01;04;10

Уравнение огибающей релятивистского электронного пучка с автомодельным профилем плотности, распространяющегося в плотной или разреженной газоплазменной среде продольно внешнему магнитному полю

© Е.К. Колесников, А.С. Мануйлов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Научно-исследовательский институт математики и механики им. В.И. Смирнова,
198504 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: Kolesnikov_evg@mail.ru, man06@mail.ru

(Поступило в Редакцию 10 апреля 2007 г.)

Получено уравнение огибающей азимутально-симметричного релятивистского электронного пучка с произвольным автомодельным профилем с учетом неламинарности и рассеяния пучка в фоновом газе, наличия продольного магнитного поля и фокусирующего радиального электрического поля, создаваемого ионным фоном.

PACS: 52.40.Mj

Введение

Задача о форме огибающей азимутально-симметричных пучков заряженных частиц в стабилизирующих внешних электрических и магнитных полях давно привлекает внимание исследователей [1–19]. В пренебрежении эффектами неламинарности и рассеяния пучка на фоновом газе для пучка с однородным профилем плотности эта задача была рассмотрена в [5–7]. Уравнение огибающей однородного неламинарного пучка без учета рассеяния было впервые сформулировано в работе [8]. В дальнейшем в работе [9] сформулированное в [8] уравнение было обобщено на случай азимутально-симметричного пучка, распространяющегося в рассеивающей среде продольно внешнему магнитному полю.

Целью настоящей работы является получение на основе сформулированных нами кинетического уравнения, уравнений переноса и уравнения для среднеквадратичного радиуса релятивистского электронного пучка (РЭП) [15,16], уравнения огибающей РЭП с произвольным автомодельным радиальным профилем плотности тока, учитывающего эффекты неламинарности и рассеяния пучка на фоновом газе при наличии внешних продольного магнитного поля и фокусирующего радиального электрического поля, создаваемого однородным ионным фоном в режиме ионной фокусировки (ИФ).

Постановка задачи

Рассмотрим азимутально-симметричный квазистационарный РЭП, распространяющийся в рассеивающей газоплазменной среде продольно внешнему магнитному полю с индукцией $\mathbf{B} = B_0\mathbf{i}_z$, где $\mathbf{i}_z$ — орт оси z, совпадающей с осью пучка. Предположим, что наряду с внешним магнитным полем на частицы пучка действует радиальное фокусирующее поле, создаваемое ионным фоном с плотностью $n_\Phi(r)$, где r — радиальная компонента в цилиндрической системе координат (r, θ, z).

В параксиальном приближении поперечная динамика частиц пучка в произвольном поперечном сегменте S^τ с временем инжекции τ будет описываться кинетическим уравнением для функции распределения $f^\tau(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp, t)$ частиц сегмента S^τ в фазовом пространстве поперечных координат $\mathbf{r}_\perp$ и импульсов $p_\perp$ [10,15]

$$\frac{\partial f^\tau}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}_\perp}{\gamma m}\cdot\nabla_\perp f^\tau + \left[-e\nabla_\perp(\varphi_0 - \beta\mu A_z) + \Omega_b \mathbf{p}_\perp \times \mathbf{i}_z\right] \times \nabla_{\mathbf{p}_\perp} f^\tau = \frac{m\gamma S}{2}\Delta_{\mathbf{p}_\perp} f^\tau, \quad (1)$$

где $\mathbf{p}_\perp = m\gamma\mathbf{v}_\perp$ — поперечная компонента релятивистского импульса; $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$ — лоренц-фактор частиц пучка; $\beta = v_z/c$ (v_z — продольная компонента скорости частиц пучка); $\Omega_b = |e|B_0/(\gamma mc)$ — гирочастота частиц пучка во внешнем магнитном поле;

$$\mu = 1 - (1-\alpha_c)/\big(\beta^2(1-\alpha_m)\big),$$

где α_c и α_m — соответственно коэффициенты зарядовой и магнитной (токовой) нейтрализации пучка; S — величина, характеризующая среднюю скорость изменения кинетической энергии поперечного движения частицы пучка в результате рассеяния в столкновениях с частицами фонового газа, которая для конкретной рассеивающей среды может быть рассмотрена как известная функция полной энергии частицы пучка $E = m\gamma c^2$. Отметим, что интеграл столкновений в правой части уравнения (1) является частным случаем интеграла столкновений Фоккера–Планка для изотропного и упругого рассеяния. Наконец, величины $\varphi_0(r)$ и A_z представляют собой соответственно скалярный потенциал внешнего радиального электрического поля и z-компоненту векторного потенциала самосогласованного магнитного поля. В рассматриваемом приближении квазистационарного параксиального пучка потенциал A_z удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta_\perp A_z = -\frac{4\pi}{c}(1-\alpha_m)J_{bz}, \tag{2}$$

где $J_{bz} = \chi I_b$ — z-компонента плотности тока пучка, I_b — полный ток пучка, а функция

$$\chi(\mathbf{r}_\perp, t) = \int f^\tau(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp, t)d\mathbf{p}_\perp \tag{3}$$

характеризует радиальный профиль плотности пучка в сегменте S^τ.

