

01;09

## Переходное излучение частиц в двугранном и трехгранном угле

© А.В. Серов, Б.М. Болотовский

Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН,  
119991 Москва, Россия  
e-mail: serov@x4u.lebedev.ru

(Поступило в Редакцию 29 марта 2007 г. В окончательной редакции 6 августа 2007 г.)

Методом изображений определено поле переходного излучения заряженной частицы, пересекающей двугранный угол, образованный идеально проводящими плоскими поверхностями. Проведены расчеты спектрально-угловых распределений интенсивности излучения в двугранных углах с различными углами раствора. Рассматривалось влияние на характеристики излучения направления движения частицы и положения точки, в которой частица пересекает поверхность. Получены распределения переходного излучения в трехгранном угле.

PACS: 41.60.-m, 52.70.Gw

### Введение

В теории переходного излучения важным частным случаем является излучение, возникающее при падении частицы на идеально проводящую плоскость. Эта задача была рассмотрена в первой работе В.Л. Гинзбурга и И.М. Франка по теории переходного излучения [1]. Ими, в частности, было показано, что переходное излучение частицы на идеально проводящей плоскости можно рассматривать как излучение заряда и его зеркального изображения. При падении заряда на идеально проводящую плоскость заряд и его изображение встречаются в точке пересечения плоскости. Возникающее при этом излучение можно представить как сумму излучений, возникающих при остановке заряда и его изображения.

Как было показано в [2,3], метод изображений позволяет описать переходное излучение на более сложных поверхностях. В работе [2] было рассмотрено переходное излучение заряженной частицы для случая, когда идеально проводящая поверхность образована двумя плоскостями, составляющими двугранный угол с раствором  $90^\circ$ . В работе [3] рассматривался более общий случай, когда плоскости пересекаются не только под прямым углом, а под углом  $\alpha = \pi/m$ , где  $m$  — целое число. В этой работе было отмечено, что метод изображений пригоден для описания переходного излучения также и в трехгранном угле. Ниже рассмотрим особенности переходного излучения заряженной частицы в двугранных углах с различными углами раствора и в трехгранном угле, когда угол образован тремя взаимно перпендикулярными плоскостями или плоскими поверхностями.

### Излучение в двугранном угле

Если в пространстве имеется только одна идеально проводящая плоскость и над ней движется заряженная частица, то поле в пространстве над плоскостью может быть представлено как сумма полей заданной частицы

и его изображения. При этом изображение движется таким образом, что в любой момент времени заряд и его изображение находятся в зеркально симметричных точках относительно плоскости. Для выполнения граничных условий на плоскости нужно потребовать, чтобы заряд изображения был равен по величине и противоположен по знаку исходному заряду [1].

Две пересекающиеся плоскости образуют в пространстве двугранный угол. Как было показано в работе [3], поле частицы внутри двугранного угла может быть представлено в виде суммы полей самой частицы и нескольких изображений в свободном пространстве. Такое представление может быть выполнено при определенных ограничениях на величину двугранного угла, а именно раствор  $\alpha$  двугранного угла должен равняться  $\alpha = \pi/m$ , где  $m$  — целое число. При этом число изображений равно  $2m - 1$ . Заряды всех изображений равны по величине исходному заряду, а знаки выбираются так, чтобы удовлетворялись граничные условия на плоскостях.

Начнем рассмотрение со случая, когда граница раздела представляет собой двугранный угол с раствором  $90^\circ$ . Введем прямоугольную систему координат  $xuz$ . Будем считать, что координатные плоскости  $xu$ ,  $xz$  представляют собой идеально проводящие плоскости. В дальнейшем будем рассматривать процессы излучения электромагнитных волн в области пространства  $y > 0$ ,  $z > 0$ . Предположим, что в этой области имеется движущаяся заряженная частица, закон движения которой задается формулами

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \quad (1)$$

Поле, возбуждаемое частицей в пространстве  $y > 0$ ,  $z > 0$ , эквивалентно сумме полей самой частицы и трех ее изображений, движущихся в свободном пространстве. Исходный заряд  $q$  движется по траектории  $\mathbf{r}_1^{(q)}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$ . Второй заряд (изображение) имеет противоположный знак  $-q$  и движется по траектории, симметричной траектории исходного заряда относительно плоскости  $xu$ , т. е.  $\mathbf{r}_2^{(-q)}(t) = \{x(t), y(t), -z(t)\}$ .

