \sigma_2)(k\sigma_1 + q\sigma_2)}{4\nu(3k + q)(k - q)};$$

$$v_{20} = \frac{k(k + q)(\sigma_1 - \sigma_2)(k\sigma_1 - q\sigma_2)}{4\nu(3k + q)(k - q)};$$

$$v_{21} = \frac{k(k - q)(\sigma_1 - \sigma_2)(k\sigma_1 + q\sigma_2)}{4\nu(3k - q)(k + q)};$$

$$v_{22} = \frac{k(k - q)(\sigma_1 + \sigma_2)(k\sigma_1 - q\sigma_2)}{4\nu(3k - q)(k + q)};$$

$$v_{23} = 2(R_{21} + c_{11}w_1); \quad v_{24} = 2(R_{22} + 2ikc_{01});$$

$$v_{25} = (c_{01} + c_{11})w_1; \quad v_{26} = (c_{01} - c_{11})w_1;$$

$$v_{27} = 2k(c_{01} + c_{11}); \quad v_{28} = 2k(c_{01} - c_{11});$$

$$\sigma_1 = -\frac{i\nu\left(-2kq\mathrm{Sh}\, dk + (k^2 + q^2)\mathrm{Sh}\, dq\right)}{-q\mathrm{Ch}\, dq\mathrm{Sh}\, dk + k\mathrm{Ch}\, dk\mathrm{Sh}\, dq};$$

$$\sigma_2 = -\frac{i\nu\left(2k^2\mathrm{Ch}\, dk - (k^2 + q^2)\mathrm{Ch}\, dq\right)}{-q\mathrm{Ch}\, dq\mathrm{Sh}\, dk + k\mathrm{Ch}\, dk\mathrm{Sh}\, dq};$$

$$q = \sqrt{k^2 + \frac{S}{\nu}}; \qquad \bar{q} = \sqrt{k^2 + \frac{\bar{S}}{\nu}};$$

$$w_0 = \sqrt{\frac{S + \bar{S}}{\nu}}; \qquad w_1 = \sqrt{4k^2 + \frac{2S}{\nu}}.$$

Черта над символом означает комплексное сопряжение.

Приложение B. Коэффициенты в выражении для потока в вязкой жидкости, связанного с нелинейной волной

$$r_0 = \frac{i\nu(k^2 - q^2)}{(3k^2 - q^2 - 2k\bar{q})(3k^2 - q^2 + 2k\bar{q})(-q\mathrm{Ch}\, dq\mathrm{Sh}\, dk + k\mathrm{Ch}\, dk\mathrm{Sh}\, dq)}$$

$$\times \frac{k^2 - (\bar{q})^2}{(3k^2 - (\bar{q})^2 - 2kq)(3k^2 - (\bar{q})^2 + 2kq)(-\bar{q}\mathrm{Ch}\, d\bar{q}\mathrm{Sh}\, dk + k\mathrm{Ch}\, dk\mathrm{Sh}\, d\bar{q})}$$

$$\times \frac{1}{4(k^2 - q\bar{q})(k^2 + q\bar{q})}$$

$$\times \Big(2k^4q^3\bar{q}\,(37k^4 - 25k^2q^2 + 4q^4 + (\bar{q}q)^2)\,\mathrm{Sh}\, 2dk$$