Умножая уравнение (1) последовательно на 1, $\mathbf{p}_\perp$ и $p_\perp^2/2m\gamma$ и интегрируя по пространству поперечных импульсов, получим соответственно уравнения переноса массы, импульса и энергии в рассматриваемом сегменте [10,16]

$$\frac{\partial\chi}{\partial t} + \nabla_\perp \cdot \left(\frac{\chi\tilde{p}_\perp}{m\gamma}\right) = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial\chi\tilde{p}_\perp}{\partial t} + \nabla_\perp \cdot \left(\chi\frac{\tilde{\mathbf{p}}_\perp\tilde{\mathbf{p}}_\perp}{m\gamma}\right) + e\chi\nabla_\perp(\varphi_0 - \beta\mu A_z)$$
$$+\chi\Omega_b(\mathbf{i}_z\times\tilde{\mathbf{p}}_\perp) = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\chi\tilde{p}_\perp^2}{2m\gamma}\right) = -\nabla_\perp\cdot\left(\chi\frac{\tilde{\mathbf{p}}_\perp\tilde{p}_\perp^2}{2m^2\gamma^2}\right)$$
$$-\frac{e\chi\tilde{\mathbf{p}}_\perp}{m\gamma}\nabla_\perp(\varphi_0 - \beta\mu A_z) - \frac{1}{\gamma}\frac{d\gamma}{dt}\frac{\chi\tilde{p}_\perp^2}{2m\gamma} + \chi S, \tag{6}$$

где для некоторой функции G определено усреднение по поперечным импульсам в виде

$$\tilde{G}(\mathbf{r}_\perp, t) = \frac{1}{\chi}\int G(\mathbf{p}_\perp)f^\tau(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp, t)d\mathbf{p}_\perp. \tag{7}$$

Из уравнений (4)–(6) в рассматриваемом азимутально-симметричном случае следует закон сохранения среднего обобщенного углового момента частицы сегмента [16]

$$\tilde{P}_\theta = L + \frac{m\gamma\Omega_b}{4}\mathfrak{R}^2 = \tilde{P}_\theta^0 = \text{const}, \tag{8}$$

где

$$L = \int \chi r_\perp \tilde{p}_\theta dr_\perp, \tag{9}$$

$$\mathfrak{R}^2 \equiv 2\int \chi r^2 dr_\perp \tag{10}$$

— соответственно средний угловой момент частицы рассматриваемого сегмента пучка S^τ и среднеквадратичный радиус этого сегмента.

Из уравнения (5) после скалярного умножения на $\mathbf{r}_\perp/2$ и интегрирования по поперечным координатам может быть получено уравнение вириала [16]

$$E_\perp - \frac{d}{dt}\left(\frac{m\gamma}{8}\frac{d\mathfrak{R}^2}{dt}\right) = \kappa T_B + e^2\langle N_\Phi(r_\perp)\rangle - \frac{\Omega_b L}{2}, \tag{11}$$

где

$$E_\perp = \int \frac{\chi p_\perp^2}{2m\gamma}d\mathbf{r}_\perp \tag{12}$$

— средняя кинетическая энергия поперечного движения частицы рассматриваемого сегмента, $\kappa = \mu(1-\alpha_m)$,

$$T_B = e^2\beta^2 N_b/2 = e\beta I_b/2c$$

— так называемая температура Беннета (здесь N_b — линейная концентрация электронов в пучке),

$$\langle N_\Phi(\mathbf{r}_\perp)\rangle = \int \chi N_\Phi(r_\perp)d\mathbf{r}_\perp \tag{13}$$

— усредненная по радиальному профилю пучка линейная плотность ионов $N_\Phi(\mathbf{r}_\perp)$, определенная в трубке радиуса $\mathbf{r}_\perp$.

