

01;03

К проблеме спонтанного распада нецилиндрической струи, выбрасываемой неустойчивой по отношению к поверхностному заряду поверхностью жидкости

© А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 11 апреля 2007 г.)

Для заряженной струи вязкой несжимаемой электропроводной жидкости, свободная поверхность которой отличается от цилиндрической, выведено дисперсионное уравнение для волн на поверхности струи с произвольным азимутальным числом. Показано, что в зависимости от знака локальной деформации по отношению к цилиндрической струе (степень локальности определяется длиной волны), азимутального числа и локального значения электрического заряда, приходящегося на единицу длины струи, влияние деформации на величину инкремента и волновое число наиболее неустойчивой моды может быть различным. Указанное обстоятельство должно учитываться при теоретическом осмыслении классификации наблюдаемых режимов спонтанного электродиспергирования жидкостей.

PACS: 61.20. Gy, 47.10.A-

Введение

Явлению неустойчивости заряженной поверхности жидкости и электродиспергированию при эмиссии поверхностью жидкости на нелинейной стадии реализации неустойчивости заряженных струек, распадающихся на отдельные капли, посвящено большое количество публикаций в связи с многочисленными академическими, техническими и технологическими приложениями (см., например, обзоры [1–7], в которых проанализировано состояние исследований в различных сферах использования обсуждаемого феномена).

Несмотря на обилие теоретических и экспериментальных работ по изучению неустойчивости движущейся струи жидкости и дробления ее на отдельные капли, многое в физике происходящих процессов остается до сих пор непонятным и по-прежнему привлекает внимание исследователей. Сказанное, в частности, относится к спонтанному дроблению струй, реализующемуся при неконтролируемых начальных и граничных условиях. Такой распад связан с одновременным возбуждением различных неосесимметричных мод осцилляций при эмиссии струй неустойчивой поверхностью жидкости (неустойчивость вызывается отрицательным давлением электрического поля у свободной поверхности жидкости). Именно такой способ диспергирования жидкости реализуется в подавляющем большинстве практических приложений феномена [1–7]. Спонтанный распад заряженных струй отличается от так называемого вынужденного капиллярного распада цилиндрических струй. При вынужденном распаде жидкость продавливается сквозь цилиндрические капилляры давлением, периодически изменяющимся на частоте наиболее неустойчивой моды. Зарядка отрывающихся капель осуществляется индукци-

онным способом. Этот вид распада струй достаточно подробно исследован экспериментально и теоретически [8–12]. Феномен спонтанного распада на капли заряженных струй, выбрасываемых с вершин заряженных капель, свободно падающих в гроздовых облаках [13], и менисков жидкости на торцах капилляров [14–17] при реализации их неустойчивости по отношению к поверхностному заряду, давно известен. В последние годы количество экспериментальных исследований, посвященных спонтанному распаду струй, нарастает лавинообразно в связи многообразием приложений и различием физико-химических характеристик жидкостей, потребность в электродиспергировании которых возникает. Количество экспериментально наблюдаемых режимов спонтанного электродиспергирования жидкости весьма велико [17–20]. Теоретическое осмысление этого факта пока не выходит за рамки простой классификации [18–21].

Многообразие наблюдаемых режимов, очевидно, связано, во-первых, с разнообразием начальных и граничных условий, реализующихся при спонтанном выбрасывании и спонтанном дроблении заряженных струй, во-вторых, с возможностью одновременного возбуждения различных комбинаций осесимметричных и неосесимметричных мод осцилляций струй и, наконец, с широким разбросом физико-химических характеристик диспергируемых жидкостей [22–24]. Еще одним фактором, который способствует умножению реализующихся режимов электродиспергирования жидкости, является отличие формы струй, выбрасываемых неустойчивой поверхностью жидкости, от цилиндрической [5,25,26]. Радиус такой струи изменяется примерно обратно пропорционально корню четвертой степени из расстояния от места ее зарождения (аналогичная ситуация имеет

