

01;03

Нелинейные осцилляции заряженного слоя электропроводной жидкости на поверхности твердого сферического ядра

© В.А. Коромыслов, А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 30 октября 2006 г. В окончательной редакции 18 июля 2007 г.)

В аналитических асимптотических расчетах второго порядка малости по амплитуде начальной деформации исследованы закономерности реализации нелинейных осцилляций слоя жидкости на поверхности тающей заряженной градины. В частности, показано, что влияние характерного линейного размера твердого сферического ядра на амплитуды мод капиллярных осцилляций, возбуждающихся на заряженной поверхности жидкого слоя идеальной несжимаемой идеально проводящей жидкости за счет нелинейного взаимодействия, становится существенным при толщине слоя жидкости, много меньшей радиуса. Выяснилось, что при уменьшении толщины слоя жидкости на поверхности твердого ядра происходит перераспределение энергии между нелинейно возбуждающимися модами со смещением максимума энергии в спектре нелинейно возбуждающихся мод в сторону мод с большими номерами.

PACS: 47.55.dd

Введение

Исследование эволюции поверхности заряженного слоя жидкости на криволинейной подложке представляет значительный интерес в связи с многочисленными техническими и технологическими приложениями. В частности, к ним относится теория грозового электричества, поскольку неустойчивость заряженной жидкой поверхности капель и тающих градин в грозовом облаке, сопровождающаяся эмиссией значительного количества заряженных микрокапелек [1], играет важную роль в процессах микроразделения зарядов и в физическом механизме зарождения разряда линейной молнии [2,3]. Помимо геофизических приложений электростатическая неустойчивость заряженного слоя жидкости на твердой подложке играет существенную роль в физическом механизме функционирования масс-спектров для анализа органических молекул и термически нестабильных сложных химических соединений [4,5], а также при анализе физических особенностей функционирования жидкометаллических источников ионов [6].

Задача об устойчивости заряженного слоя жидкости на поверхности сферического ядра не раз рассматривалась в линейном приближении по величине возмущения поверхности как для идеальной, так и для вязкой жидкости (см., например, [7–9]). Нелинейный анализ периодического капиллярно-гравитационного волнового движения в заряженном слое жидкости на твердой подложке был проведен лишь для плоского случая [10,11]. Задача аналитического расчета нелинейных осцилляций заряженного слоя жидкости на поверхности твердого сферического ядра пока не решалась, хотя имеет очевидные важные академические и технические приложения.

1. Постановка задачи

Пусть на поверхности твердого сферического ядра радиусом R_0 находится смачивающий ее сферически симметричный слой идеальной несжимаемой идеально проводящей жидкости с внешним радиусом R , плотностью ρ и коэффициентом поверхностного натяжения σ . Будем считать, что на свободной поверхности жидкости распределен заряд Q . Примем, что в начальный момент времени $t = 0$ равновесная сферическая форма свободной поверхности слоя жидкости претерпела виртуальную осесимметричную деформацию конечной амплитуды, существенно меньшей радиуса R и меньшей толщины слоя жидкости, пропорциональную одной из мод капиллярных осцилляций системы. Будем исследовать нелинейные осцилляции градины при $t \geq 0$.

Рассмотрение проведем в безразмерных переменных при $R = \sigma = \rho = 1$ в сферической системе координат с началом в центре масс системы. Тогда уравнение границы раздела сред (свободной поверхности жидкости) запишется в виде

$$r = 1 + \xi(\theta, t), \quad |\xi| \ll 1.$$

Течение жидкости будем полагать потенциальным, т. е. примем, что поле скоростей волнового движения в жидком слое полностью определяется функцией потенциала скорости

$$\mathbf{V} \equiv \nabla\psi(\mathbf{r}, t).$$

Математическая формулировка задачи расчета нелинейных осцилляций жидкого слоя на поверхности твердого сферического ядра состоит из уравнений Лапласа для потенциала поля скоростей $\psi(\mathbf{r}, t)$ и электростатического потенциала $\Phi(\mathbf{r}, t)$

$$\Delta\psi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \Delta\Phi(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1)$$

и граничных условий к ним — на свободной поверхности слоя жидкости кинематического

$$r = 1 + \xi : \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \xi}{\partial \theta},$$

динамического

$$-\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{2} (\nabla \psi)^2 + \Delta p + p_E - p_\sigma = 0, \quad (2)$$

$$p_E \equiv (\nabla \Phi)^2 / 8\pi, \quad p_\sigma \equiv \text{div } \mathbf{n},$$

постоянства электрического потенциала поверхности жидкого слоя

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi_S(t),$$

а также граничных условий на бесконечности

$$r \rightarrow \infty : \quad \Phi(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0 \quad (3)$$

и на поверхности твердого сферического ядра

$$r = R_0 : \quad \nabla \psi(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (4)$$

В выписанных соотношениях Δp — перепад постоянных давлений внутри и вне капли в состоянии равновесия, p_E — давление электрического поля собственного заряда на поверхности жидкого слоя градины, p_σ — лапласовское давление, \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к поверхности слоя жидкости, $\Phi_S(t)$ — постоянный вдоль свободной поверхности жидкости электрический потенциал.