Наконец, с помощью уравнений (4) и (6) может быть получено уравнение для средней энергии $E_\perp$

$$\frac{d\gamma E_\perp}{dt} = \gamma\left[\int e\chi\frac{\partial\varphi_0}{\partial t}d\mathbf{r}_\perp - \Lambda_b\frac{d}{dt}\ln\left(\frac{\Lambda_b}{\kappa T_b}\right)\right.$$
$$\left.+\int\chi S d\mathbf{r}_\perp\right], \tag{14}$$

где $\Lambda_b = -1/2\int\chi e\beta\mu A_z d\mathbf{r}_\perp$ — средняя потенциальная энергия частицы пучка в эффективном электрическом поле

$$E^{\text{eff}} = -\nabla_\perp(-\beta\mu A_z).$$

Комбинируя уравнения (11) и (14), получим уравнение для среднеквадратичного радиуса пучка

$$\frac{d}{dt}\left(\gamma^2\mathfrak{R}^3\frac{d^2\mathfrak{R}}{dt^2} + \gamma\frac{d\gamma}{dt}\mathfrak{R}^3\frac{d\mathfrak{R}}{dt} + \frac{4\mathfrak{R}^2\gamma\kappa T_B}{m}\right.$$
$$\left.+\frac{4\mathfrak{R}^2\gamma e^2\langle N_\Phi(\mathbf{r}_\perp)\rangle}{m} + \frac{\gamma^2\Omega_b^2\mathfrak{R}^4}{4}\right) = \frac{4\gamma\mathfrak{R}^2}{m}\left(-\kappa T_b\frac{d\Gamma}{dt}\right.$$
$$\left.-\int e\varphi_0\frac{\partial\chi}{\partial t}d\mathbf{r}_\perp + e^2\langle N_\Phi(\mathbf{r}_\perp)\rangle\frac{d}{dt}\ln\left(\frac{\mathfrak{R}}{R_c}\right)^2 + \int\chi S d\mathbf{r}_\perp\right), \tag{15}$$

где

$$\Gamma = \frac{\Lambda_b}{\kappa T_B} - \ln\left(\frac{\mathfrak{R}}{R_c}\right)^2, \tag{16}$$

здесь R_c — заданный радиус экранировки поперечного электромагнитного поля.

С помощью уравнения для вириала (11) и интеграла (8) выражение, стоящее в левой части (15) под знаком производной, может быть записано в виде

$$\gamma^2\mathfrak{R}^3\frac{d^2\mathfrak{R}}{dt^2} + \gamma\frac{d\gamma}{dt}\mathfrak{R}^3\frac{d\mathfrak{R}}{dt} + \frac{4\mathfrak{R}^2\gamma\kappa T_B}{m}$$
$$+\frac{4\mathfrak{R}^2\gamma e^2\langle N_\Phi(\mathbf{r}_\perp)\rangle}{m} + \frac{\gamma^2\Omega_b^2\mathfrak{R}^4}{4} = 4\left(E^2 + \frac{\tilde{P}_\theta^2}{m^2}\right), \tag{17}$$

где

$$E = \frac{\gamma\mathfrak{R}}{2}\left[\frac{4E_\perp}{m\gamma} - \left(\frac{d\mathfrak{R}}{dt}\right)^2 - \left(\frac{2L}{m\gamma\mathfrak{R}}\right)^2\right]^{1/2} \tag{18}$$

— среднеквадратичный эмиттанс рассматриваемого сегмента пучка.

Как следует из (15) и (17), задача об определении среднеквадратичного радиуса пучка сводится к решению уравнения

$$\frac{d^2\mathfrak{R}}{dt^2} + \frac{1}{\gamma}\frac{d\gamma}{dt}\frac{d\mathfrak{R}}{dt} + \frac{4\kappa T_B}{\gamma m\mathfrak{R}} + \frac{4e^2\langle N_\Phi(\mathbf{r}_\perp)\rangle}{\gamma m\mathfrak{R}} + \frac{\Omega_b^2\mathfrak{R}}{4} = \frac{4(E^2+\tilde{P}_\theta^2/m^2)}{\gamma^2\mathfrak{R}^3}, \tag{19}$$

где среднеквадратичный эмиттанс может быть представлен в виде

$$E^2 = E_0^2 + \int\limits_\tau^t dt'\,\frac{\gamma\mathfrak{R}^2}{m}\Bigg(-\kappa T_B\frac{d\Gamma}{dt'} - \int e\varphi_0\frac{\partial\chi}{\partial t'}\,d\mathbf{r}_\perp + e^2\langle N_\Phi(\mathbf{r}_\perp)\rangle\frac{d}{dt}\ln\left(\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}_c}\right)^2 + \int\chi S d\mathbf{r}_\perp\Bigg), \tag{20}$$

и E_0 — начальное значение эмиттанса.