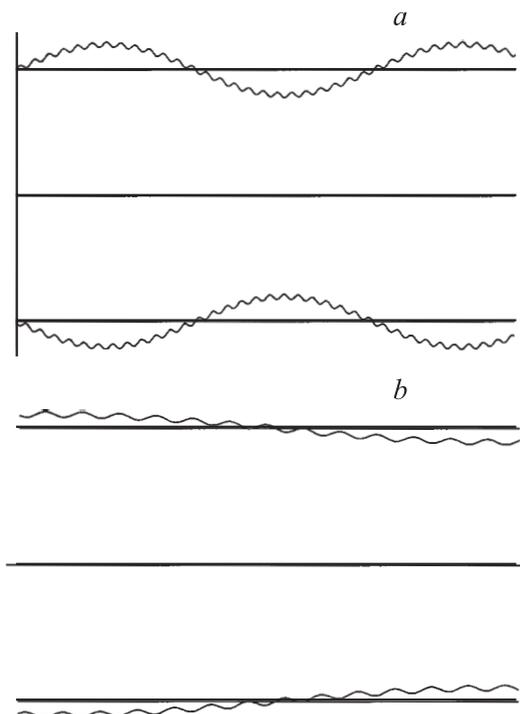


Рис. 1. *a* — схематическое изображение деформированной струи, *b* — схематическое изображение участка струи между максимумом и минимумом синусоидальной деформации с большой длиной волны, которым моделируется участок реальной струи с радиусом, уменьшающимся по мере удаления от места зарождения струи.

место для радиуса воды, вытекающей из водопроводного крана). Влияние отличия формы спонтанно распадающихся струй от цилиндрической на закономерности реализации ее неустойчивости и последующего электростатического распада в теоретическом отношении до сих пор никем не исследовано. Для сходной ситуации электростатического распада сильно заряженных капель, деформированных во внешних силовых полях, подобные исследования проводились неоднократно [27–29]. Настоящее рассмотрение посвящено устранению имеющегося пробела в отношении струй. Особенности задачи исследования устойчивости заряженной струи с формой, отличной от цилиндрической, сводятся к двум главным факторам: поверхностная плотность заряда на такой струе уже не будет однородной, а влияние вязкости жидкости на устойчивость по отношению к дроблению на капли будет различным на участках с различающимися поперечными размерами.

Отыскать дисперсионное уравнение для реальной струи с примерно гиперболической образующей [25] пока не представляется возможным ввиду трудностей с физической постановкой задачи. В настоящей работе будет использовано модельное построение на основе синусоидальной деформации цилиндрической формы струи, позволяющей на отдельном участке между максимумом и минимумом синусоиды проанализировать роль

влияния деформации на устойчивость волн с волновыми числами, много большими волнового числа модельной синусоидальной деформации (рис. 1).

Постановка задачи

Рассмотрим бесконечную цилиндрическую струю радиуса R вязкой несжимаемой жидкости с массовой плотностью ρ , кинематической вязкостью ν и коэффициентом поверхностного натяжения σ , движущуюся вдоль оси симметрии с постоянной скоростью U_0 . Струя поддерживается при постоянном электрическом потенциале Φ_* относительно коаксиального со струей цилиндрического противоэлектрода (например, как это реализовано в [30]). Радиус противоэлектрода R_* будем считать весьма большим $(R/R_*) \ll 1$, чтобы противоэлектрод можно было считать удаленным на бесконечность в физическом понимании бесконечности. Будем считать, что жидкость является идеально проводящей и электрический заряд однородно распределен по цилиндрической в отсутствие возмущений поверхности струи с постоянной поверхностной плотностью заряда χ_0 (линейная плотность заряда, т. е. заряд, приходящийся на единицу длины струи, $2\pi R\chi_0$).

Примем, что в начальный момент времени цилиндрическая поверхность струи претерпевает виртуальное осесимметричное возмущение вида

$$a \sin(k_* z),$$

где $(a/R) \ll 1$, а длина волны

$$\lambda_* \equiv (2\pi/k_*) \gg \sqrt{\sigma/\rho g} \gg R.$$

В последнем условии g — ускорение поля силы тяжести, а $\sqrt{\sigma/\rho g}$ определяет капиллярную постоянную жидкости. Отметим сразу, что в проводимом рассмотрении влияние поля силы тяжести на устойчивость струи учитываться не будет, а g введено лишь для определения характерного масштаба, на котором становится существенным влияние сил поверхностного натяжения [31]. Будем искать спектр капиллярных колебаний поверхности такой струи и критические условия реализации ее неустойчивости, соответствующей переходу всей системы в состояние с наименьшей потенциальной энергией (в смысле разбиения струи на отдельные капли).