Третий заряд (изображение)  $-q$  имеет траекторию, симметричную траектории исходного заряда относительно плоскости  $xz$  ( $\mathbf{r}_3^{(-q)}(t) = \{x(t), -y(t), z(t)\}$ ), а четвертый заряд (изображение)  $q$  движется по траектории, симметричной траектории второго заряда относительно плоскости  $xz$  ( $\mathbf{r}_4^{(q)}(t) = \{x(t), -y(t), -z(t)\}$ ).

Поля исходной частицы  $q$  и второго заряда-изображения  $-q$  удовлетворяют граничным условиям на поверхности  $xy$ . То же самое можно сказать о полях, возбуждаемых третьим зарядом  $-q$  и четвертым  $q$ . В самом деле третий заряд является изображением четвертого заряда, поскольку заряды имеют противоположные знаки, а их траектории симметричны относительно плоскости  $xy$  ( $\mathbf{r}_3^{(-q)}(t) = \{x(t), -y(t), z(t)\}$ ,  $\mathbf{r}_4^{(q)}(t) = \{x(t), -y(t), -z(t)\}$ ). Поле, возбуждаемое четырьмя зарядами, можно представить как сумму двух пар зарядов

$$\sum_{i=1}^4 \mathbf{E}_i = (\mathbf{E}_1^{(q)} + \mathbf{E}_2^{(-q)}) + (\mathbf{E}_4^{(q)} + \mathbf{E}_3^{(-q)}), \quad (2)$$

причем поле каждой пары удовлетворяет граничным условиям на идеально проводящей плоскости  $xy$ .

Можно заметить, что сумма полей  $\mathbf{E}_1^{(q)}$  и  $\mathbf{E}_3^{(-q)}$  удовлетворяет граничным условиям на плоскости  $xz$ , так как заряды имеют противоположные знаки и траектории, симметричные относительно этой плоскости. Таким же условиям удовлетворяет сумма полей  $\mathbf{E}_4^{(q)} + \mathbf{E}_2^{(-q)}$ .

Поэтому можно сказать, что поле переходного излучения, возбуждаемого в области  $y > 0, z > 0$  частицей, вылетающей из проводящей поверхности (или, наоборот, налетающей на проводящую поверхность), можно представить в виде суммы полей излучения, возбужденных при мгновенном старте (или, наоборот, остановке) самой заряженной частицы и трех ее изображений.

Поле излучения при мгновенном старте частицы в свободном пространстве может быть записано в виде [4,5].

$$E(t) = \frac{q}{R} \frac{\beta \sin \theta}{1 - \beta \cos \theta} \delta(R - ct), \quad (3)$$

где  $\beta = v/c$ ,  $v$  — скорость частицы,  $\theta$  — угол между скоростью частицы  $\beta$  и вектором  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$  — единичный вектор, направленный от заряда в точку наблюдения,  $R$  — расстояние от заряда до точки наблюдения.

Дельта-функция аргумента  $R - ct$  отражает то обстоятельство, что поле излучения отличается от нуля только на сфере  $R = ct$ , расширяющейся со скоростью света. Из выражения (3) следует, что пространственное распределение поля излучения обладает азимутальной симметрией относительно направления движения частицы. Фурье-компонента поля излучения описывается выражением

$$E_\omega = \frac{q}{2\pi c R} \frac{\beta \sin \theta}{1 - \beta \cos \theta} \exp\left(i \frac{\omega}{c} R\right). \quad (4)$$

При описании полей в двугранном угле излучение каждого из четырех зарядов описывается формулой типа (4), где для каждого заряда угол  $\theta$  и величина  $R$  имеют свои значения. Поля излучений сосредоточены на поверхностях сфер  $R_1^{(q)}$ ,  $R_2^{(-q)}$ ,  $R_3^{(-q)}$ ,  $R_4^{(q)}$ , центры которых лежат в точках старта (остановки). Сферы не перекрываются до момента времени  $t \approx d/c$ , где  $d$  — расстояние между точками старта (остановки). После этого момента в пространстве появляется некоторая область, в которой сферы перекрываются. Со временем область, в которой сферы перекрываются, расширяется так, что любая точка пространства рано или поздно попадает в эту область.