Уравнение огибающей РЭП с автомодельным профилем плотности

Сделаем теперь дополнительное предположение об автомодельности профиля плотности пучка, т. е. будем считать, что в любые моменты времени плотность пучка в сегменте S^τ зависит от отношения радиальной координаты $r_\perp$ к радиусу пучка R_b в сегменте S^τ. Нетрудно убедиться, что нормированная к единице функция $\chi(\mathbf{r}_\perp, t)$ в этом случае будет иметь вид

$$\chi(\mathbf{r}_\perp, t) = \frac{1}{2\pi R_b^2(t)}\,\Phi(\xi), \tag{21}$$

где безразмерная координата $\xi = r_\perp/R_b$, а $\Phi(\xi)$ — заданная функция, удовлетворяющая условию

$$\int\limits_0^1 \xi\Phi(\xi)d\xi = 1.$$

Кроме того, предположим, что рассеивающая среда и компенсирующий ионный фон в канале транспортировки являются однородными, т. е.

$$S = S_0 = \text{const}, \tag{23}$$

$$n_\Phi = n_\Phi^0 = \text{const}. \tag{24}$$

Покажем, что в ситуации (21), (23) и (24) из уравнений (19) и (20) может быть получено уравнение для радиуса пучка R_b в сегменте S^τ (уравнение огибающей).

1. Уравнение для среднеквадратичного эмиттанса в случае автомодельного профиля плотности пучка

Рассмотрим сначала уравнение (20), описывающее эволюцию среднеквадратичного эмиттанса пучка E в сегменте S^τ. С учетом (23), (24) и соотношения (см. (62) в [16])

$$\langle N_\Phi(r_\perp)\rangle = \frac{\pi}{2}n_\Phi^0\mathfrak{R}^2 \tag{25}$$

получим

$$\int \chi S d\mathbf{r}_\perp = S_0 \tag{26}$$

и

$$e^2\langle N_\Phi(\mathbf{r}_\perp)\rangle\frac{d}{dt}\ln\left(\frac{\mathfrak{R}}{R_c}\right) = \frac{\pi e^2 n_\Phi^0}{2}\frac{d\mathfrak{R}^2}{dt}. \tag{27}$$

Здесь $\mathfrak{R}^2 \equiv 2\int\chi r^2 d\mathbf{r}_\perp$ — удвоенный среднеквадратичный радиус сегмента пучка S^τ.

Для однородного ионного фона потенциал φ_0, удовлетворяющий граничному условию $\varphi_0(R_c) = 0$, имеет вид

$$\varphi_0 = \pi e n_\Phi^0(r_\perp^2 - R_c^2).$$

Тогда имеем

$$\int e\varphi_0\frac{\partial\chi}{\partial t}\,dr_\perp = \frac{\pi e^2 n_\Phi^0}{2}\frac{d\mathfrak{R}^2}{dt} \tag{28}$$

и, следовательно,

$$e^2\langle N_\Phi(\mathbf{r}_\perp)\rangle\frac{d}{dt}\ln\left(\frac{\mathfrak{R}}{R_c}\right) - \int d\mathbf{r}_\perp e\varphi_0\frac{\partial\chi}{\partial t} = 0. \tag{29}$$

Покажем, теперь, что для автомодельного профиля плотности производная $d\Gamma/dt \equiv 0$.

Прежде всего заметим, что в ситуации (21) при граничном условии $A_z|_{r_\perp\ge R_c} \equiv 0$ решение уравнения (2) для потенциала A_z может быть записано в виде

$$A_z = 2e\beta(1-\alpha_m)N_b\left[\int\limits_\xi^1\frac{d\xi'}{\xi'}\int\limits_0^{\xi'}\eta\Phi(\eta)d\eta - \ln\frac{R_b}{R_c}\right], \tag{30}$$

где $\xi \in [0, 1]$.