Поскольку мы имеем дело с бесконечной струей, то для упрощения задачи перейдем в инерциальную систему координат, движущуюся вместе со струей с такой же скоростью U_0 . Очевидно, что в такой системе отсчета поле скоростей течения жидкости в струе $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ полностью определяется капиллярными волнами, бегущими по ее поверхности. Отметим, что на свободной поверхности жидкости всегда существует капиллярное волновое движение весьма малой амплитуды $\sim \sqrt{kT/\sigma}$, где k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура, порождаемое уже тепловым движением

молекул жидкости. Для большинства реальных жидкостей, включая жидкие металлы, амплитуда таких волн теплового происхождения $\sqrt{\kappa T/\sigma}$ не превышает десятой доли нанометра.

Все рассмотрение проведем в цилиндрической системе координат r, φ, z , орт \mathbf{n}_z которой направлен вдоль оси симметрии невозмущенной струи. Уравнение поверхности струи, возмущенной капиллярным волновым движением, запишется в виде

$$r(\varphi, z, t) = R + a \sin(k_* z) + \xi(\varphi, z, t) \\ \equiv r(z) + \xi(\varphi, z, t), \quad |\xi| \ll a \ll R, \quad (1)$$

где $\xi(\varphi, z, t)$ — возмущение поверхности струи, вызванное капиллярным волновым движением на ее поверхности, с амплитудой $\sim \sqrt{\kappa T/\sigma}$.

Математическая формулировка обсуждаемой задачи состоит из уравнений гидродинамики вязкой жидкости и электростатики (в предположении, что скорость движения поверхности жидкости много меньше релятивистской):

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{U}, \quad \operatorname{div} \mathbf{U} = 0, \quad \Delta \Phi = 0,$$

$$r = r(\varphi, z, t): \quad \Phi \equiv \Phi_*, \quad (dF/dt) = 0,$$

$$F(r, \varphi, z, t) \equiv r - r(\varphi, z, t) = 0,$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \mathbf{n}(\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla) \mathbf{U} = 0,$$

$$-P + 2\nu \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{U} + P_\sigma - P_E = 0,$$

$$z \rightarrow \infty: \quad |\nabla \Phi| \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0: \quad |\mathbf{U}| < \infty,$$

где $\boldsymbol{\tau}$ и \mathbf{n} — орты касательной и нормали к поверхности струи (1); $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$, $P(\mathbf{r}, t)$ и $\Phi(\mathbf{r}, t)$ — поля скоростей, давления в жидкости и электростатического потенциала в окружающей среде; P_σ и P_E — давления сил поверхностного натяжения и электрического поля на свободную поверхность струи.

Для упрощения записи математической формулировки задачи и последующих вычислений перейдем к безразмерным переменным, в которых $R = \rho = \sigma = 1$, оставив за всеми переменными прежние обозначения. Нижеследующий анализ проведем в рамках метода возмущений путем разложения сформулированной задачи по малым параметрам a и $|\xi|$.

В безразмерных переменных поле скоростей $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ будет величиной того же порядка малости, что и амплитуды воли. Поле давлений в жидкости $P(\mathbf{r}, t)$ и поле электростатического потенциала в окружающей среде $\Phi(\mathbf{r}, t)$ будут иметь и компоненты нулевого порядка малости:

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{U}^{(1)}(\mathbf{r}, t) + O(|\xi|^2),$$

$$P(\mathbf{r}, t) = P^{(0)}(\mathbf{r}) + P^{(1)}(\mathbf{r}, t) + O(|\xi|^2),$$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi^{(0)}(\mathbf{r}) + \Phi^{(1)}(\mathbf{r}, t) + O(|\xi|^2).$$

Верхний индекс, стоящий в скобках, указывает на порядок малости.

В нулевом порядке приближений получим тривиальный результат: неподвижную цилиндрическую струю, распределение электростатического потенциала в окрестности однородно-поверхностно-заряженного цилиндра бесконечной длины

$$\Phi^{(0)} = -4\pi\chi_0 \ln r$$

и выражения для уравновешивающих друг друга на свободной поверхности струи: давления сил поверхностного натяжения $P_\sigma^{(0)} = 1$ и давления электрического поля $P_E^{(0)} = 2\pi\chi_0^2$.