В волновой зоне, когда расстояние до точки наблюдения много больше расстояния между зарядами, сферы почти полностью перекрываются и через точку наблюдения один за другим проходят четыре импульса излучения. В этом случае расстояние от точки старта заряда до точки наблюдения можно представить в виде

$$R = |\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_{0j}| = R_0 - \mathbf{n} \mathbf{r}_{0j},$$

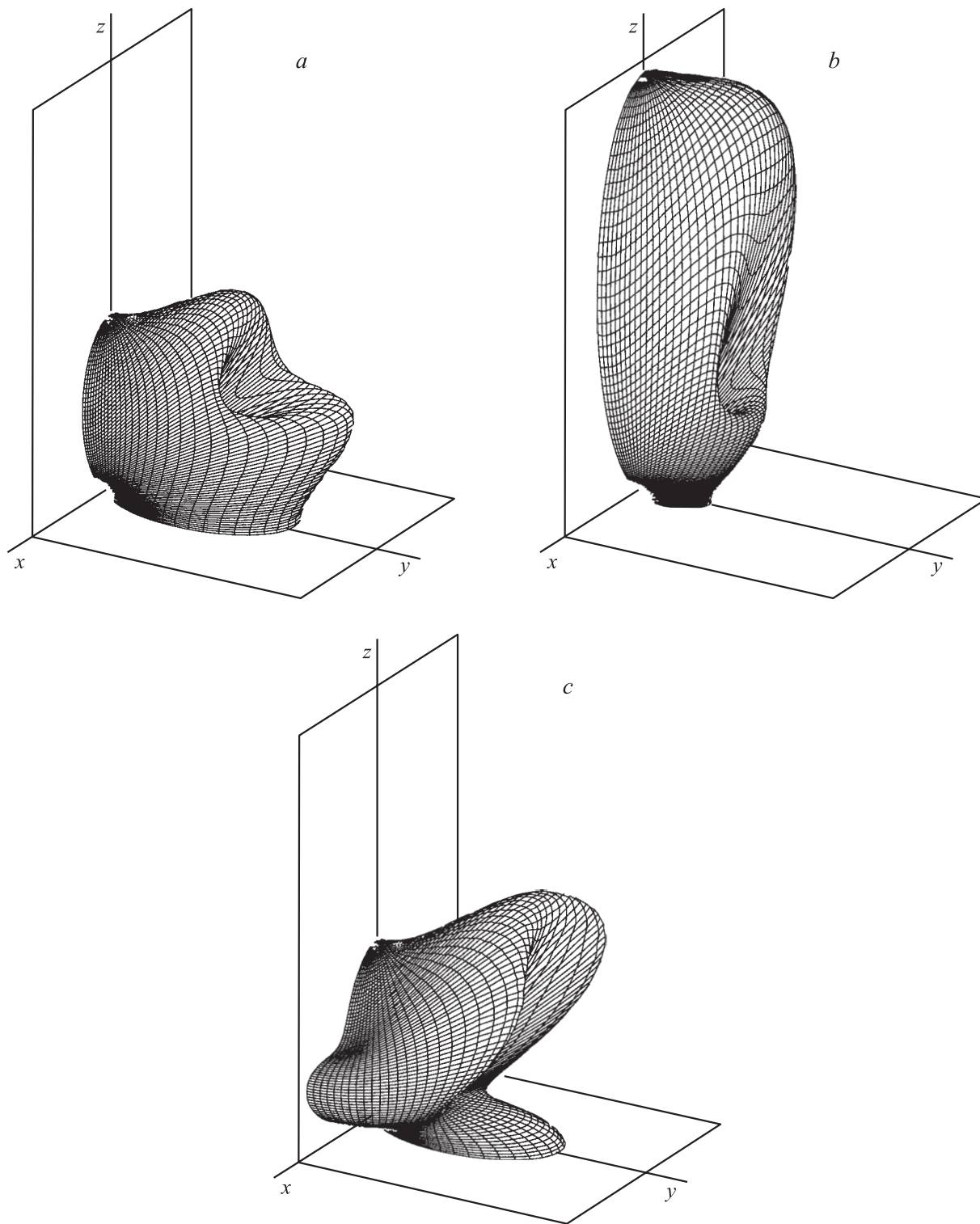
где  $\mathbf{R}_0$  — радиус-вектор из начала координат в точку наблюдения,  $\mathbf{r}_{0j}$  — радиус-вектор из начала координат в точку старта заряда  $q_j$ .

