

01;03

О толщине пограничного слоя, связанного с волновым движением заряженной свободной поверхности вязкой жидкости

© Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 4 июня 2007 г.)

Показано, что предлагаемое для приближенного расчета волнового движения на свободной поверхности вязкой жидкости оценочное аналитическое выражение для толщины пограничного слоя, содержащее в знаменателе частоту волны, нельзя механически переносить на случай расчета волнового движения на однородно заряженной поверхности жидкости, поскольку при приближении поверхностной плотности заряда к критической в смысле реализации неустойчивости Тонкса–Френкеля частота волны стремится к нулю. На основе анализа реализующихся в окрестности критической плотности электрического заряда движений жидкости предложена методика расчета толщины пограничного слоя, связанного с движениями разных видов. Выяснилось, что толщина пограничного слоя, связанного с экспоненциально во времени увеличивающимися своей амплитудой аperiodическими движениями жидкости, имеющими место на стадии реализации неустойчивости по отношению к поверхностному заряду, не превышает десятых долей длины волны, тогда как с экспоненциально затухающими движениями жидкости связан пограничный слой с толщиной порядка длины волны.

PACS: 61.20.Gy, 47.11.Hj

Введение

Теория пограничного слоя, разрабатываемая уже более века, давно стала одним из наиболее эффективных методов приближенного решения задач, связанных с расчетом движения вязкой жидкости. Она детально разработана для задач обтекания твердых тел конечных размеров и постоянной геометрической формы [1]. Тем не менее существует большой класс движений вязкой жидкости, для которого теория пограничного слоя пока не стала эффективным средством корректного расчета — это движения вязкой жидкости со свободной поверхностью [2–8].

В многочисленных научных публикациях (см., например, [2–9]) достаточно часто используется представление о том, что вблизи свободной поверхности бесконечно глубокой вязкой жидкости, по которой распространяется периодическая волна, имеется тонкий пограничный слой, внутри которого сосредоточена основная часть вихревого движения, а движение жидкости в основном объеме можно считать безвихревым. Для толщины δ пограничного слоя предлагается пользоваться оценкой [2–4,7,8]:

$$\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}. \quad (1)$$

Здесь ν — кинематическая вязкость жидкости, а ω — циклическая частота периодической капиллярно-гравитационной волны. Для ряби (капиллярно-гравитационные волны в области длин волн, переходной от ветви капиллярных к ветви гравитационных волн) на воде с длиной волны порядка 1 см, величина циклической частоты составляет примерно 150 Hz, а толщина погранич-

ного слоя, согласно (1), будет около 0.1 см [8]. Анализ литературных источников показывает, что оценка (1) получена не из уравнений движения, а в результате анализа классического решения задачи о распространении капиллярно-гравитационных волн по поверхности вязкой жидкости [10]. В связи со сказанным возникает вопрос о правомерности оценки (1) при введении в задачу расчета спектра капиллярно-гравитационных волн новых физических факторов. В частности, справедливость формулы (1) вызывает сомнение при рассмотрении задачи о расчете спектра капиллярно-гравитационных волн на свободной поверхности электрически заряженной вязкой электропроводной жидкости. Согласно существующим представлениям об устойчивости заряженной поверхности жидкости по отношению к наличию на ней электрического заряда [11–15], увеличение поверхностной плотности электрического заряда связано с уменьшением циклической частоты ω , входящей в формулу (1). Значение ω стремится к нулю при приближении поверхностной плотности заряда к критической, выше которой электрические силы начинают преобладать над силами поверхностного натяжения, инициируя рост эмиссионных выступов для сброса избыточного электрического заряда [16]. В итоге, согласно (1), получается, что при околоритических значениях поверхностной плотности заряда толщина пограничного слоя, в котором сосредоточена основная часть вихревого движения, расширяется фактически на всю область, занятую жидкостью, и движение жидкости следует считать полностью вихревым. Вопрос о справедливости этого неожиданного вывода и является предметом настоящего анализа, который посвящен оценке толщины пограничного слоя под де-

формированной волновым движением свободной однородно заряженной поверхностью вязкой несжимаемой идеально проводящей жидкости. Авторы предполагают продемонстрировать несостоятельность оценки (1) для толщины пограничного слоя и дать более корректное аналитическое оценочное выражение этой величины.

1. Математическая формулировка задачи

Примем, что несжимаемая ньютоновская жидкость с кинематической вязкостью ν , плотностью ρ и коэффициентом поверхностного натяжения γ в декартовой системе координат с осью Oz , направленной вертикально вверх в поле сил тяжести $\mathbf{g} \parallel -\mathbf{e}_z$, заполняет полупространство $z < 0$ и граничит с вакуумом. Жидкость считается идеальным проводником, несущим однородно распределенный поверхностный заряд, такой, что электрическое поле над искаженной волновым движением поверхностью жидкости в пределе $z \rightarrow \infty$ стремится к однородному с напряженностью $E_0 \mathbf{e}_z$. Рассмотрим линеаризованную по амплитуде возмущения задачу определения спектра капиллярно-гравитационных волн на заряженной свободной поверхности жидкости.