$$
\begin{aligned}
&-2k\bar{q}\big(81k^{10}+42k^{8}q^{2}-24k^{6}q^{4}-13k^{4}q^{6}+4k^{2}q^{8}\\
&-[15k^{8}+54k^{6}q^{2}+12k^{4}q^{4}-3k^{2}q^{6}](\bar{q})^{2}\\
&-(\bar{q})^{4}[16k^{6}+5k^{4}q^{2}-3k^{2}q^{4}]\\
&+[4k^{4}+3k^{2}q^{2}-q^{4}](\bar{q})^{6}\big)\mathrm{Ch}\,dk\mathrm{Sh}\,dq\\
&+2q\bar{q}\big(81k^{10}+5k^{8}q^{2}-36k^{6}q^{4}+8k^{4}q^{6}+22k^{8}(\bar{q})^{2}\\
&-17k^{6}(\bar{q}q)^{2}-13k^{4}q^{4}(\bar{q})^{2}+2k^{2}q^{6}(\bar{q})^{2}\\
&-[41k^{6}+29k^{4}q^{2}-4k^{2}q^{4}](\bar{q})^{4}\\
&+[8k^{4}+7k^{2}q^{2}-q^{4}](\bar{q})^{6}\mathrm{Sh}\,dk\mathrm{Ch}\,dq\\
&-kq(117k^{10}-42k^{8}q^{2}-11k^{6}q^{4}+4k^{4}q^{6})\\
&+[137k^{8}-30k^{6}q^{2}-61k^{4}q^{4}+14k^{2}q^{6}](\bar{q})^{2}\\
&-[97k^{6}+36k^{4}q^{2}-11k^{2}q^{4}+2q^{6}](\bar{q})^{4}\\
&-[k^{4}+8k^{2}q^{2}+3q^{4}](\bar{q})^{6}+4[k^{2}+q^{2}](\bar{q})^{8}\big)\mathrm{Ch}\,dq\mathrm{Sh}\,d\bar{q}\\
&-2kq\left(k^{4}-(q\bar{q})^{2}\right)\left(36k^{6}-18k^{4}q^{2}\right.\\
&+2k^{2}q^{4}-[31k^{4}-7k^{2}q^{2}](\bar{q})^{2}\\
&\left.+[5k^{2}-q^{2}](\bar{q})^{4}\right)\mathrm{Ch}\,2dk\mathrm{Ch}\,dq\mathrm{Sh}\,d\bar{q}\\
&-2k^{2}q^{3}\bar{q}\big(29k^{6}-23k^{4}q^{2}+4k^{2}q^{4}\\
&+[9k^{2}q^{2}-2q^{4}](\bar{q})^{2}\big)\mathrm{Sh}\,2dk\mathrm{Ch}\,dq\mathrm{Ch}\,d\bar{q}\\
&+2k^{2}q^{2}\big(42k^{8}-26k^{6}q^{2}+4k^{4}q^{4}-[3k^{4}q^{2}-k^{2}q^{4}](\bar{q})^{2}\\
&-(\bar{q}q)^{4}\big)\mathrm{Sh}\,2dk\mathrm{Sh}\,dq\mathrm{Sh}\,d\bar{q}\Big);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r_{1}=&\frac{ik\nu}{(3k^{2}-q^{2}-2k\bar{q})(3k^{2}-q^{2}+2k\bar{q})(-q\mathrm{Ch}\,dq\mathrm{Sh}\,dk+k\mathrm{Ch}\,dk\mathrm{Sh}\,\mathrm{dq})}\\
&\times\frac{1}{(3k^{2}-\bar{q}^{2}-2kq)(3k^{2}-\bar{q}^{2}+2kq)(-\bar{q}\mathrm{Ch}\,\bar{q}\mathrm{Sh}\,dk+k\mathrm{Ch}\,dk\mathrm{Sh}\,d\bar{q})}\\
&\times\frac{1}{4(k^{2}-q\bar{q})(k^{2}+q\bar{q})}\Big(k\bar{q}\big(684k^{14}-967k^{12}q^{2}\\
&+597k^{10}q^{4}-215k^{8}q^{6}+45k^{6}q^{8}-4k^{4}q^{10}\\
&+[+127k^{4}q^{8}-477k^{12}-522k^{10}q^{2}\\
&+1008k^{8}q^{4}-532k^{6}q^{6}-12k^{2}q^{10}](\bar{q})^{2}\\
&-[726k^{8}q^{2}-31k^{10}-392k^{6}q^{4}+50k^{4}q^{6}+3k^{2}q^{8}](\bar{q})^{4}\\
&+[77k^{8}+32k^{6}q^{2}-154k^{4}q^{4}+28k^{2}q^{6}+q^{8}](\bar{q})^{6}\\
&+[67k^{2}q^{4}-13k^{6}-159k^{4}q^{2}-3q^{6}](\bar{q})^{8}\\
&+[46k^{2}q^{2}-6q^{4}](\bar{q})^{10}-4q^{2}(\bar{q})^{12}\big)\\
&\times(-q\mathrm{Sh}\,dk\mathrm{Ch}\,dq+k\,\mathrm{Ch}\,dk\mathrm{Sh}\,dq)\\
&+k^{2}q\big(468k^{14}-441k^{12}q^{2}+116k^{10}q^{4}-k^{8}q^{6}-2k^{6}q^{8}\\
&+[962k^{8}q^{4}-396k^{6}q^{6}+77k^{4}q^{8}-259k^{12}-786k^{10}q^{2}\\