Кроме перечисленных выше граничных условий следует учесть также условия неизменности собственного электрического заряда системы

$$-\frac{1}{4\pi} \oint_S (\mathbf{n} \cdot \nabla \Phi) dS = Q, \quad S = \begin{cases} r = 1 + \xi(\theta, t), \\ 0 \leq \theta \leq \pi, \\ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \end{cases} \quad (5)$$

неизменности объема слоя жидкости

$$\int_{V_1} r^2 dr \sin \theta d\theta d\vartheta = \frac{4}{3} \pi (1 - R_0^3),$$

$$V_1 = \begin{cases} R_0 \leq r \leq 1 + \xi(\theta, t), \\ 0 \leq \theta \leq \pi, \\ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \end{cases} \quad (6)$$

неподвижности центра масс градины

$$\frac{\int_{V_1} \mathbf{r} dV_1 + \rho_* \int_{V_2} \mathbf{r} dV_2}{\int_{V_1} dV_1 + \rho_* \int_{V_2} dV_2} = 0, \quad V_2 = \begin{cases} 0 \leq r \leq R_0, \\ 0 \leq \theta \leq \pi, \\ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi. \end{cases} \quad (7)$$

Здесь ρ_* — безразмерная плотность твердого ядра.

Начальные условия к поставленной задаче формулируем в виде задания начальной осесимметричной деформации равновесной сферической формы градины

и равенства нулю начальной скорости движения поверхности

$$t = 0 : \quad \xi(\theta, t) = \xi_0 P_0(\mu) + \xi_1 P_1(\mu) + \varepsilon P_k(\mu),$$

$$(k \geq 2), \quad \mu \equiv \cos \theta, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} = 0. \quad (9)$$

Здесь ε — амплитуда начального возмущения, являющаяся малым параметром задачи; $P_k(\mu)$ — полином Лежандра k -го порядка, ξ_0 и ξ_1 — константы, определяемые условиями (6) и (7) соответственно.

Следует отметить, что условия (6), (7) должны выполняться в любой момент времени, в том числе и в начальный. Несложно показать, что, если в начальный момент времени возбуждена только одна мода, то условия неизменности объема жидкого слоя (6) и неподвижности центра масс системы жидкость–ядро (7) дают следующие значения констант ξ_0 и ξ_1 :

$$\xi_0 = -\varepsilon^2 \frac{1}{2k+1} + O(\varepsilon^3), \quad \xi_1 = 0 + O(\varepsilon^3). \quad (10)$$

2. Метод решения

При решении задачи (1)–(9) в квадратичном по ε приближении будем использовать известный метод многих масштабов [12]. Для этого искомые функции $\xi(\theta, t)$, $\psi(\mathbf{r}, t)$, $\Phi(\mathbf{r}, t)$ представляются в виде асимптотических разложений по степеням малого параметра ε и считаются зависящими не просто от времени t , но от разных его масштабов T_m , определенных как $T_m \equiv \varepsilon^m t$

$$\xi(\theta, t) = \sum_m \varepsilon^m \xi^{(m)}(\theta, T_0, T_1, \dots),$$

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_m \varepsilon^m \psi^{(m)}(r, \theta, T_0, T_1, \dots),$$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \sum_m \varepsilon^m \Phi^{(m)}(r, \theta, T_0, T_1, \dots). \quad (11)$$

Производные по времени будем вычислять, имея в виду полный набор различных его масштабов, по правилу

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + O(\varepsilon^3). \quad (12)$$

Подставив разложения (11), (12) в краевую задачу (1)–(9) и приравняв в каждом из соотношений слагаемые одного порядка малости, несложно получить набор краевых задач для последовательного определения неизвестных функций $\xi^{(m)}$, $\psi^{(m)}$, $\Phi^{(m)}$, где $m = 0, 1, 2, \dots$

3. Отыскание решений различных порядков малости

3а. Нулевой порядок малости

В нулевом порядке малости по ε (при $m = 0$) из задачи (1)–(9) найдем решение, описывающее равновесное состояние системы

$$\begin{aligned} \psi^{(0)}(\theta, T_0, T_1, \dots) &\equiv 0, \quad \xi^{(0)}(\theta, T_0, T_1, \dots) \equiv 0, \\ \Phi_S^{(0)}(T_0, T_1, \dots) &\equiv Q, \quad \Phi^{(0)}(\theta, T_0, T_1, \dots) \equiv \frac{Q}{r}. \end{aligned} \quad (13)$$

3б. Первый порядок малости

При $m \geq 1$ в силу линейности уравнений (1) им должна удовлетворять каждая из функций $\psi^{(m)}$, $\Phi^{(m)}$ в разложениях (11), потому представим последние как решения уравнений (1) в сферической системе координат с учетом условий (3), (4) в виде рядов

$$\begin{aligned} \psi^{(m)}(r, \theta, T_0, T_1, \dots) &= \sum_{n=0}^{\infty} [D_n^{(m)}(T_0, T_1, \dots) r^n + G_n^{(m)}(T_0, T_1, \dots) r^{-n-1}] P_n(\mu), \\ \Phi^{(m)}(r, \theta, T_0, T_1, \dots) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(m)}(T_0, T_1, \dots) r^{-n-1} P_n(\mu). \end{aligned} \quad (14)$$

В виде рядов по полиномам Лежандра будем искать и последовательные поправки $\xi^{(m)}$ к выражению, определяющему форму свободной поверхности жидкости

$$\xi^{(m)}(\theta, T_0, T_1, \dots) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(m)}(T_0, T_1, \dots) P_n(\mu). \quad (15)$$

В первом порядке малости по ε для определения коэффициентов $D_n^{(1)}$, $G_n^{(1)}$, $F_n^{(1)}$, $M_n^{(1)}$ в решениях (14), (15) (при $m = 1$) граничные и начальные условия с учетом (10) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} r = 1 : \quad \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial T_0} &= \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial r}, \\ -\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial T_0} + \frac{1}{4\pi} \frac{d\Phi^{(0)}}{dr} \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} + \xi^{(1)} \frac{d^2 \Phi^{(0)}}{dr^2} \right) &+ (2 + \Delta_\Omega) \xi^{(1)} = 0, \\ \Phi^{(1)} + \frac{d\Phi^{(0)}}{dr} \xi^{(1)} &= \Phi_S^{(1)}, \\ \int_0^\pi \left[\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} + \left(\frac{d^2 \Phi^{(0)}}{dr^2} + 2 \frac{d\Phi^{(0)}}{dr} \right) \xi^{(1)} \right] d\mu &= 0, \\ \int_0^\pi \xi^{(1)} d\mu &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r = R_0 : \quad \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial r} &= 0, \\ t = 0 : \quad \xi^{(1)} &= P_k(\mu), \quad \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial T_0} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь Δ_Ω — угловая часть оператора Лапласа в сферической системе координат.