Подставив (30) в выражение для Λ_b из (14) и учитывая условие (22), получим

$$\Lambda_b = -\kappa T_B\left[2\int\limits_0^1 d\xi\xi\Phi(\xi)\int\limits_0^1\frac{d\xi'}{\xi'}\int\limits_0^{\xi'}d\xi''\xi''\Phi(\xi'') - \ln\left(\frac{R_b}{R_c}\right)^2\right]. \tag{31}$$

Наконец, подставив (21) в выражение (10), получим линейное соотношение между радиусом пучка R_b в сегменте S^τ и среднеквадратичным радиусом $\mathfrak{R}$

$$\mathfrak{R} = \eta_\Phi R_b, \tag{32}$$

где постоянный коэффициент η_Φ определяется интегралом

$$\eta_\Phi = \left[2\int_0^1 \Phi(\xi)\xi^3 d\xi\right]^{1/2}. \quad (33)$$

С учетом (31) и (32) выражение (16) для Γ может быть записано в виде

$$\Gamma = -2\left[\int_0^1 d\xi\xi\Phi(\xi)\int_\xi^1 \frac{d\xi'}{\xi'}\int_0^{\xi'} d\xi''\xi''\Phi(\xi'') + \ln\eta_\Phi\right] = \text{const}, \quad (34)$$

и, следовательно, для автомодельного профиля плотности пучка производная

$$\frac{d\Gamma}{dt} \equiv 0. \quad (35)$$

С учетом (26), (29) и (35) уравнение (20) в рассматриваемом случае принимает вид

$$E^2 = E_0^2 + S_0\int_\tau^t dt'\,\frac{\gamma\Re^2}{m}. \quad (36)$$

2. Уравнение огибающей пучка без учета рассеяния на фоновом газе

Рассмотрим сначала простейший случай, когда рассеянием частиц пучка в столкновениях с частицами фонового газа можно пренебречь. Из (36) следует, что при $S_0 = 0$ среднеквадратичный эмиттанс пучка является интегралом движения

$$E = E_0 = \text{const}. \quad (37)$$

Кроме того, предположим, что в рассматриваемом сегменте полный ток пучка также сохраняется в процессе транспортировки

$$I_b = ce\beta N_b = I_{b0} = \text{const}. \quad (38)$$

Заметим, что в параксиальном приближении условие (38) оказывается всегда выполненным в ультрарелятивистском пределе $\beta \approx 1$, а для произвольных β — при дополнительном предположении о стационарности пучка.

Уравнение огибающей пучка при условиях (37), (38) может быть получено из уравнения (19), которое с учетом (25), (32) и (37) принимает вид

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{1}{\gamma'}\frac{d\gamma'}{dt}\frac{d\xi}{dt} + \frac{\kappa\beta\beta_0\omega_{b0}^2}{2\gamma'\eta_\Phi^2}\frac{1}{\xi} + \frac{\omega_{\Phi0}^2\xi}{2\gamma'\gamma_0} + \frac{\Omega_b^2\xi}{4\gamma'^2} = \frac{4}{\eta_\Phi^4\gamma'^2\xi^3}\left(\frac{E_0}{\gamma_0^2R_{b0}^4} + \frac{\tilde{p}_\theta^2}{m^2\gamma_0^2R_{b0}^4}\right), \quad (39)$$

где безразмерный радиус

$$\xi = R_b/R_{b0},$$

$$\gamma' = \gamma/\gamma_0,$$

$$\omega_{\Phi0}^2 = 4\pi e^2 n_\Phi^0/(\gamma_0 m),$$

$$\omega_{b0}^2 = 4\pi e^2\langle n_{b0}\rangle/(\gamma_0 m)$$

($\langle n_{b0}\rangle = N_b^0/(\pi R_{b0}^2)$ — средняя начальная плотность пучка в сегменте S^τ).

Используя (8) и (9), получим

$$\frac{\tilde{P}_\theta}{m\gamma_0} = \frac{R_{b0}^2}{2}\left(\langle 2\Phi(\xi)\xi^3\dot\theta_0(\xi)\rangle + \frac{\Omega_b}{2}\right), \quad (40)$$

где

$$\langle\Phi(\xi)\xi^3\dot\theta_0(\xi)\rangle = \int_0^1 \Phi(\xi)\xi^3\dot\theta_0(\xi)d\xi. \quad (41)$$

Учитывая (40) и вводя безразмерное время $t' = t/t_0$, где

$$t_0 = \left(\omega_{b0}\beta_0\sqrt{|\kappa_0|}/\eta_\Phi\right)^{-1}, \quad (42)$$

запишем уравнение (39) в безразмерном виде

$$\frac{d^2\xi}{dt'^2} + \frac{1}{\gamma'}\frac{d\gamma'}{dt'}\frac{d\xi}{dt'} + \frac{\text{sign}(\kappa)}{2\gamma'}\left(\frac{|\kappa|\beta}{|\kappa_0|\beta_0}\right)\frac{1}{\xi} + \frac{\delta^2\xi}{2\gamma'} + \frac{\lambda^2\xi}{4\gamma'^2} = \frac{1}{\gamma'^2\xi^3}\left(\varepsilon^2 + \left(\sigma_\theta + \frac{\lambda}{2}\right)^2\right), \quad (43)$$