Пусть $u = u(x, z, t)$ и $v = v(x, z, t)$ — горизонтальная и вертикальная компоненты поля скоростей волнового движения жидкости, которые для простоты считаются не зависящими от координаты y : \mathbf{e}_x и \mathbf{e}_z — орты осей Ox и Oz декартовой системы координат, координатная поверхность $z = 0$ которой совпадает с невозмущенной равновесной в поле сил тяжести свободной поверхностью жидкости. Тогда отклонение свободной поверхности жидкости $\xi = \xi(x, t)$ от равновесной формы $z = 0$, обусловленное волновым движением малой амплитуды, поле скоростей волнового течения

$$\mathbf{U} = u \mathbf{e}_x + v \mathbf{e}_z$$

и добавка Φ к величине электростатического потенциала над однородно заряженной свободной поверхностью жидкости, вызванная искажением равновесной формы $\xi = \xi(x, t)$, имеют один порядок малости и удовлетворяют линеаризованным уравнениям гидродинамики

$$z < 0: \quad \partial_t \mathbf{U} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \nu \Delta \mathbf{U} = 0; \quad \text{div } \mathbf{U} = 0;$$

$$z > 0: \quad \Delta \Phi = 0;$$

$$z = 0: \quad \partial_t \xi - v = 0; \quad p - 2\rho\nu \partial_z v - \frac{E_0}{4\pi} \partial_z \Phi + \gamma \partial_{xx} \xi = 0;$$

$$\partial_z u + \partial_x v = 0; \quad \Phi - E_0 \xi = 0;$$

$$z \rightarrow -\infty: \quad u \rightarrow 0; \quad v \rightarrow 0; \quad z \rightarrow \infty: \quad |\nabla \Phi| \rightarrow 0.$$

Здесь t — время; p — добавка к равновесному значению давления внутри жидкости, обусловленная волновым движением; ∂_t и ∂_x — частные производные по времени и координате.

2. Решение линеаризованной задачи

Согласно [11–16], решением линеаризованной задачи является суперпозиция волн вида

$$\begin{pmatrix} \xi \\ u \\ v \\ \Phi \end{pmatrix} = \frac{a}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i(S + 2\nu k^2) \exp(kz) + 2i\nu k q \exp(qz) \\ (S + 2\nu k^2) \exp(kz) - 2\nu k^2 \exp(qz) \\ E_0 \exp(-kz) \end{pmatrix} \times \exp(St - ikx) + \text{к.с.} \quad (2)$$

Аббревиатура “к.с.” означает “комплексно сопряженные слагаемые”; a — комплексная амплитуда, определяемая из начальных условий; k — волновое число; i — мнимая единица; S — комплексная частота, связанная соотношением

$$q = \sqrt{k^2 + \frac{S}{\nu}} \quad (3)$$

с корнем q дисперсионного уравнения:

$$(k^2 + q^2)^2 + \omega_0^2 - 4\nu^2 k^3 q = 0; \quad (4)$$

$$\text{Re}(q) > 0; \quad (5)$$

$$\omega_0^2 = gk(1 + \alpha^2 k^2 - \alpha k W); \quad \alpha = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}; \quad W = \frac{E_0^2}{4\pi \sqrt{\rho g \gamma}},$$

где α есть капиллярная постоянная жидкости, W — безразмерный параметр Тонкса–Френкеля, характеризующий соотношение капиллярных и электрических сил на свободной поверхности жидкости, пропорциональный квадрату поверхностной плотности электрического заряда. Параметр ω_0^2 равен предельному при $\nu \rightarrow 0$ значению квадрата комплексной частоты S^2 и имеет смысл квадрата частоты капиллярно-гравитационной волны на однородно заряженной свободной поверхности идеальной несжимаемой электропроводной жидкости. Физический смысл имеют не все значения комплексной частоты S , разрешающие дисперсионное уравнение, а только те, для которых выполняется условие (5), реализуемое, если

$$\text{Re}((S + 2\nu k^2)^2 + \omega_0^2) > 0. \quad (6)$$

Только в этом случае вихревая часть поля скоростей, которая в (2) описывается слагаемыми, пропорциональными $\exp(qz)$, затухает с глубиной.

Далее будут использованы обозначения

$$r = \text{Re}(S); \quad \omega = \text{Im}(S); \quad q_1 = \text{Re}(q); \quad q_2 = \text{Im}(q). \quad (7)$$

Модуль действительного параметра r характеризует скорость изменения амплитуды волнового движения со временем. При $r < 0$ параметр $|r|$ определяет декремент затухания волнового движения, а при $r > 0$ он дает инкремент нарастания неустойчивости. Действительная величина ω имеет смысл циклической частоты волнового движения.