Подставив разложения (14), (15) при $m = 1$, а также решения нулевого порядка малости (13) в граничные условия (16), можно получить выражения, позволяющие определить неизвестные коэффициенты $G_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots)$, $D_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots)$, $F_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots)$, $M_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots)$:

$$\begin{aligned} M_0^{(1)}(T_0, T_1, \dots) &= 0, \quad M_1^{(1)}(T_0, T_1, \dots) = 0, \\ M_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots) &= A_n(T_1, \dots) \exp(i\omega_n T_0) + \text{к.с.} \quad (n \geq 2), \\ D_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots) &= \frac{1}{n(1 - R_0^{2n+1})} \times \frac{\partial M_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots)}{\partial T_0} \quad (n \geq 2), \\ G_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots) &= \frac{n}{n+1} R_0^{2n+1} D_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots) \\ &= \frac{R_0^{2n+1}}{(n+1)(1 - R_0^{2n+1})} \frac{\partial M_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots)}{\partial T_0} \quad (n \geq 2), \\ F_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots) &= Q M_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots) \quad (n \geq 2), \\ A_n(T_1, \dots) &\equiv a_n(T_1, \dots) \exp[ib_n(T_1, \dots)], \\ \Phi_S^{(1)} = 0, \quad \omega_n^2 &= \chi(n)n(n-1)(n+2-W), \\ W &\equiv \frac{Q^2}{4\pi}, \quad \chi(n) \equiv \frac{(n+1)(1 - R_0^{2n+1})}{n+1 + nR_0^{2n+1}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Аббревиатура „к.с.“ означает сопряженные, комплексно сопряженные к выписанным. Зависимости функций a_n и b_n от времени T_m определяются из решений более высоких порядков малости.

Чтобы завершить рассмотрение задачи в линейном по ε приближении, величины a_n и b_n можно положить не зависящими от времени, т.е. представить в виде

$$a_n(T_1, \dots) \approx a_n^{(0)} + O(T_1), \quad b_n(T_1, \dots) \approx b_n^{(0)} + O(T_1). \quad (18)$$

Несложно показать, что при этом для возмущения поверхности получим оценку

$$\xi(\theta, t) \approx \varepsilon \xi^{(1)}(\theta, t, a_n^{(0)}, b_n^{(0)}) + \varepsilon O(\varepsilon), \quad (19)$$

где $a_n^{(0)}$, $b_n^{(0)}$ — константы, не зависящие от времени. Ошибка в этом разложении окажется порядка первого члена, если $t \approx O(\varepsilon^{-1})$. Для значений $t \geq O(\varepsilon^{-1})$ данное разложение становится непригодным. Таким образом, выражение (19) справедливо на временном интервале $t \leq O(1)$, в этом случае ошибка составляет $\sim \varepsilon^2$. Однако при исследовании тенденций движения поверхности можно использовать (19) и на временных интервалах

$t \leq O(\varepsilon^{-1})$ при условии выполнения требования сравнимости по порядку величины решения первого порядка с величиной начального возмущения. Более детальная информация о пределах применимости выписанного разложения может быть получена при анализе задачи в следующем квадратичном порядке малости по ε .

Подставив разложение (19) с учетом (13), (17), (18) в начальные условия (8), (9) и приравняв друг другу величины одного порядка малости, несложно найти

$$a_n^{(0)} = \delta_{nk}/2, \quad b_0 = 0 \quad (n \geq 2),$$

где δ_{nk} — символ Кронекера.

В итоге функция, описывающая эволюцию формы поверхности капли со временем в линейном по ε приближении, будет иметь вид

$$\xi(\theta, t) = \varepsilon \cos(\omega_k t) P_k(\mu) + O(\varepsilon^2). \quad (20)$$

Согласно этому решению, в первом порядке по амплитуде возмущения ε поверхность капли совершает гармонические колебания в окрестности равновесной сферы, соответствующие k -й (изначально возбужденной) моде.

Для потенциалов полей скоростей и электростатического потенциала в этом приближении получим следующие решения:

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, t) &= -\varepsilon \omega_k \left(\frac{r^k}{k(1-R_0^{2k+1})} + \frac{r^{-k-1}}{(k+1)(1-R_0^{2k+1})} \right) \\ &\times \sin(\omega_k t) P_k(\mu) + O(\varepsilon^2), \\ \Phi(\mathbf{r}, t) &= \frac{Q}{r} + \varepsilon \frac{Q}{r^{k+1}} \cos(\omega_k t) P_k(\mu) + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