где безразмерные параметры

$$\delta = \frac{\omega_{\Phi0}\eta_\Phi}{\omega_{b0}\beta_0\sqrt{|\kappa_0|}}, \quad \lambda = \frac{\Omega_b\eta_\Phi}{\omega_{b0}\beta_0\sqrt{|\kappa_0|}}, \quad (44)$$

$$\sigma_\theta = \frac{2\langle\Phi(\xi)\xi^3\dot\theta_0(\xi)\rangle}{\omega_{b0}\beta_0\sqrt{|\kappa_0|}\eta_\Phi}, \quad \varepsilon = \frac{2E_0}{\omega_{b0}\beta_0\sqrt{|k_0|}\eta_\Phi\gamma_0R_{b0}^2}. \quad (45)$$

Для ответа на вопрос о возможности реализации в конкретных случаях тех или иных режимов транспортировки с автомодельным профилем плотности, задаваемых соотношением (21) и уравнением (43), требуются дополнительные предположения о свойствах системы.

Рассмотрим, например, частный случай холодного пучка с δ-образной функцией распределения f^τ

$$f^\tau(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp, t) = \chi(\mathbf{r}_\perp, t)\delta(\mathbf{p}_\perp - \tilde{\mathbf{p}}_\perp) \quad (46)$$

и линейной зависимостью компонент поперечной скорости $\tilde{v}_r$ и $\tilde{v}_\theta$ от радиальной координаты r

$$\tilde{v}_r = \frac{\tilde{p}_r}{m\gamma(t)} = \frac{r}{R_b}\dot{R}_b(t), \quad (47)$$

$$\tilde{v}_\theta = \frac{\tilde{p}_\theta}{m\gamma(t)} = \frac{r}{R_b}v_{\theta m}(t). \quad (48)$$

Заметим, что условиями (47) и (48) гарантируется ламинарность пучка, которая является необходимым условием корректности предположения (46).

Покажем сначала, что в ситуации (47), (48) среднеквадратичный эмиттанс пучка $E \equiv 0$. Нетрудно убедиться, что выражение (18) для среднеквадратичного эмиттанса может быть записано в виде

$$E^2 = \gamma^2 \frac{\Re^2}{2} \int \chi(\tilde{v}_r^2 + \tilde{v}_\theta^2) d\mathbf{r}_\perp - \gamma^2 \Big(\int \chi r \tilde{v}_r d\mathbf{r}_\perp \Big)^2 - \gamma^2 \Big(\int \chi r \tilde{v}_\theta d\mathbf{r}_\perp \Big)^2. \quad (49)$$

Подставив (47) и (48) в (49), с учетом (32) получим

$$E^2 = \frac{\gamma^2}{2} (\dot{\Re}^2 + v_{\theta m}^2 \eta_\Phi^2) \int \chi r^2 d\mathbf{r}_\perp - \gamma^2 \frac{\dot{\Re}^2}{\Re^2} \left(\int \chi r^2 d\mathbf{r}_\perp \right)^2 - \gamma^2 \frac{v_{\theta m}^2 \eta_\Phi^2}{\Re^2} \left(\int \chi r^2 d\mathbf{r}_\perp \right)^2$$
$$= \gamma^2 \frac{\Re^2}{4} (\dot{\Re}^2 + v_{\theta m}^2 \eta_\Phi^2) - \gamma^2 \frac{\dot{\Re}^2 \Re^2}{4} - \gamma^2 \frac{v_{\theta m}^2 \eta_\Phi^2 \Re^2}{4} \equiv 0. \quad (50)$$

Можно показать, что условия (21) и (47), (48) оказываются совместными только для однородных по сечению пучков. Действительно, подстановка (21), (47), (48) в уравнение непрерывности (4) приводит к уравнению

$$\Phi'(\xi) = 0,$$

откуда

$$\Phi(\xi) = C = \text{const}.$$

Определив постоянную C из условия нормировки (22) функции $\Phi(\xi)$, получим окончательно $\Phi(\xi) \equiv 2$ и

$$\chi(\mathbf{r}_\perp, t) = \frac{1}{\pi R_b^2}. \quad (51)$$

Как следует из (33), для $\Phi(\xi) \equiv 2$ коэффициент $\eta_\Phi = 1$. Тогда, полагая в (43) $\varepsilon = 0$ и $\eta_\Phi = 1$, получим уравнение огибающей холодного однородного по сечению пучка

$$\frac{d^2\xi}{dt'^2} + \frac{1}{r'} \frac{d\gamma'}{dt'} \frac{d\xi}{dt'} + \frac{\operatorname{sign}(\kappa)}{2\gamma'} \left(\frac{|\kappa|\beta}{|\kappa_0|\beta_0} \right) \frac{1}{\xi} + \frac{\delta^2 \xi}{2\gamma'} + \frac{\lambda^2 \xi}{4\gamma'^2} = \frac{1}{\gamma'^2 \xi^3} \left(\sigma_\theta + \frac{\lambda}{2} \right)^2.$$