3. Выражение для характерной толщины пограничного слоя на заряженной свободной поверхности бесконечно глубокой жидкости

Несложно вычислить ротор поля скоростей

$$\mathbf{U} = u\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_z,$$

заданного соотношениями (2)

$$\begin{aligned} \text{rot}\mathbf{U} = & \left(aki(r + i\omega) \exp(q_1 z) \exp(rt) \exp(iq_2 z) \right. \\ & \left. \times \exp(i(\omega t - kx)) + \text{k.c.} \right) \mathbf{e}_y. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\delta = q_1^{-1} \quad (8)$$

— вертикальный масштаб, на котором завихренность поля скоростей уменьшается в e раз. В связи с экспоненциальным законом уменьшения амплитуды вихревого движения с глубиной параметр δ полностью характеризует характерный линейный масштаб затухания вихревого движения в том смысле, что через его значение легко вычисляется глубина D , на которой интенсивность вихревого движения уменьшается в произвольное заданное число раз N :

$$D = \delta \ln(N).$$

Например, если умножить δ на $\ln(100) \approx 4.6$, то получится глубина, при погружении на которую интенсивность вихревого движения уменьшится в 100 раз.

На основании сказанного примем соотношение (8), в котором q — корень уравнения (4), удовлетворяющий условию (5), за определение характерной толщины пограничного слоя у заряженной свободной поверхности бесконечно глубокой жидкости.

Итак, оказывается, что дисперсионное уравнение в форме (4), рассматриваемое как уравнение относительно вспомогательного параметра q , имеет самостоятельный физический смысл. Действительная часть корня q уравнения (4), удовлетворяющего условию (5), — величина, обратная характерной толщине пограничного слоя.

Данное определение характерной толщины пограничного слоя полностью согласуется с общепринятой оценкой (1) при условии, что вязкость мала, но значение ω не является малым. Действительно, в этом приближении [8]

$$S \approx -2vk^2 + i\omega_0.$$

Пользуясь тем, что значение ω_0 не является малым, легко выделить главную часть соотношения

$$q_1^{-1} = 1/\text{Re}(\sqrt{k^2 + S/v})$$

в пределе малой вязкости. Получится выражение $\sqrt{2v/\omega_0}$. При малой вязкости будем иметь $\omega \approx \omega_0$, т.е. приходим к определению (1).

Для значений ω , близких к нулю, предложенное определение для характерной толщины пограничного слоя пока неинформативно, поскольку значение δ для этого случая вычисляется в результате непосредственного решения трансцендентного уравнения (4) с отбором корней, удовлетворяющих (5). Зададимся целью получить для толщины пограничного слоя δ (при близких к нулю значениях частоты ω) явные аналитические выражения, которые упростят анализ и практическое применение теории пограничного слоя вблизи заряженной поверхности жидкости.

4. Реперные значения параметра Тонкса—Френкеля, связанные с качественными изменениями в характере движения

Определимся со значениями параметра Тонкса—Френкеля W , при которых будут строиться приближенные аналитические выражения для характерной толщины пограничного слоя δ , и со значениями W , при которых эти выражения должны отражать качественно важные свойства точных зависимостей.

Плоскость параметров (K, W) , где $K = \alpha k$ — безразмерное волновое число, можно рассматривать как плоскость физических параметров, характеризующих капиллярно-волновое движение, на которой линия (рис. 1)

$$\Gamma: \quad W = \frac{1}{K} + K,$$

является границей устойчивости движения. Точки, расположенные под Γ , соответствуют режиму капиллярно-волнового движения с экспоненциально уменьшающейся амплитудой ($r < 0$). На гребнях волн, соответствующих точкам этой области, капиллярные силы преобладают над электрическими. Над линией Γ расположена область неустойчивости, соответствующая условиям, когда электрические силы на гребнях любого малого пространственно-периодического возмущения преобладают над силами поверхностного натяжения, приводя к

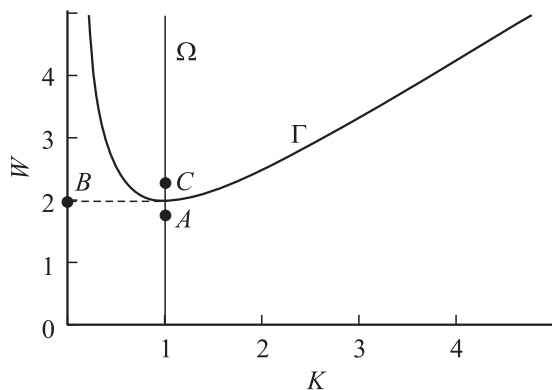


Рис. 1. Граница устойчивости волнового движения Γ на плоскости безразмерных параметров (K, W) . Параметр $K = \alpha k$ — произведение волнового числа на капиллярную постоянную.

экспоненциальному росту ($r > 0$) во времени амплитуды виртуального возмущения.