3с. Второй порядок малости

Для отыскания поправок второго порядка малости, т.е. функций $G_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots)$, $D_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots)$, $F_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots)$, $M_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots)$, выпишем систему граничных условий (2)–(7), сохранив слагаемые второго порядка малости по ε

$$\begin{aligned} r = 1 : \quad & \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial T_0} + \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial T_1} = \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial r} + \xi^{(1)} \frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial r^2} \\ & - \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \theta} \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \theta}, \\ & - \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial T_0} - \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial T_1} - \xi^{(1)} \frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial r \partial T_0} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial r} \right)^2 \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \theta} \right)^2 \right] + \frac{1}{8\pi} \left[2 \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial r} + \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \right)^2 \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \theta} \right)^2 + 2\xi^{(2)} \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial r^2} + 2\xi^{(1)} \left(\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial r^2} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial r^2} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \right) + (\xi^{(1)})^2 \left(\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \frac{\partial^3 \Phi^{(0)}}{\partial r^3} + \left(\frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial r^2} \right)^2 \right) \right] \\ & + [(2 + \Delta_\Omega)\xi^{(2)} - 2\xi^{(1)}(1 + \Delta_\Omega)\xi^{(1)}] = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi^{(2)} + \xi^{(2)} \frac{d\Phi^{(0)}}{dr} + \xi^{(1)} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} + \frac{1}{2} (\xi^{(1)})^2 \frac{d^2 \Phi^{(0)}}{dr^2} &= \Phi_S^{(2)}, \\ \int_0^\pi \left[\frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial r} + \xi^{(1)} \left(\frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \right) + \xi^{(2)} \left(\frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial r^2} \right. \right. \\ & \left. \left. + 2 \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \right) + (\xi^{(1)})^2 \left(\frac{1}{2} \frac{d^3 \Phi^{(0)}}{dr^3} + 2 \frac{d^2 \Phi^{(0)}}{dr^2} + \frac{d\Phi^{(0)}}{dr} \right) \right. \\ & \left. - \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \theta} \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial r} \right] d\mu = 0, \\ & \int_0^\pi [\xi^{(2)} + (\xi^{(1)})^2] d\mu = 0, \end{aligned}$$

$$r = R_0 : \quad \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial r} = 0,$$

$$t = 0 : \quad \xi_0^{(2)} = -\frac{1}{2k+1}, \quad \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial T_0} + \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial T_1} = 0. \quad (21)$$

Подставив разложения (14), (15) при $m = 2$, а также решения (13) и (17) в систему граничных условий (21), можно получить неоднородные дифференциальные уравнения для нахождения неизвестных коэффициентов $M_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots)$. Условия исключения из решений этих уравнений секулярных членов приводят к соотношениям

$$\frac{\partial a_n}{\partial T_1} = 0, \quad \frac{\partial b_n}{\partial T_1} = 0,$$

т.е. получаем, что a_n и b_n в решениях первого порядка малости (18) не зависят от времени T_1 . Зависимость a_n и b_n от более медленных времен T_2, T_3 и т.д. может быть определена только в следующих порядках приближений. Таким образом, в дальнейшем будем полагать, что амплитуды разложения $M_m^{(1)}$ зависят только от временных масштабов T_0 или $M_m^{(1)}(T_0, T_1, \dots) \approx M_m^{(1)}(T_0) + O(T_2)$.

Общее решение полученных из системы (21) неоднородных дифференциальных уравнений записывается в виде

$$\begin{aligned} M_0^{(2)}(T_0, T_2, \dots) &= - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left\{ A_n(T_2, \dots) \bar{A}_n(T_2, \dots) \right. \\ & \left. + [A_n(T_2, \dots)]^2 \exp(i2\omega_n T_0) + \text{k.c.} \right\}, \\ M_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots) &= \left\{ c_n(T_2, \dots) \exp(id_n(T_1, \dots)) \right. \\ & \left. \times \exp(i\omega_n T_0) + \text{k.c.} \right\} + N_n(T_0, T_2, \dots), \quad (22) \\ N_n(T_0, T_2, \dots) &\equiv \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \lambda_{mln}^{(+)} A_m(T_2, \dots) A_l(T_2, \dots) \right. \\ & \left. + \exp[i(\omega_m + \omega_l)T_0] + \lambda_{mln}^{(-)} A_m(T_2, \dots) \bar{A}_l(T_2, \dots) \right. \\ & \left. \times \exp[i(\omega_m - \omega_l)T_0] + \text{k.c.} \right\}, \end{aligned}$$

$$\lambda_{mln}^{(\pm)} = \frac{\gamma_{mln} \pm \omega_n \omega_l \eta_{mln}}{\omega_n^2 - (\omega_m \pm \omega_l)},$$

$$\gamma_{mln} \equiv K_{mln} \left\{ n\chi_n \left[2n[l(l+1) - 1] + \frac{W}{2} [l(m+1) - m(2m - 2n + 7) + 3] \right] + \omega_m^2 [n\chi_n - v_m] \right\}$$

$$+ \alpha_{mln} \left\{ \frac{\chi_n n W}{2} + \frac{\omega_m^2}{m\chi_m} \right\},$$

$$\eta_{mln} \equiv K_{mln} \left[\frac{n\chi_n}{2} - v_m \right] + \frac{\alpha_{mln}}{m\chi_m} \left[1 + \frac{n\chi_n}{2l\chi_l} \right],$$

$$v_n = \frac{n - 1 + (n + 2)R_0^{2n+1}}{1 - R_0^{2n+1}},$$

$$K_{mln} \equiv [C_{m0l0}^n]^2,$$

$$\alpha_{mln} \equiv -\sqrt{m(m+1)l(l+1)} C_{m0l0}^n C_{m(-1)l1}^n,$$

$$C_{m0l0}^n \equiv$$

$$\begin{cases} 0, & \text{если } m + l + n = 2g + 1, \text{ где } g \text{ — целое число,} \\ \frac{(-1)^{g-n} \sqrt{2n+1} g!}{(g-m)!(g-l)!(g-n)!} \left[\frac{(2g-2m)!(2g-2l)!(2g-2n)!}{(2g+1)!} \right]^{1/2}, & \\ \text{если } m + l + n = 2g \end{cases}$$

$$C_{m(-1)l1}^n \equiv \sqrt{2n+1} n!$$

$$\times \left[\frac{(m+l-n)! m(m+1)}{(n+m-l)!(n-m+l)!(m+l+n+1)! l(l+1)} \right]^{1/2} \\ \times \sum_z \frac{(-1)^{m+1+z} (m+z-1)!(n+l-z+1)!}{z!(m-z+1)!(n-z)!(l-n+z-1)!}.$$