Параметры δ и λ в (52) определяются аналогично (45), а σ_θ задается выражением

$$\sigma_\theta = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_{b0} \beta_0 \sqrt{|k_0|}}. \quad (53)$$

Связь между радиусом пучка R_b в сегменте S^τ и азимутальной компонентой скорости граничных частиц $v_{\theta m}$ найдем, подставив соотношения (48) и (51) в интеграл обобщенного углового момента (8). В результате получим

$$\dot{\theta}(t) = \frac{\tilde{v}_{\theta m}}{R_b} = \frac{1}{t_0} \left[\frac{1}{\xi^2} \left(\frac{\lambda}{2} + \sigma_\theta \right) - \frac{\lambda}{2} \right]. \quad (54)$$

Отметим, что решения уравнения огибающей (52) и соотношений (51), (47), (48), (54) определяют соответствующие точные решения уравнений переноса. Действительно, уравнение непрерывности для функций χ и $\tilde{v}_r$ вида (51) и (47) в этом случае удовлетворяется автоматически. Непосредственной подстановкой нетрудно убедиться, что функции (51), (47) и (48), задаваемые решением уравнения (52) и соотношением (54), удовлетворяют уравнению переноса импульса (4), которое можно представить в виде [16]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \tilde{\mathbf{v}}_\perp \cdot \nabla_\perp \right) \mathbf{p}_\perp = -\frac{\nabla_\perp \cdot \tilde{\tilde{\mathbf{P}}}_\perp}{\chi} + e \left(\mathbf{E}^{\text{eff}} + \frac{1}{c} \tilde{\mathbf{v}}_\perp \times \mathbf{B}_0 \right), \quad (55)$$

где

$$\mathbf{E}^{\text{eff}} = -\nabla_\perp (\varphi_0 - \beta\mu A_z)$$

— поперечная компонента напряженности эффективного электрического поля,

$$\tilde{\tilde{\mathbf{P}}}_\perp = \int (\mathbf{p}_\perp - \tilde{\mathbf{p}}_\perp)(\mathbf{v}_\perp - \tilde{\mathbf{v}}_\perp) f^\tau d\mathbf{p}_\perp \quad (56)$$

— тензор напряжений. В рассматриваемом случае $\tilde{\tilde{\mathbf{P}}}_\perp = 0$ (что соответствует предположению (47)). Уравнение переноса энергии является простым следствием уравнения переноса импульса.

3. Уравнение огибающей пучка с учетом рассеяния

Определим теперь вид уравнения огибающей пучка с автомодельным профилем плотности в случае, когда рассеяние частиц пучка на частицах фонового газа оказывает существенное влияние на его поперечную динамику. С этой целью обратимся к уравнению (15). Последнее уравнение с учетом соотношений (26), (29) и (35) принимает вид

$$\frac{d}{dt} \left(\gamma^2 \Re^3 \frac{d^2\Re}{dt^2} + \gamma \frac{d\gamma}{dt} \Re^3 \frac{d\Re}{dt} + \frac{4\Re^2 \gamma \kappa T_B}{m} + \frac{4\Re^2 \gamma e^2 \langle N_\Phi(\mathbf{r}_\perp) \rangle}{m} + \frac{\gamma^2 \Omega_b^2 \Re^4}{4} \right) = \frac{4\gamma \Re^2}{m} S_0. \quad (57)$$

Используя соотношения (32), (25) и перейдя к безразмерным переменным $\xi = R_b/R_{b0}$ и $t' = t/t_0$, где характерный масштаб времени t_0 определяется формулой (42), запишем уравнение (57) в безразмерной форме

$$\frac{d}{dt'} \left(\gamma' \xi^3 \frac{d^2\xi}{dt'^2} + \gamma' \frac{d\gamma'}{dt} \xi^3 \frac{d\xi}{dt'} + \frac{\operatorname{sign}(\kappa)}{2} \left(\frac{|\kappa|\beta}{|\kappa_0|\beta_0} \right) \gamma' \xi^2 + \frac{\delta^2 \gamma' \xi^4}{2} + \frac{\lambda^2 \xi^4}{4} \right) = s\gamma' \xi^2. \quad (58)$$