При расчете полей в волновой зоне в знаменателе формулы (4) можно пренебречь  $\mathbf{n} \mathbf{r}_{0j}$  по сравнению с  $R_0$  и считать расстояния от точки наблюдения до зарядов одинаковыми. Различаются моменты прихода импульсов излучения в точку наблюдения и углы между скоростью заряда и направлением в точку наблюдения.

Соотношения (2) и (4) позволяют рассчитать спектрально-угловое распределение переходного излучения. Были проведены расчеты интенсивности излучения частиц, движущихся в двугранных углах с различными значениями углового раствора. Изучались характеристики излучения для различных положений точки влета и направлений скорости.

На рис. 1 показано распределение интенсивности излучения  $I = f(\theta_0, \varphi_0)$  в пространстве двугранного угла с раствором  $90^\circ$ . Ось  $z$  принята за полярную,  $\theta_0$  — угол между осью  $z$  и радиус-вектором  $\mathbf{R}_0$ ,  $\varphi_0$  — угол между осью  $x$  и проекцией вектора  $\mathbf{R}_0$  на плоскость  $xy$ . Рис. 1, *a* соответствует случаю, когда релятивистская частица с приведенной энергией  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} = 4$  вылетает из точки, расположенной на ребре ( $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ ), и движется по биссектрисе двугранного угла ( $\theta_0 = 45^\circ$ ,  $\varphi_0 = 90^\circ$ ). Видно, что распределение уже не является азимутально симметричным относительно направления движения частицы: вдоль осей  $y$  и  $z$  амплитуда поля имеет заметную величину, а вдоль оси  $x$  (вдоль ребра двугранного угла) излучение равно нулю.

Как показывают расчеты, если раствор двугранного угла уменьшается, то максимумы в угловом распределении интенсивности возрастают и приближаются к плоскостям, образующим двугранный угол. Кроме того, при уменьшении двугранного угла интенсивность излучения медленней спадает с ростом угла  $\theta_0$  [3].



**Рис. 1.** Пространственное распределение интенсивности переходного излучения заряженной частицы в двугранном угле раствором  $90^\circ$ : *a, b* — частица стартует из начала координат, *c* — из точки с координатами  $x = y = 0, z = \lambda$ ; *a* и *c* — скорость частицы направлена под углом  $\theta_0 = 45^\circ$ , *b* —  $30^\circ$ . Энергия частицы  $\gamma = 4$ .

Рис. 1, *b* иллюстрирует распределение интенсивности излучения частицы, скорость которой лежит в плоскости  $yz$  и направлена под углом  $\theta_0 = 30^\circ$  к оси  $z$ . Изменение угла инъекции приводит к увеличению ин-

тенсивности вдоль плоскости  $xz$  и уменьшению вдоль плоскости  $xu$ . Расчеты показали, что, чем ближе проходит траектория частицы к одной из плоскостей угла, тем выше значение поля вдоль этой плоскости и тем