В последней сумме суммирование ведется по всем целым значениям z , для которых выражения под знаком факториала неотрицательны. Горизонтальная черта сверху над A_n в (22) обозначает комплексное сопряжение. Отметим, что C_{m0l0}^n и $C_{m(-1)l0}^n$ (коэффициенты Клебша–Гордана [13]) отличны от нуля при условии, что их нижние индексы удовлетворяют соотношениям

$$|m-l| \leq n \leq (m+l), \quad m+l+n = 2g.$$

Коэффициенты в разложениях (14) для потенциала поля скорости $\psi^{(m)}(\mathbf{r}, t)$ и электростатического потенциала $\Phi^{(m)}(\mathbf{r}, t)$ связаны с решениями (17) и (22) следующими соотношениями

$$D_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots) = \frac{1}{n(1 - R_0^{2n+1})} \\ \times \left\{ \frac{\partial M_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots)}{\partial T_0} - \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{l=2}^{\infty} \left[v_m K_{mln} - \frac{\chi_m}{m} \alpha_{mln} \right] \right. \\ \left. \times \frac{\partial M_n^{(1)}(T_0, T_2, \dots)}{\partial T_0} M_l^{(1)}(T_0, T_2, \dots) \right\},$$

$$G_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots) = \frac{R_0^{2n+1}}{(n+1)(1 - R_0^{2n+1})} \\ \times \left\{ \frac{\partial M_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots)}{\partial T_0} - \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{l=2}^{\infty} \left[v_m K_{mln} - \frac{\chi_m}{m} \alpha_{mln} \right] \right. \\ \left. \times \frac{\partial M_n^{(1)}(T_0, T_2, \dots)}{\partial T_0} M_l^{(1)}(T_0, T_2, \dots) \right\},$$

$$F_0^{(2)}(T_0, T_1, \dots) = 0,$$

$$F_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots) = \frac{Q}{\varepsilon_*} \left\{ M_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots) \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} m K_{mln} M_m^{(1)}(T_0, T_2, \dots) M_l^{(1)}(T_0, T_2, \dots) \right\}.$$

В решении (22) $c_n(T_1, \dots)$ и $d_n(T_1, \dots)$ — неизвестные функции времени, которые не зависят от временного масштаба T_0 . Аналогично тому, как это делалось в расчетах линейного приближения, чтобы завершить рассмотрение задачи в квадратичном приближении, следует неизвестные величины a_n, b_n, c_n, d_n положить независимыми от времени, т.е. равными константам, значения которых определяются начальными условиями (8), (9), поскольку справедливы следующие оценки:

$$a_n \approx a_n^{(0)} + O(T_2), \quad b_n \approx b_n^{(0)} + O(T_2),$$

$$c_n \approx c_n^{(0)} + O(T_1), \quad d_n \approx d_n^{(0)} + O(T_1).$$

В этом случае разложение (15) для функции, описывающей искажение формы поверхности жидкого слоя, принимает вид

$$\xi(\theta, t) \approx \varepsilon \xi^{(1)}(\theta, T_0, a_n^{(0)}, b_n^{(0)}) \\ + \varepsilon^2 \xi^{(2)}(\theta, T_0, a_n^{(0)}, b_n^{(0)}, c_n^{(0)}, d_n^{(0)}) + O(\varepsilon^3 t). \quad (23)$$

Выражение (23) справедливо на временном интервале $t \leq O(1)$ с ошибкой $\sim \varepsilon^3$. На временном интервале $O(1) \leq t \leq O(\varepsilon^{-1})$ величина ошибки сравнима со вторым слагаемым (с поправкой второго порядка малости), и следовательно, в разложении (23) справедливым остается лишь первый член, соответствующий линейному приближению. Таким образом, приближенное линейное решение задачи (20) применимо (равномерно пригодно) на временном интервале $t \leq O(\varepsilon^{-1})$.

Поставим разложение (23) в начальные условия (8), (9) и, приравняв друг другу величины одного порядка малости, с учетом (15) получим соотношения

$$t = 0: \quad M_n^{(1)} = \delta_{nk}, \quad M_n^{(2)} = \frac{\delta_{n0}}{2k+1}, \quad \frac{\partial M_n^{(1)}}{\partial T_0} = 0,$$

$$\frac{\partial M_n^{(2)}}{\partial T_0} + \frac{\partial M_n^{(1)}}{\partial T_1} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

из которых, согласно (17) и (22), определяются неизвестные константы $a_n^{(0)}, b_n^{(0)}, c_n^{(0)}, d_n^{(0)}$,

$$a_n^{(0)} = \frac{1}{2}\delta_{nk}, \quad b_n^{(0)} = 0, \quad c_n^{(0)} = -\frac{1 - \delta_{n0}}{2}N(t=0), \quad d_n^{(0)} = 0.$$

В итоге соотношения (17) и (22) для $M_n^{(m)}(t)$ примут окончательный вид

$$M_n^{(1)}(t) = \delta_{nk} \cos(\omega_n t),$$

$$M_0^{(2)}(t) = \frac{1}{2(2k+1)}[1 + \cos(\omega_k t)],$$

$$M_1^{(2)}(t) = 0, \quad M_n^{(2)}(t) = -N_n(0) \cos(\omega_n t) + N_n(t) \quad (n \geq 2),$$

$$N_n(t) = \frac{1}{2}(\lambda_{kkn}^{(-)} + \lambda_{kkn}^{(+)} \cos(2\omega_k t)). \quad (24)$$