Чтобы определить значения параметра W , при которых режим капиллярно-волнового движения претерпевает качественные изменения, нужно проанализировать, как изменяются параметры ω , r (7) и характерная толщина пограничного слоя δ (определенная согласно (1)) с изменением W при фиксированном значении волнового числа. На рис. 2 такие зависимости построены в безразмерных переменных, в которых $\rho = g = \gamma = 1$. На этих зависимостях увеличению параметра W соответствует перемещение точки, характеризующей на рис. 1 состояние капиллярно-волнового движения, вверх вдоль луча Ω . Для лучшей визуализации деталей поведения рассматриваемых зависимостей в окрестности критического значения $W = 2$ зависимости построены при весьма большом значении безразмерной вязкости ($\nu = 0.5$). На представленных зависимостях безразмерное волновое число фиксировано значением $K = 1$, но все качественные свойства зависимостей сохраняются и в случае их построения при другом значении K . Главным

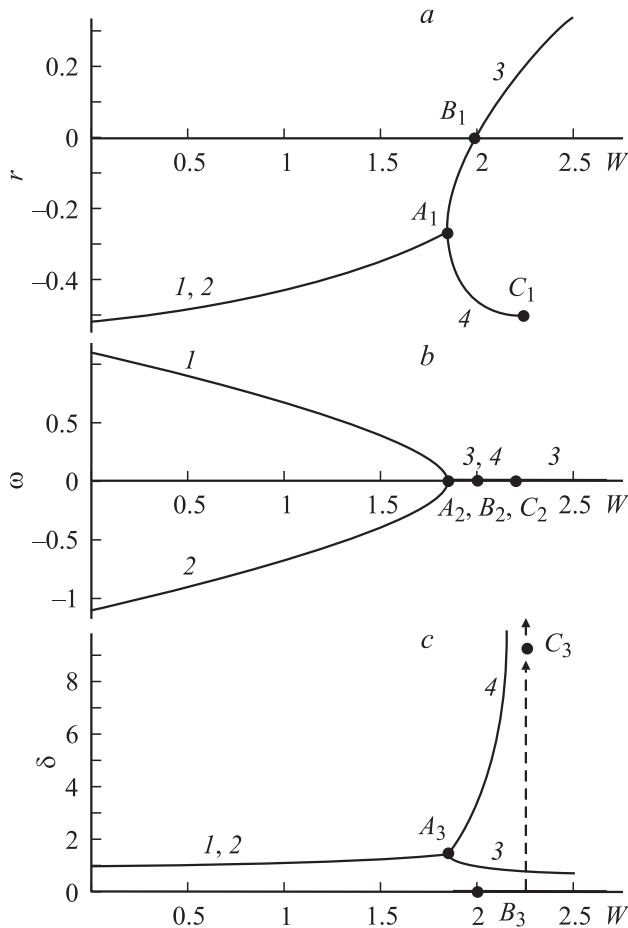


Рис. 2. Зависимости действительной $r = \text{Re}(S)$ и мнимой $\omega = \text{Im}(S)$ частей комплексной частоты и характерной толщины пограничного слоя δ от значений параметра Тонкса–Френкеля W , рассчитанные в безразмерных переменных, в которых $\rho = g = \gamma = 1$, при безразмерном значении волнового числа $k = 1$ и безразмерной вязкости $\nu = 0.5$.

отличием будет изменение критического значения параметра W , определенного соотношением $W = K^{-1} + K$.

Из рис. 1 и 2 видно, что при $W = 0$ существуют две капиллярно-гравитационные ветви 1 и 2 движения жидкости с одинаковыми декрементом затухания и характерной толщиной пограничного слоя: одна волна распространяется вдоль Ox , другая в противоположном направлении. При увеличении W частоты обоих движений уменьшаются и при $W = W_A$ обращаются в нуль, а сами движения жидкости становятся аperiodическими, амплитуда которых экспоненциально затухает со временем. Значение W_A — первая реперная точка, положение которой нужно описать аналитически. Именно в окрестности $W = W_A$ формула (1) становится неверной из-за обращения в нуль знаменателя. Значение W_A характеризует положение точек разветвления: A_1 — на зависимости $r = r(W)$; A_2 — на зависимости $\omega = \omega(W)$; A_3 — на зависимости $\delta = \delta(W)$. Значение W_A — левый край диапазона значений W , на котором существуют два затухающих со временем аperiodических движения, описываемых ветвями 3 и 4 на рис. 2, а и b. Каждому из них соответствует своя характерная толщина пограничного слоя δ . Декремент затухания движения, связанного с ветвью 3, при увеличении W уменьшается и в реперной точке $W_B = K^{-1} + K$ обращается в нуль. При $W > W_B$ ветвь 3 соответствует неустойчивым экспоненциально нарастающим со временем движениям жидкости. В точке $W = W_A < W_B$ толщина пограничного слоя, соответствующего ветви 3, достигает максимума и уменьшается при дальнейшем увеличении W . У движения, описываемого ветвью 4, декремент затухания существенно больше, чем у ветви, претерпевающей неустойчивость, и его значение растет с увеличением W . Толщина пограничного слоя δ для ветви 4 асимптотически растет до бесконечности. Положение асимптотики $W = W_C > W_B$ — третья представляющая интерес реперная точка и правый край диапазона значений W , на котором существуют две аperiodические ветви и два характерных масштаба для толщины пограничного слоя. При $W > W_B$ реализуется только неустойчивое аperiodическое движение, связанное с ветвью 3, а продолжение ветви 4 за порог $W = W_C$ перестает удовлетворять условию (5), уходит на нижний лист римановой поверхности, на которой определены решения дисперсионного уравнения (4), и физически не реализуется.