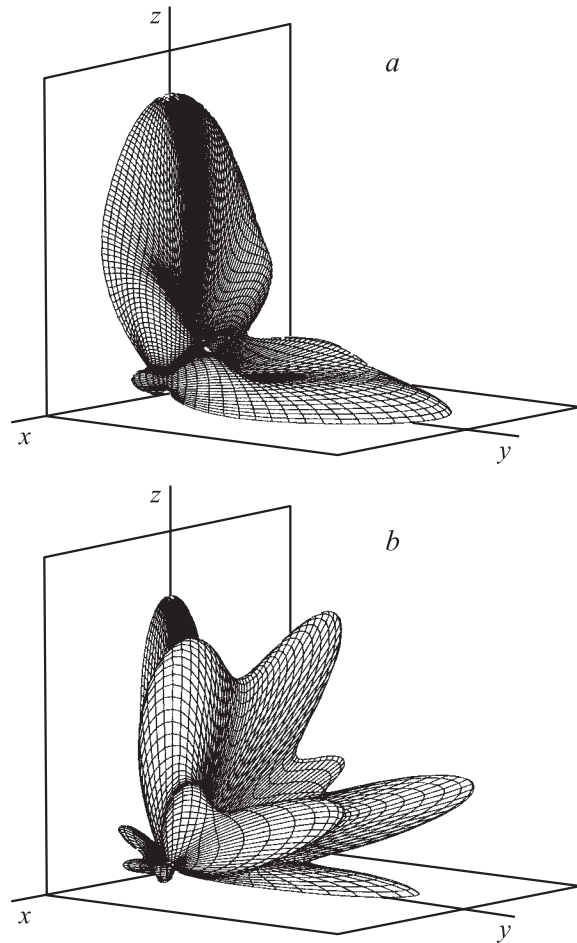
сильнее оно отличается от поля излучения вдоль другой плоскости. Эта особенность излучения может быть использована для диагностики направления движения частицы.

Как известно [6], под любым углом наблюдения переходное излучение частицы, пересекающей проводящую поверхность, имеет примерно плоский спектр в очень широком диапазоне частот (от радиочастот до частот, существенно превосходящих оптические). Спектр остается плоским и в двугранном угле, если частица вылетает из точки, расположенной на ребре угла. Поэтому распределения, представленные на рис. 1, *a* и *b* в широких пределах не зависят от частоты, на которой регистрируется излучение.

Спектрально-угловое распределение существенно определяется положением траектории частицы относительно плоскостей двугранного угла. При заданном направлении движения частицы смещение точки инжекции вдоль ребра угла (вдоль оси  $x$ ) не изменяет углового распределения. В то же время смещение в перпендикулярном направлении приводит к существенному изменению спектрально-углового распределения. Это ясно из следующих соображений: перемещение основного заряда по плоскости приводит к изменению взаимного расположения заряда и зарядов-изображений. Поэтому длительности распространения излученных волн от заряда и его изображений в точку наблюдения будут различаться. В зависимости от углов  $\theta_0$ ,  $\varphi_0$  и длины волны излучения  $\lambda$  поля в точке наблюдения будут либо усиливать, либо гасить друг друга.

Угловое распределение излучения для случая, когда частица движется параллельно биссектрисе угла, но точка инжекции смещена вдоль оси  $z$  на расстояние  $\Delta z = 0.5\lambda$ , показано на рис. 1, *c*. Сравнив рис. 1, *c* с *a* и *b* можно заметить, что при инжекции из грани в зависимости  $I = f(\theta_0, \varphi_0)$  появляются дополнительные максимумы и минимумы. Положение и величина этих максимумов зависят от длины волны. Спектр излучения под определенным углом перестает быть плоским. Поэтому изменение углового распределения может быть использовано для измерения смещения точки инжекции частиц от ребра двугранного угла. Изменяя положение точки, в которой частица пересекает плоскость угла, можно варьировать отношение интенсивностей различных частот, излучаемых в данном направлении.