Несложно заметить, что коэффициенты $M_n^{(2)}(t)$ пропорциональны величинам $\lambda_{kkn}^{(+)}$, которые, в свою очередь, пропорциональны коэффициентам Клебша–Гордана C_{m0j0}^{n0} и $C_{m(-1)j0}^{n0}$ и, следовательно, отличны от нуля только для $n = 2j$, где $(j = 0, \dots, k)$. Подставив (15), (24) в (23), получим, что изменение во времени формы свободной поверхности жидкого слоя на поверхности твердого ядра с точностью до слагаемых второго порядка малости будет описываться функцией

$$\begin{aligned} \xi(\theta, t) \approx & \varepsilon \cos(\omega_k t) P_k(\mu) - \varepsilon^2 \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2k+1} [1 + \cos(2\omega_k t)] \right. \\ & + \sum_{j=1}^k [(\lambda_{kk(2j)}^{(-)} + \lambda_{kk(2j)}^{(+)} \cos(\omega_{2j} t) \\ & \left. - (\lambda_{kk(2j)}^{(-)} + \lambda_{kk(2j)}^{(+)} \cos(\omega_{2j} t))] P_{2j}(\mu) \right\} + O(\varepsilon^3 t). \quad (25) \end{aligned}$$

Из (25) видно, что в ситуации, когда начальная деформация определена k -й (четной либо нечетной) модой капиллярных осцилляций системы, во втором порядке малости за счет нелинейного взаимодействия возбуждаются только четные моды с номерами, лежащими в диапазоне $[0; 2k]$.

4. Анализ результатов расчетов

На рис. 1 приведены рассчитанные по (25) при $W = 1$ зависимости безразмерных амплитуд мод $M_n^{(2)}(T_0)$, возбуждающихся за счет нелинейного взаимодействия во втором порядке малости, при начальной деформации, определяющейся десятой модой ($k = 10$).

Из рис. 1 видно, что при увеличении радиуса ядра (при уменьшении толщины слоя жидкости) частоты мод, возбуждающихся за счет нелинейного взаимодействия, уменьшаются, а заметнее всего этот эффект проявляется для низких мод (см., например, рис. 1, *a*). Кроме того, при этом уменьшаются амплитуды мод с номерами, лежащими в левой части диапазона $0 \leq n \leq 2k$ мод,

возбуждающихся за счет нелинейного взаимодействия при начальном виртуальном возбуждении k -й моды (см. рис. 1, *a-c*). Исключение составляет нулевая мода, амплитуда которой полностью определяется амплитудой моды, задающей начальную деформацию (см. первое слагаемое в фигурных скобках в (25)). Амплитуды мод с номерами из правой части диапазона мод $0 \leq n \leq 2k$, наоборот, с уменьшением толщины слоя жидкости увеличиваются (см. рис. 1, *d, e*). Причем, для мод с малыми номерами зависимость величин амплитуд от размера твердого ядра начинает проявляться при толщине слоя жидкости $h \leq 0.5R$, а для мод с большими номерами — при $h \leq 0.2R$. Обнаруженный эффект можно объяснить преимущественной перекачкой энергии от изначально возбужденной моды к наиболее высоким модам, возбуждающимся во втором порядке малости в тонком слое жидкости (отметим, что хотя обсуждаемый эффект проиллюстрирован на рис. 1 только для ситуации, когда начальная деформация определяется десятой модой, расчеты, проведенные для других видов начальной деформации жидкого слоя, приводят к такому же результату).

Отсутствие гладкости линий, определяющих ход зависимостей отдельных мод $M_n^{(2)}(T_0)$ в течение периода (см., например, рис. 1, *a, b*), обусловлено вторым слагаемым в квадратных скобках под знаком суммы в (25) и характеризует вклад нелинейного взаимодействия с соседними модами.

Рассчитанный по (25) временной ход коэффициента при шестнадцатой моде указывает на резонансный характер зависимости $M_{16}^{(2)}(T_0)$. На рис. 2, *a-c* для различных значений толщины слоя жидкости приведен вид зависимости от времени коэффициентов $M_{16}^{(2)}(T_0)$, которые действительно изменяются резонансным образом. Анализ показывает, что в обсуждаемой ситуации реализуется внутреннее нелинейное резонансное взаимодействие десятой и шестнадцатой мод, поскольку при $W = 0$ и $R_0 = 0$ выполняется условие вырожденного резонансного взаимодействия мод осцилляций $4\omega_{10}^2 = \omega_{16}^2$ [14,15]. Согласно [16,17], резонансное взаимодействие малочувствительно к величине параметра расстройки (естественно до тех пор, пока вызванное наличием расстройки изменение частоты остается много меньше самой частоты). К расстройке по отношению к точным значениям частот осцилляций десятой и шестнадцатой мод, соответствующих положению резонанса, в обсуждаемой ситуации приводит наличие твердого ядра $R_0 \neq 0$ и собственного заряда $Q \neq 0$, приводящее к снижению частот осцилляций. И в самом деле, из рис. 2, *a-c* видно, что характерное время и глубина резонансного взаимодействия уменьшаются с уменьшением толщины слоя жидкости. Такой же эффект, а именно уменьшение характерного времени и глубины резонансного взаимодействия, имеет место и при увеличении заряда системы. Отметим, что при $R_0 = 0$ и $W = 0.01$, т. е. когда система находится весьма близко к положению точного