Для определения W_A и W_B выполним в (4) последовательную замену переменных:

$$Q = \frac{q}{k}; \quad (9)$$

$$\delta W = W - \left(\alpha k + \frac{1}{\alpha k} \right) = W - W_B; \quad (10)$$

$$\Lambda = \frac{\alpha g}{\nu^2 k^2} \delta W. \quad (11)$$

Здесь δW характеризует отклонение параметра Тонкса–Френкеля W от критического значения, а Λ введено для

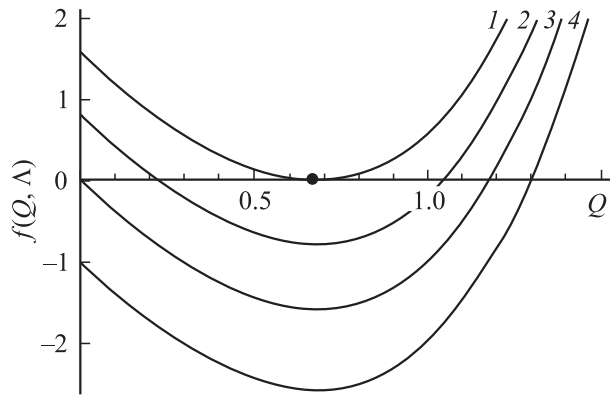


Рис. 3. Примеры расчета зависимости левой части уравнения (12) от переменной Q при различных значениях параметра Λ : 1 — $\Lambda = \Lambda_A \approx -0.581$; 2 — $\Lambda = 0.2$; 3 — $\Lambda = \Lambda_C = 1$; 4 — $\Lambda = 2$.

уменьшения в результирующем уравнении числа независимых переменных. В результате описанной подстановки получится уравнение относительно Q с единственной переменной Λ :

$$f(Q, \Lambda) = (1 + Q^2)^2 - 4Q - \Lambda = 0. \quad (12)$$

Рассматривая поведение корней уравнения (12) с положительной действительной частью, легко установить реперные значения Λ_A (точка рождения двух действительных корней) и Λ_C (точка исчезновения одного из корней), через которые, в свою очередь, по формулам (10), (11) легко вычислить W_A и W_C .

На рис. 3 иллюстрируется поведение зависимости $f(Q, \Lambda)$ при различных значениях Λ . Видно, что при больших Λ уравнение (12) имеет только один положительный действительный корень. Легко понять, что этот корень соответствует ветви 3 на рис. 2. При уменьшении Λ до значения $\Lambda = 1$ появляется корень $Q = 0$, которому соответствует правый, уходящий в бесконечность конец C_3 ветви 4 на рис. 2: $\delta \sim (1/Q) \rightarrow \infty$. При $\Lambda < 1$ появившийся новый действительный положительный корень существует в том же диапазоне значений параметров, что и первый корень, связанный с ветвью 3. Через значение этого нового корня выражается положение ветви 4 на рис. 2. Естественно принять $\Lambda_C = 1$. Из (12) следует, что $\Lambda_B = 0$. Как видно из рис. 3, дальнейшее уменьшение Λ до значения $\Lambda = \Lambda_A$ приводит к слиянию двух действительных положительных корней при $\Lambda = \Lambda_A$ (это соответствует точке $W = W_A$), когда минимум изображенной на рисунке функции касается оси OQ . Значение Λ_A легко находится в виде: $\Lambda_A = -\Pi \approx -0.581$.

В результате получаются значения

$$\Lambda_A = -0.581; \quad \Lambda_B = 0; \quad \Lambda_C = 1.$$

С их помощью по формулам (10), (11) легко вычисляются реперные значения W_A и W_C . Область значений Λ ,

на которой будут строиться аналитические выражения, примем симметричной относительно нуля и опишем диапазоном

$$-1 \leq \Lambda \leq 1. \quad (13)$$

Этому множеству значений Λ соответствует диапазон значений параметра W , симметричный относительно критического значения

$$W_L = W_B - \delta W_C \leq W_B \leq W_B + \delta W_C = W_R. \quad (14)$$

Легко установить, что левая половина диапазона (14) содержит значение W_A . Таким образом, множество значений параметра W (14) содержит все интересные для настоящего анализа реперные значения W_A, W_B, W_C . Именно на этом множестве и будут определены искомые приближенные аналитические зависимости. Очевидно, рассматриваемый диапазон изменения W можно описать как отрезок

$$\left[\frac{1}{\alpha k} + \alpha k - \frac{\nu^2 k^2}{\alpha g}; \frac{1}{\alpha k} + \alpha k + \frac{\nu^2 k^2}{\alpha g} \right]. \quad (15)$$

5. Приближенные аналитические зависимости для толщины пограничного слоя в окрестности критического значения параметра Тонкса—Френкеля

Будем аппроксимировать корни уравнения (12) на отрезке (13). Из расчетов и рис. 2 следует, что аналитические выражения получаются наиболее простыми и в то же время точными, если аппроксимацию провести следующим образом.