&-6k^{2}q^{10}](\bar{q})^{2}+[432k^{8}q^{2}+44k^{6}q^{4}-14k^{10}-134k^{4}q^{6}(\bar{q})^{4}\\
&+30k^{2}q^{8}-2q^{10}](\bar{q})^{4}+[296k^{6}q^{2}-370k^{4}q^{4}+72k^{2}q^{6}\\
&-q^{8}](\bar{q})^{6}+[22k^{6}-229k^{4}q^{2}+104k^{2}q^{4}-5q^{6}](\bar{q})^{8}\\
&+[52k^{2}q^{2}-4k^{4}-8q^{4}](\bar{q})^{10}-4q^{2}(\bar{q})^{12}\big)\mathrm{Ch}\,dq\mathrm{Sh}\,dq\\
&+k^{2}q\left(k^{4}-(\bar{q}q)^{2}\right)\big(252k^{10}-135k^{8}q^{2}-52k^{6}q^{4}+41k^{4}q^{6}\\
&-6k^{2}q^{8}+[-757k^{8}+524k^{6}q^{2}-127k^{4}q^{4}+22k^{2}q^{6}\\
&-2q^{8}](\bar{q})^{2}+[704k^{6}-319k^{4}q^{2}+38k^{2}q^{4}+q^{6}](\bar{q})^{4}\\
&-[291k^{4}-62k^{2}q^{2}+3q^{4}](\bar{q})^{6}+[56k^{2}-4q^{2}](\bar{q})^{8}\\
&-4(\bar{q})^{10}\big)\mathrm{Ch}\,2dk\mathrm{Ch}\,dq\mathrm{Sh}\,d\bar{q}-kq\bar{q}\left(q^{2}-(\bar{q})^{2}\right)\\
&\times\big(110k^{2}-313k^{10}q^{2}+172k^{8}q^{4}-43k^{6}q^{6}+4k^{4}q^{8}\\
&+[111k^{8}q^{2}-31k^{6}q^{4}-8k^{4}q^{6}+2k^{2}q^{8}](\bar{q})^{2}\\
&+[8k^{4}q^{4}-15k^{2}q^{6}+2q^{8}](\bar{q})^{4}+q^{6}(\bar{q})^{6}\big)\mathrm{Sh}\,2dk\mathrm{Ch}\,dq\mathrm{Ch}\,dq\\
&-k^{3}\left(q^{2}-(\bar{q})^{2}\right)\big(201k^{12}-443k^{10}q^{2}+160k^{8}q^{4}-19k^{6}q^{6}\\
&-[160k^{8}q^{2}-685k^{6}q^{4}+318k^{4}q^{6}-60k^{2}q^{8}+4q^{10}](\bar{q})^{2}\\
&+[117k^{2}q^{6}-265k^{4}q^{4}-8q^{8}](\bar{q})^{4}\\
&-6q^{6}(\bar{q})^{6}\big)\mathrm{Sh}\,2dk\mathrm{Sh}\,dq\mathrm{Sh}\,d\bar{q}\Big);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r_{2}=&\frac{\nu(k^{2}-q^{2})}{(3k^{2}-q^{2}-2k\bar{q})(3k^{2}-q^{2}+2k\bar{q})(-q\mathrm{Ch}\,dq\mathrm{Sh}\,dk+k\mathrm{Ch}\,dk\mathrm{Sh}\,dq)}\\
&\times\frac{k^{2}-(\bar{q})^{2}}{(3k^{2}-(\bar{q})^{2}-2kq)(3k^{2}-(\bar{q})^{2}+2kq)(-\bar{q}\mathrm{Ch}\,d\bar{q}\mathrm{Sh}\,dk+k\mathrm{Ch}\,dk\mathrm{Sh}\,d\bar{q})}\\
&\times\frac{ik\left(q-(\bar{q})^{2})\right)}{16(k^{2}-q\bar{q})(k^{2}+q\bar{q})}\Big(-4k^{2}q\bar{q}\big(35k^{6}\\
&-48k^{4}q^{2}+8k^{3}q^{4}+[7k^{2}q^{2}-2q^{4}](\bar{q})^{2}\big)\\
&-8k^{2}q\bar{q}\left(k^{4}-q^{2}(\bar{q})^{2}\right)(k^{2}-q^{2})\mathrm{Ch}\,2dk\\
&+q\bar{q}(k^{2}+q^{2})\big(37k^{4}-25k^{2}q^{3}+4q^{4}\\
&-5[q^{2}-5k^{2}](\bar{q})^{2}+4(\bar{q})^{4}\big)\\
&\times\left(4k^{2}\mathrm{Ch}\,dk-\left(k^{2}+(\bar{q})^{2}\right)\mathrm{Ch}\,d\bar{q}\right)\mathrm{Ch}\,dq\\
&-(k^{2}+q^{2})\big(33k^{6}-23k^{4}q^{2}+4k^{2}q^{4}\\
&+[9k^{2}q^{2}-23k^{4}-2q^{4}](\bar{q})^{2}+[4k^{2}-2q^{2}](\bar{q})^{4}\big)\\
&\times\left(4k\bar{q}\mathrm{Sh}\,dk-\left(k^{2}+(\bar{q})^{2}\right)\mathrm{Sh}\,d\bar{q}\right)\mathrm{Sh}\,dq\Big).
\end{aligned}
$$