Выражения (2) и (4) позволяют рассчитать спектрально-угловые характеристики переходного излучения частицы, пересекающей обе грани двугранного угла. В этом случае поле в каждой точке пространства является суммой полей, возбуждаемых частицей при пересечении обеих граней угла. При этом нужно учитывать изменение углов, под которыми излучение попадает в приемник из точки пересечения зарядом поверхности, и время задержки второго перехода через поверхность относительно первого. Угловая зависимость интенсивности излучения в этом случае представлена на рис. 2. Траектория частицы лежит в плоскости  $yz$ . Частица



**Рис. 2.** Пространственное распределение интенсивности переходного излучения заряженной частицы, пересекающей обе грани двугранного угла раствором  $90^\circ$ . Частица стартует из точки с координатами  $x = y = 0$ ,  $z = \lambda$  (*a*), и  $x = y = 0$ ,  $z = 1.5\lambda$  (*b*). Скорость частицы направлена под углом  $\theta_0 = 135^\circ$ . Энергия частицы  $\gamma = 4$ .

инжектируется по углом  $\theta_0 = 135^\circ$ , а ее энергия равна  $\gamma = 4$ . Рис. 2, *a* соответствует случаю когда точка инжекции имеет координаты  $x = y = 0$ ,  $z = \lambda$ , а рис. 2, *b* —  $x = y = 0$ ,  $z = 1.5\lambda$ . При сравнении этих двух рисунков видно, насколько существенна интерференция излучения при наличии идеально проводящих плоскостей.

Отметим, что частица, пересекая обе плоскости двугранного угла, движется в пространстве между плоскостями по ограниченной траектории. Движение частицы по ограниченной траектории в открытом пространстве было рассмотрено в работе И.Е. Тамма [7]. Рис. 2 показывает какое отличие вносит в излучение наличие проводящих плоскостей.

## Излучение в трехгранном угле

Рассмотрим теперь поле заряженной частицы, движущейся внутри трехгранного угла. Как уже было сказано, мы рассматриваем трехгранный угол, образованный тре-

мя взаимно перпендикулярными плоскостями. Это ограничение не является обязательным. Можно построить систему изображений и для некоторых других видов трехгранного угла.

Три взаимно перпендикулярных плоскости разобьют пространство на восемь областей — октантов [8]. В первом октанте все три координаты положительны. Именно в этом октанте и движется заряженная частица, закон движения которой имеет вид (1). Для удовлетворения граничных условий следует разместить в каждом из семи остальных октантов изображения исходного заряда. Во втором октанте изображение имеет заряд  $-q$  и расположено зеркально симметрично относительно плоскости  $yz$ . Закон движения этого изображения имеет вид  $x^{(2)} = -x(t)$ ,  $y^{(2)} = y(t)$ ,  $z^{(2)} = z(t)$ . Компоненты скорости по осям  $z$  и  $y$  у заряда и его изображения совпадают, а по оси  $x$  равны по величине и противоположны по знаку. Продолжая аналогичным образом, можно получить для других октантов знаки зарядов-изображений и законы их движения. Окончательно имеем:

1-й октант:  $q^{(1)} = q$ ,  $x^{(1)} = x(t)$ ,  $y^{(1)} = y(t)$ ,  $z^{(1)} = z(t)$ ;

2-й октант:  $q^{(2)} = -q$ ,  $x^{(2)} = -x(t)$ ,  $y^{(2)} = y(t)$ ,  $z^{(2)} = z(t)$ ;

3-й октант:  $q^{(3)} = q$ ,  $x^{(3)} = -x(t)$ ,  $y^{(3)} = -y(t)$ ,  $z^{(3)} = z(t)$ ;

4-й октант:  $q^{(4)} = -q$ ,  $x^{(4)} = x(t)$ ,  $y^{(4)} = -y(t)$ ,  $z^{(4)} = z(t)$ ;

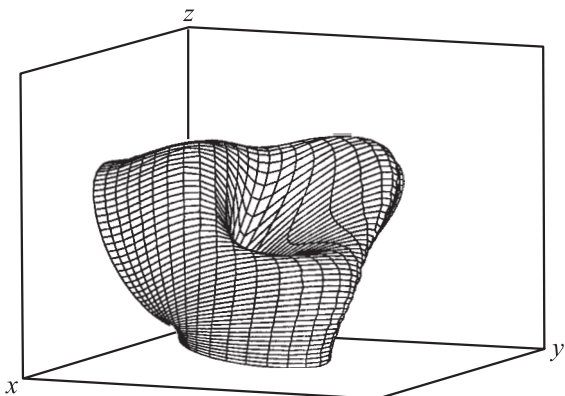
5-й октант:  $q^{(5)} = -q$ ,  $x^{(5)} = x(t)$ ,  $y^{(5)} = y(t)$ ,  $z^{(5)} = -z(t)$ ;