На отрезке $-1 \leq \Lambda < -\Pi$, там, где движения жидкости периодически затухающие, следует использовать линейную аппроксимацию. На отрезке $-\Pi \leq \Lambda < 1$ для аппроксимации большего (по абсолютной величине) из корней, соответствующего ветви 3, удобно воспользоваться разложением по целым степеням $\sqrt{\Lambda + \Pi}$. Для меньшего (по абсолютной величине) корня, соответствующего ветви 4, выгодней использовать покусочную аппроксимацию: на части отрезка $-\Pi \leq \Lambda \leq 0$ проводить разложение по $\sqrt{\Lambda + \Pi}$, а на части $0 \leq \Lambda \leq 1$ — ограничиться линейными по $\Lambda - 1$ слагаемыми. В результате для корней (12) можно получить следующие аналитические представления:

$$Q_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1 + \Lambda}{1 - \Pi} \left(M - \frac{1}{\sqrt{2}} \right); \quad -1 \leq \Lambda < -\Pi; \quad (16)$$

$$Q_3 = M + \frac{\sqrt{\Lambda + \Pi}}{\sqrt{2 + 6M^2}} - \frac{M(\Lambda + \Pi)}{2(1 + 3M^2)^2} + \frac{(7M^2 - 1)(\Lambda + \Pi)^{3/2}}{8\sqrt{2}(1 + 3M^2)^{7/2}}; \quad -\Pi \leq \Lambda < 1; \quad (17)$$

$$Q_4 = \begin{cases} M - \frac{\sqrt{\Lambda + \Pi}}{\sqrt{2 + 6M}} - \frac{M(\Lambda + \Pi)}{2(1 + 3M^2)^2} + \\ + \frac{(7M^2 - 1)(\Lambda + \Pi)^{3/2}}{8\sqrt{2}(1 + 3M)^{7/2}}, & -\Pi \leq \Lambda \leq 0; \\ H(\Lambda - 1), & 0 \leq \Lambda \leq 1; \end{cases} \quad (18)$$

$$\Pi = 0.581; \quad M = 0.682.$$

Здесь M — действительный корень уравнения

$$(1 + Q^2)^2 - 4Q + \Pi = 0,$$

а H вычисляется по формуле

$$H = M - \frac{\sqrt{\Pi}}{\sqrt{2 + 6M^2}} - \frac{M\Pi}{2(1 + 3M^2)^2} + \frac{(7M^2 - 1)\Pi^{3/2}}{8\sqrt{2}(1 + 3M^2)^{7/2}}.$$

Расчеты показали, что для определения корней уравнения (12) с положительной действительной частью и двумя верными значащими цифрами достаточно упрощенного вида соотношений (16)–(18):

$$Q_{1,2} = 0.648 - 0.059\Lambda; \quad -1 \leq \Lambda < -0.581; \quad (19)$$

$$Q_3 = 0.682 + 0.457\sqrt{0.581 + \Lambda} - 0.059\Lambda(0.581 + \Lambda); \quad -0.581 \leq \Lambda < 1; \quad (20)$$

$$Q_4 = \begin{cases} 0.682 - 0.457\sqrt{0.581 + \Lambda} - \\ - 0.059\Lambda(0.581 + \Lambda), & -0.581 \leq \Lambda \leq 0; \\ -0.3(\Lambda - 1), & 0 \leq \Lambda \leq 1, \end{cases} \quad (21)$$

Индекс при Q указывает, каким ветвям рис. 2 соответствует данный корень.

Согласно (8), (9), через Q_n можно выразить характерные толщины пограничного слоя для различных ветвей:

$$\delta_n = (kQ_n)^{-1} \quad n = 1, 2, 3, 4. \quad (22)$$

Соотношения (22) с учетом (19)–(21), в которых

$$\Lambda \equiv \frac{g\alpha}{v^2k^2} \left(W - \left(\frac{1}{\alpha k} + \alpha k \right) \right), \quad (23)$$

являются искомыми приближенными аналитическими выражениями для толщины пограничного слоя в окрестности критического значения поверхностной плотности электрического заряда.

6. Анализ полученных результатов

Полученные выражения для характерной толщины пограничного слоя интересно преобразовать к виду, в котором эта величина будет измеряться в долях длины волны λ . Очевидно, что

$$d = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{\delta k}{2\pi} = (2\pi Q)^{-1}.$$

Таким образом, толщина пограничного слоя, обезразмеренная на длину волны, вычисляется по формуле

$$d_n = (2\pi Q_n)^{-1}; \quad n = 1, 2, 3, 4. \quad (24)$$

Здесь индекс n имеет тот же смысл, что и в (19)–(21).