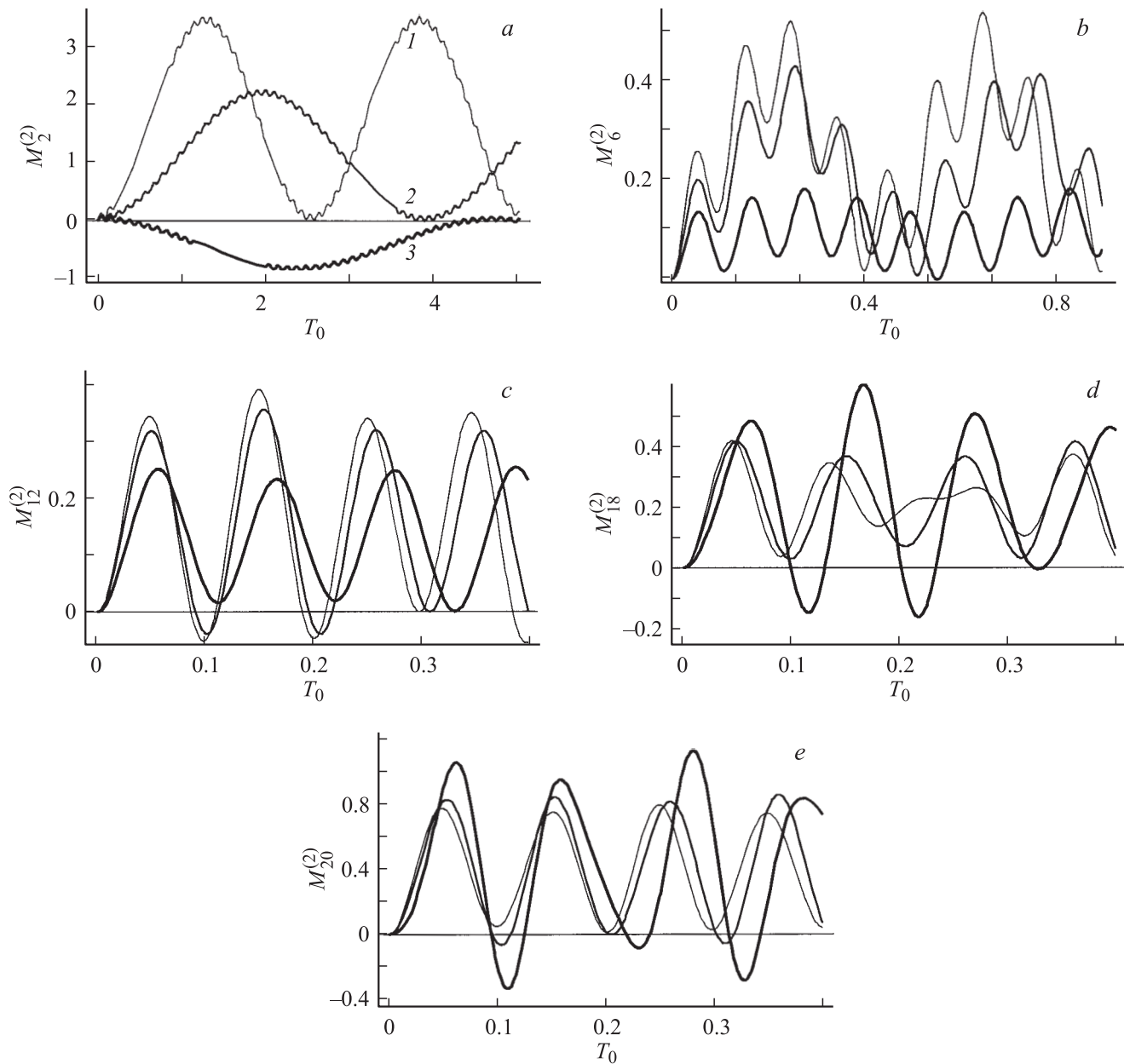


Рис. 1. Зависимости безразмерных амплитудных коэффициентов $M_n^{(2)}(T_0)$ от безразмерного времени, когда начальная деформация определяется десятой модой ($k = 10$), рассчитанные при $W = 1$ и различных значениях безразмерного радиуса ядра R_0 : 1 — $R_0 = 0$; 2 — 0.85; 3 — 0.9; а — $n = 2$; б — 6; в — 12; д — 18; е — 20.

резонанса, характерное время резонансного взаимодействия увеличивается по сравнению с данными рис. 2, а, полученного при $R_0 = 0$ и $W = 1$, на два порядка. Появление твердого ядра увеличивает расстройку частот от положения точного резонанса, и характерное время резонансного взаимодействия еще более снижается, а его глубина уменьшается.

Обнаруженный факт, что в тонких слоях жидкости энергия, распределенная между нелинейно-возбужденными модами осцилляций, концентрируется за счет нелинейного взаимодействия в модах с большими номерами, приводят к увеличению амплитуд этих мод,

имеет важные приложения в теории грозowego электричества. Согласно [3,18], наиболее вероятным спусковым механизмом, приводящим к разряду молнии, является коронный разряд в окрестности заряженной обводненной градины или заряженной крупной капли, падающей во внутриоблачном электрическом поле. Расчеты, выполненные в [19,20], показали, что учет нелинейности осцилляций капель в грозowych облаках позволяет предсказать появление у вершин нелинейно-осциллирующих капель напряженностей электрического поля, достаточных для зажигания коронного разряда. Причем этот эффект имеет место как для капель с