6-й октант:  $q^{(6)} = q$ ,  $x^{(6)} = -x(t)$ ,  $y^{(6)} = y(t)$ ,  $z^{(6)} = -z(t)$ ;

7-й октант:  $q^{(7)} = -q$ ,  $x^{(7)} = -x(t)$ ,  $y^{(7)} = -y(t)$ ,  $z^{(7)} = -z(t)$ ;

8-й октант:  $q^{(8)} = q$ ,  $x^{(8)} = x(t)$ ,  $y^{(8)} = -y(t)$ ,  $z^{(8)} = -z(t)$ .

Можно заметить, что заданный заряд и его зеркально расположенные изображения отличаются знаком заряда. Точно так же изображения, расположенные зеркально симметрично относительно координатных осей, имеют противоположные знаки. Также видно, что в любой момент времени заряды расположены попарно симметрично относительно любой из выбранных координатных плоскостей. В этом случае на плоскостях симметрии выполняются граничные условия, такие же как и на идеально проводящих плоскостях.



**Рис. 3.** Пространственное распределение интенсивности переходного излучения заряженной частицы в трехгранном угле. Частица стартует из начала координат. Энергия частицы  $\gamma = 4$ .

Отметим, что заряд-изображение, лежащий в седьмом октанте, расположен центрально симметрично относительно исходного заряда и имеет противоположно направленную скорость.

На рис. 3 показано распределение интенсивности излучения в трехгранном угле для случая, когда составляющие скорости по трем осям имеют одинаковые значения, а энергия частицы  $\gamma = 4$ . Расчеты показывают, что с ростом энергии частицы влияние плоскостей трехгранного угла на пространственное распределение интенсивности уменьшается, а диаграмма направленности все больше напоминает пространственное распределение излучения при мгновенном старте или мгновенной остановке заряда в пустоте.

## Заключение

В работе показано, что метод изображений позволяет определить поля переходного излучения заряженной частицы внутри двугранного, а также трехгранного угла, образованного идеально проводящими плоскостями. Определены поле переходного излучения и угловое распределение интенсивности. Обсуждаются некоторые физические особенности переходного излучения в двугранном и трехгранном углах.

Найденные особенности излучения дают новые возможности для генерации излучения с заданными свойствами, а также для регистрации направления движения и точки инжекции быстрых частиц по переходному излучению. Наличие двух отражающих поверхностей в двугранном угле и трех отражающих поверхностей в трехгранном угле приводит к довольно сложной интерференции переходного излучения, и этим обстоятельством можно воспользоваться при изменении спектрального и углового распределений.

Следует отметить, что полученные результаты применимы для тех частот, для которых справедливо приближение идеально проводящей поверхности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 04-02-16376).

## Список литературы

- [1] Гинзбург В.Л., Франк И.М. // ЖЭТФ. 1946. Т. 16. С. 15.
- [2] Ryazanov M.I. and Safronov A.N. Laser Phys. 1996. Vol. 6. N 4. P. 708.
- [3] Серов А.В., Болотовский Б.М. // ЖЭТФ. 2007. Т. 131. Вып. 6. С. 866.
- [4] Болотовский Б.М. // Тр. ФИАН. 1982. Т. 140. С. 95.
- [5] Болотовский Б.М., Серов А.В. // УФН. 1997. Т. 167. Вып. 10. С. 1107.
- [6] Гинзбург В.Л., Цытович В.Н. Переходное излучение и переходное рассеяние. М.: Наука, 1984.
- [7] Тамм И.Е. // J. Phys. USSR. 1939. Vol. 1. N 5-6. P. 439.
- [8] Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. М.: Наука, 1980.