На рис. 4 показаны рассчитанные по формулам (19)–(21), (24) характерные толщины пограничных слоев в долях длины волны для движений, реализующихся на поверхности бесконечно глубокой вязкой идеально проводящей жидкости при поверхностной плотности заряда из диапазона (15). Сам диапазон изменения W преобразован с помощью (23) в отрезок $[-1; 1]$, на котором изменяется вспомогательный параметр Λ , однозначно связанный с W формулой (23). Между наиболее существенными для проводимого анализа значения параметров Λ и W имеются следующие соответствия:

$$\Lambda = \pm 1 \leftrightarrow W = \frac{1}{\alpha k} + \alpha k \pm \frac{v^2k^2}{\alpha g};$$

$$\Lambda = \Lambda_B = 0 \leftrightarrow W = W_B = \frac{1}{\alpha k} + \alpha k;$$

$$\Lambda = \Lambda_A \approx -0.581 \leftrightarrow W = W_A = \frac{1}{\alpha k} + \alpha k - 0.581 \frac{v^2k^2}{\alpha g}.$$

Из рис. 4 следует, что в окрестности критического для данной длины волны значения поверхностной плотности электрического заряда толщина пограничного слоя не может оцениваться по общепринятой формуле (1). Во-первых, во внутренней точке $W = W_A$ этого диапазона значение параметра ω , входящего в (1), обращается в нуль, и формула (1) предсказывает бесконечную толщину пограничного слоя, в то время как корректное вычисление дает значение примерно 0.2 от длины волны.

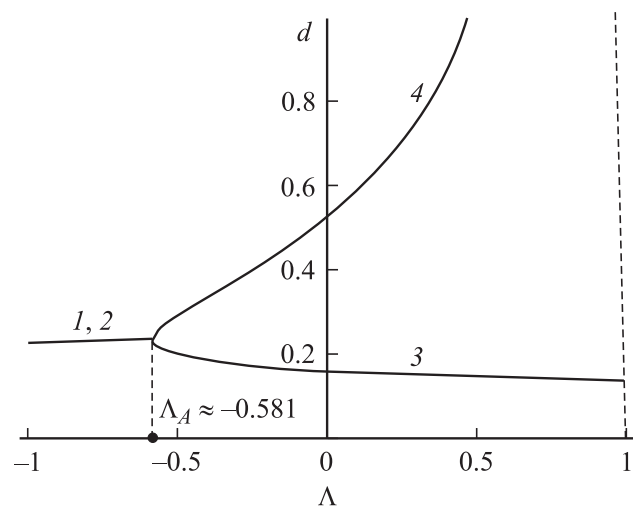


Рис. 4. Зависимость толщины пограничного слоя d , обезразмеренной на длину волны, от безразмерного параметра Λ (15), пропорционального отклонению квадрата поверхностной плотности электрического заряда от критического значения.

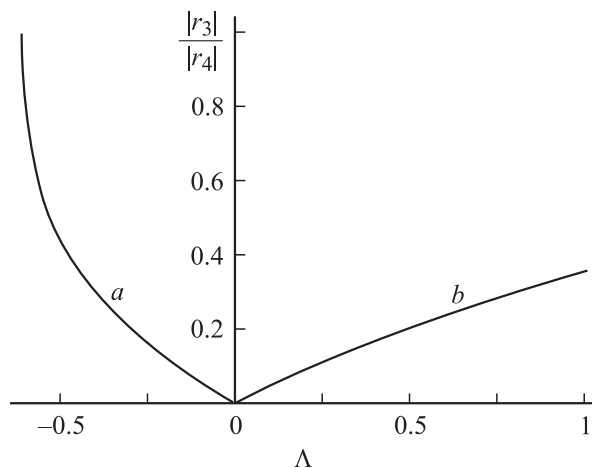


Рис. 5. Зависимость отношения: *a* — декремента затухания движения, связанного с устойчивой частью ветви 3 на рис. 4 при ($\Lambda < 0$), к декременту затухания движения, связанного с ветвью 4 на рис. 4; *b* — инкремента нарастания неустойчивости движения связанного с неустойчивой частью ветви 3 на рис. 4 при ($\Lambda > 0$), к декременту затухания движения, связанного с ветвью 4 на рис. 4.

Во-вторых, формула (1) никак не отражает факт бифуркационного поведения решения уравнений движения в обозначенном диапазоне. При $W > W_A$ (на рис. 4 это область $\Lambda > \Lambda_A \approx -0.581$) в околоскритической области значений поверхностной плотности электрического заряда реализуются два апериодических движения (ветви 3 и 4 на рис. 4), каждому из которых соответствует своя характерная толщина пограничного слоя. Движению, связанному с ветвью 3, отвечающему за реализацию неустойчивости, соответствует тонкий пограничный слой в десятые доли длины волны, толщина которого уменьшается с увеличением поверхностной плотности электрического заряда. Апериодическое движение, связанное с ветвью 4, не претерпевает неустойчивости и сопровождается ветвь 3 исключительно на рассматриваемом диапазоне. Толщина отвечающего ему пограничного слоя увеличивается в ростом поверхностной плотности электрического заряда и при критическом значении заряда составляет примерно половину длины волны. Дальнейшее увеличение поверхностной плотности электрического заряда приводит к асимптотическому росту d_4 до бесконечности при $\Lambda = 1$.