Безразмерные параметры δ и λ в (58) определяются аналогично (45), а параметр s задается выражением

$$s = \frac{4S_0 t_0^3}{m\gamma_0 \eta_\Phi^2 R_{b0}^2}. \tag{59}$$

Уравнение (58) должно решаться при следующих начальных условиях:

$$\xi|_{t=\tau/t_0} = 1, \quad \left.\frac{d\xi}{dt'}\right|_{t=\tau/t_0} = \frac{t_0 \dot{R}_{b0}}{R_{b0}}, \tag{60}$$

$$\left.\frac{d^2\xi}{dt'^2}\right|_{t=\tau/t_0} = \left[\varepsilon_0^2 + \left(\sigma_\theta + \frac{\lambda}{2}\right)^2\right] - \frac{t_0 \dot{R}_{b0}}{\gamma_0 R_{b0}} \left.\frac{d\gamma}{dt}\right|_{t=\tau}$$

$$- \frac{\mathrm{sign}(\kappa_0)}{2} - \frac{\delta^2}{2} - \frac{\lambda^2}{4}, \tag{61}$$

где параметр ε_0 соответствует начальному эмиттансу пучка. Заметим, что условие (61) может быть получено из уравнения для среднеквадратичного радиуса (19).

Таким образом, в настоящей работе на основе сформулированных нами ранее кинетического уравнения, уравнений переноса и уравнения для среднеквадратичного радиуса получено уравнение огибающей РЭП с произвольным автомодельным радиальным профилем плотности тока, учитывающее эффекты неламинарности и рассеяния пучка в фоновом газе при наличии внешних продольного магнитного поля и фокусирующего радиального электрического поля, создаваемого однородным ионным фоном в режиме ионной фокусировки.

Список литературы

[1] *Рухадзе А.А., Богданкевич Л.С., Росинский С.Е., Рухлин В.Г.* Физика сильноточных релятивистских электронных пучков. М: Атомиздат, 1980. 167 с.
[2] *Диденко А.Н., Григорьев В.П., Усов Ю.П.* Мощные электронные пучки и их применение. М.: Атомиздат, 1977. 277 с.
[3] *Кузелев М.В., Рухадзе А.А.* Электродинамика плотных электронных пучков в плазме. М.: Наука, 1990. 336 с.
[4] *Миллер Р.* Введение в физику сильноточных пучков заряженных частиц. М.: Мир, 1984. 432 с.
[5] *Росинский С.Е., Рухлин В.Г.* // ЖТФ. 1972. Т. 42. Вып. 3. С. 511–521.
[6] *Колесников Е.К., Курышев А.П., Филиппов Б.В.* Физическая механика. Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. Вып. 3. С. 78–93.
[7] *Колесников Е.К., Курышев А.П., Филиппов Б.В.* // Вестн. ЛГУ. Сер. мат., мех., астрон. 1979. № 13. Вып. 3. С. 84–86.
[8] *Kapchinsky I.M., Vladimirsky V.V.* // Proc. In. Conf. on High Energy Accelerators. CERN. Geneva, 1959. P. 274–288.
[9] *Lee E.P., Cooper R.K.* // Part. Accel. 1976. Vol. 7. P. 83–95.
[10] *Lee E.P.* // Phys. Fluids. 1976. Vol. 19. N 1. P. 60–69.
[11] *Киквидзе Р.Р., Минаев И.М., Рухадзе А.А., Шкварунец А.Г.* // Физика плазмы. 1984. Т. 10. С. 976–981.
[12] *Власов М.А., Денисова И.П., Никонов С.В.* // РиЭ. 1984. Т. 29. № 8. С. 1595–1599.
[13] *Наурызбаев А.Е., Сорокин Г.А.* // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 1. С. 131–137.
[14] *Надеждин Е.Р.* // Физика плазмы. 1991. Т. 17. № 3. С. 327–335.
[15] *Колесников Е.К., Мануйлов А.С.* // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 9. С. 103–107.
[16] *Колесников Е.К., Мануйлов А.С.* // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 7. С. 119–125.
[17] *Колесников Е.К.* // Физика плазмы. 2002. Т. 28. № 4. С. 360–367.
[18] *Мануйлов А.С.* // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 4. С. 103–108.
[19] *Колесников Е.К., Мануйлов А.С.* // РиЭ. 1990. Т. 35. № 1. С. 218–220.