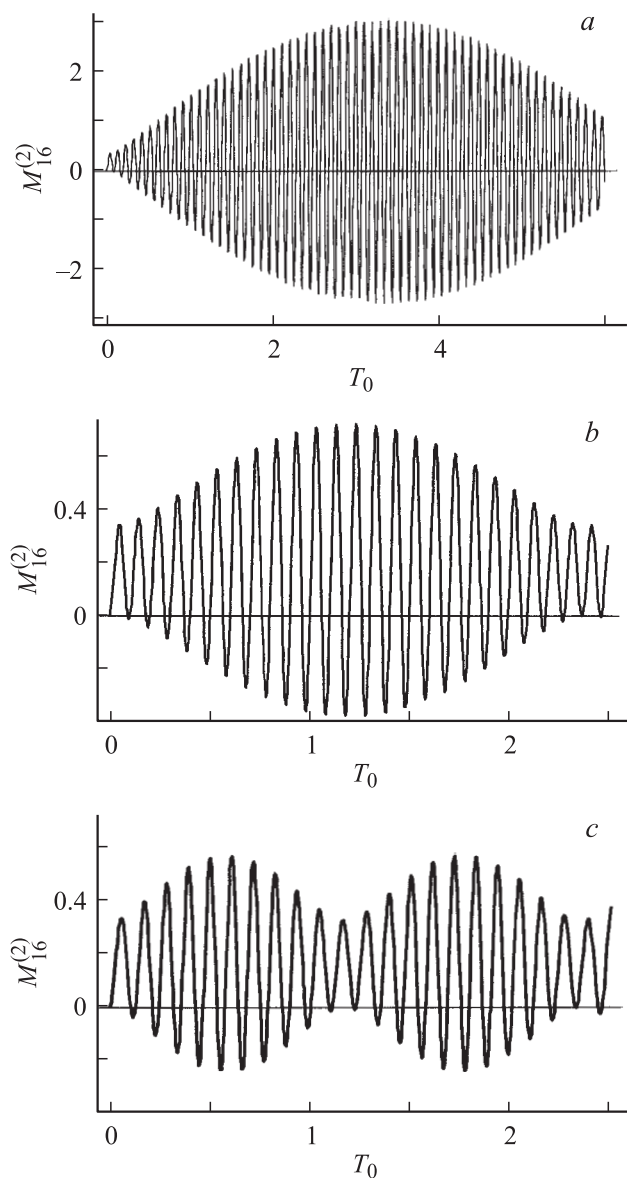


Рис. 2. Временные зависимости безразмерных амплитудных коэффициентов $M_{16}^{(2)}(T_0)$ шестнадцатой моды ($k = 16$), взаимодействующей в вырожденном нелинейном резонансе с десятой модой ($k = 10$), когда начальная деформация определяется десятой модой, рассчитанные при $W = 1$ и различных значениях безразмерного радиуса ядра R_0 : $a — R_0 = 0$; $b — 0.85$; $c — 0.9$.

собственными электрическими зарядами, реально регистрируемыми внутри грозовых облаков [19], так и для незаряженных капель, нелинейно осциллирующих в фиксируемых внутриоблачных электрических полях [20]. Результаты настоящего анализа показывают, что на поверхности тонкого заряженного слоя воды обводненных градин возможно появление сложного волнового мелкомасштабного рельефа, величина напряженности электрического поля гребней которого, будет превышать напряженность, критическую для зажигания коронного разряда в окрестности градины.

Значение номера моды, определяющей начальную деформацию $k = 10$, основано на том, что размеры градин в грозовом облаке, как правило, измеряются сотнями микрон. При падении сквозь облако капля такая градина сталкивается с каплями с характерными размерами, не превышающими десятков микрон. В этой связи порядок номеров мод осцилляций, возбуждаемых в жидком слое, будет определяться именно цифрой 10.

Значение $W = 1$, принятое при иллюстративных расчетах, основано на оценке этого параметра по реально измеряемым метеорологами зарядам на крупных каплях и градинах.

5. Заключение

В проведенном исследовании нелинейных осцилляций заряженного слоя электропроводной жидкости на поверхности тающей градины выяснилось, что с уменьшением толщины слоя жидкости максимум энергии в спектре мод осцилляций, возбуждающихся за счет нелинейного взаимодействия, смещается в сторону высоких мод. В условиях грозового облака преимущественный рост амплитуд высоких мод осцилляций заряженного слоя жидкости на поверхности градины приведет к снижению критической величины собственного заряда градины, необходимого для зажигания в ее окрестности коронного разряда.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 06-01-00066-а.

Список литературы

- [1] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
- [2] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 5. С. 6–14.
- [3] Дячук В.А., Мучник В.А. // ДАН СССР. 1979. Т. 248. № 1. С. 60–63.
- [4] Золотой Н.Б., Карпов Г.В., Скурат В.Е. // ЖТФ. 1988. Т. 58. Вып. 2. С. 315–323.
- [5] Ширяева С.О., Григорьев А.И. // ЖТФ. 1993. Т. 63. Вып. 8. С. 162–170.
- [6] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1992. Т. 62. Вып. 12. С. 9–20.
- [7] Лазарянц А.Э., Григорьев А.И. // ЖТФ. 1990. Т. 60. Вып. 6. С. 29–36.
- [8] Grigor'ev A.I., Munichev M.I., Shiryayeva S.O. // J. Coll. Int. Sci. 1994. N 166. P. 267–274.
- [9] Григорьев А.И., Корамыслов В.А., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1997. Т. 67. Вып. 9. С. 8–13.
- [10] Климов А.В., Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 10. С. 9–17.
- [11] Курочкина С.А., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 11. С. 44–51.
- [12] Найфе А. Методы возмущений. М.: Мир, 1983. 455 с.
- [13] Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. 439 с.

- [14] *Tsamopoulos J.A., Brown R.A.* // J. Fluid Mech. 1983. Vol. 127. P. 519–537.
- [15] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Жаров А.Н.* Нелинейные осцилляции заряженной капли. Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 2006. 278 с.
- [16] *Рыбакова М.В., Ширяева С.О., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 1. С. 42–31.
- [17] *Ширяева С.О.* // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. Вып. 17. С. 28–35.
- [18] *Grigor'ev A.I., Shiryayeva S.O.* // Physica Scripta. 1996. Vol. 54. P. 660–666.
- [19] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Волкова М.В.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 11. С. 31–36.
- [20] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Волкова М.В.* // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 7. С. 40–46.