Описанные апериодические движения не взаимодействуют в приближении волн малой амплитуды и накладываются друг на друга аддитивно. Поэтому в условиях эксперимента при докритическом значении поверхностной плотности заряда отчетливей будет наблюдаться наиболее слабо затухающее движение: движение с наименьшим по модулю параметром r (см. соотношение (7) и комментарий к нему). При закритическом значении заряда легче наблюдать движение с медленно растущей во времени амплитудой, чем быстро затухающее движение. На основании (3), (7), (9) и учитывая действитель-

ность Q в рассматриваемых условиях, несложно найти, что

$$\left| \frac{r_3}{r_4} \right| = \left| \frac{Q_3^2 - 1}{Q_4^2 - 1} \right|.$$

На рис. 5 показано, как ведет себя отношение $|r_3/r_4|$ с изменением Λ . Видно, что в околоскритической области $\Lambda < 0$ наименее слабо затухает и претерпевает неустойчивость ветвь 3, а движение 4 на фоне ветви 3 быстро затухает. В закритической области, $2 \leq W \leq W_C$, рассматриваемого диапазона физических параметров движение 3 медленно нарастает на фоне быстро затухающего движения 4, а при $W_C \leq W$ остается вообще одно реализуемое движение 3. Поэтому в расчетах, по крайней мере, на начальной стадии развития неустойчивости при околоскритических значениях поверхностной плотности электрического заряда, движению вязкой жидкости нужно сопоставлять толщину пограничного слоя, соответствующего ветви 3, т.е. проводить расчеты по формулам (20), (24).

Заключение

Описанная схема расчета характерной толщины пограничного слоя вблизи свободной поверхности электрически заряженной поверхности вязкой несжимаемой идеально проводящей жидкости, связанного с периодической волной, позволяет выделить физические условия, при которых аналитические формулы для толщины пограничного слоя принципиально отличаются от принятых для описания волнового движения под незаряженной поверхностью жидкости. Предлагаемая модель демонстрирует качественно новый взгляд на теорию пограничного слоя под свободной поверхностью жидкости, несущей однородно распределенный электрический заряд, докритический в смысле реализации неустойчивости Тонкса—Френкеля. Ясно, что при значениях поверхностной плотности заряда, близких к околоскритической, следует вводить две характерных толщины пограничного слоя в соответствии с двумя видами реализующихся движений жидкости. Первый пограничный слой соответствует движению, претерпевающему неустойчивость, а его толщина не превышает десятых долей длины волны. Но в тех условиях уравнения движения вязкой жидкости допускают еще одно быстрозатухающее движение жидкости, со значительно большей характерной толщиной пограничного слоя. Вихревая часть этого движения заполняет слой с толщиной порядка длины волны, но затухает значительно быстрее, чем первое движение, и поэтому второй тип движения должен вносить более слабый вклад в практические расчеты движения жидкости, по крайней мере, на начальной стадии развития неустойчивости.

Уравнение (4), рассматриваемое как уравнение относительно вспомогательного параметра q , имеет самостоятельный физический смысл. Действительная часть корня q уравнения (4), удовлетворяющего условию (5), —

величина, обратная характерной толщине пограничного слоя при любом значении поверхностной плотности электрического заряда.

Работа выполнена при поддержке грантов президента РФ № МД-1990-2005-1 и РФФИ № 06-01-00066-а.

Список литературы

- [1] Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 712 с.
- [2] Longuet-Higgins M.S. // Royal. Soc. London. Trans. Ser. A. 1953. Vol. 245. N 903. P. 535–581.
- [3] Longuet-Higgins M.S. // J. Fluid Mech. 1992. Vol. 240. P. 659–679.
- [4] Fedorov A.V., Melville W.K. // J. Fluid Mech. 1998. Vol. 354. P. 1–42.
- [5] Wu J.Z. // Phys. Fluid. 1995. Vol. 7. N 10. P. 2375–3395.
- [6] Lundgren T., Koumoutsakos P. // J. Fluid Mech. 1999. Vol. 382. P. 351–366.
- [7] Pozrikidis C. // J. Fluid Mech. 2000. Vol. 425. P. 335–366.
- [8] Фабер Т.Е. Гидроаэродинамика. М.: Постмаркет, 2001. 560 с.
- [9] Бэтчелор Дж.К. Введение в динамику жидкости. М.–Ижевск: НИЦ „Регулярная и хаотическая динамика“, 2004. 768 с.
- [10] Ламб Г. Гидродинамика. М.–Л.: ОГИЗ, 1947. 928 с.
- [11] Френкель Я.И. // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. № 4. С. 348–350.
- [12] Григорьев А.И., Ширяева О.С., Коромыслов В.А., Белоножко Д.Ф. // ЖТФ. 1997. Т. 67. Вып. 8. С. 27–33.
- [13] Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 11. С. 37–45.
- [14] Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 3. С. 5–13.
- [15] Климов А.В., Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 10. С. 9–18.
- [16] Григорьев А.И., Ширяева О.С., Белоножко Д.Ф., Климов А.В. // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 2. С. 19–25.