Работа выполнена при поддержке гранта № 06-01-00066-а.

Список литературы

[1] *Стокер Дж.* Волны на воде. М.: ИЛ, 1959. 617 с.
[2] *Longuet-Higgins M.S.* // Royal Soc. London. Trans. Ser. A. 1953. Vol. 245. № 903. P. 535–581.
[3] *Белоножко Д.Ф., Ширяева С.О., Григорьев А.И.* Нелинейные волны на заряженной поверхности жидкости. Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 2006. 288 с.
[4] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 4. С. 28–37.
[5] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 2. С. 184–192.
[6] *Климов А.В., Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 10. С. 9–18.
[7] *Климов А.В., Григорьев А.И.* Аналитический расчет нелинейных волн в тонком слое вязкой электропроводной жидкости // Препринт ИМИРАН № 35. Ярославль, 2005. 52 с.
[8] *Nayfeh A.H.* // The Phys. of Fluids. 1970. Vol. 13. N 3. P. 545–550.
[9] *McGoldrick L.F.* // Fluid Mech. 1972. Vol. 52. Pt. 4. P. 723–751.
[10] *Dias F., Kharif C.* // Ann. Rev. Fluid Mech. 1999. Vol. 31. P. 301–346.
[11] *Френкель Я.И.* // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. Вып. 4. С. 348–350.
[12] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 9. С. 41–45.
[13] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2007. Т. 77. Вып. 8. С. 19–28.