Линеаризация задачи

Перепишем математическую формулировку задачи в линейном по a и $|\xi|$ приближении, сохранив слагаемые, пропорциональные a , $|\xi|$ и $a|\xi|$, т. е. в линейном приближении по каждому из малых параметров a и $|\xi|$, как это делалось в [32] при исследовании осцилляций и устойчивости сфероидальной капли в сферической системе координат. Подчеркнем, что малые параметры a и $|\xi|$ являются независимыми, причем $a \gg |\xi|$. В этой связи, казалось бы, что, сохранив слагаемые $\sim a|\xi|$, необходимо также сохранять слагаемые $\sim a^2, a^3, \dots, a^m$, где номер m определится условием

$$(a^m/|\xi|) \sim 1.$$

Такой вывод, конечно, справедлив, но, как будет видно ниже, вклад в искомое дисперсионное уравнение внесут лишь слагаемые, пропорциональные $|\xi|$, а слагаемые, не содержащие ξ , исчезнут при учете кинематического граничного условия, при взятии частной производной по времени. В этой связи сохранение в нижеследующих расчетах слагаемых $\sim a^2, a^3, \dots, a^m$ приведет лишь к необоснованному увеличению громоздкости математической записи проводимого анализа.

Линеаризация уравнений для отыскания неизвестных полей $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$, $P^{(1)}(\mathbf{r}, t)$ и $\Phi^{(1)}(\mathbf{r}, t)$ сводится к отбрасыванию конвективного слагаемого в уравнении Навье—Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\nabla P^{(1)} + \nu : \Delta \mathbf{U}, \quad \operatorname{div} \mathbf{U} = 0, \quad \Delta \Phi^{(1)} = 0. \quad (2)$$

При линеаризации гидродинамических граничных условий на свободной поверхности жидкости учтем, что для отыскания решения задачи в линейном приближении по $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$, $P^{(1)}(\mathbf{r}, t)$ и $\xi(\varphi, z, t)$ обсуждаемые условия должны быть взяты на невозмущенной волновым движением теплового происхождения поверхности струи, т. е. при $r = r(z)$, так как сами гидродинамические граничные условия после исключения компонент капиллярного и электростатического давлений нулевого порядка малости представляют собой линейные комбинации величин не ниже первого порядка малости по $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$, $P^{(1)}(\mathbf{r}, t)$ и $\xi(\varphi, z, t)$.

Перепишем гидродинамические граничные условия на свободной поверхности струи в терминах проекций вектора поля скоростей $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ на орты цилиндрической системы координат U_r, U_φ, U_z . Для этого выпишем аналитические выражения для орта нормали \mathbf{n} и двух взаимно перпендикулярных ортов касательных $\boldsymbol{\tau}_1$ и $\boldsymbol{\tau}_2$ к поверхности

$$F(z) \equiv r - 1 - a \sin(k_* z)$$

через орты цилиндрической системы координат $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$ в линейном по амплитуде виртуальной синусоидальной деформации $a \sin(k_* z)$ приближении

$$\mathbf{n} = (\nabla F(z) / |\nabla F(z)|) \approx \mathbf{e}_r - ak_* \cos(k_* z) \mathbf{e}_z,$$

$$\boldsymbol{\tau}_1 \equiv -\mathbf{n} \times \mathbf{e}_z \approx \mathbf{e}_\varphi, \quad \boldsymbol{\tau}_2 \equiv \mathbf{n} \times \mathbf{e}_\varphi \approx \mathbf{e}_z + ak_* \cos(k_* z) \mathbf{e}_r.$$

Кинематическое граничное условие можно переписать через проекции U_r, U_z следующим образом:

$$(dF(\varphi, z, t)/dt) \equiv -(\partial \xi / \partial t) + \mathbf{U} \cdot \nabla [r - R - a \sin(k_* z) - \xi(\varphi, z, t)] = -(\partial \xi / \partial t) + U_r - ak_* \cos(k_* z) U_z = 0.$$

Динамическое граничное условие для касательных компонент тензора напряжений распадается на два:

1) в качестве орта касательной выбран орт $\boldsymbol{\tau}_1 \approx -\mathbf{e}_\varphi$:

$$\frac{\partial U_\varphi}{\partial r} - \frac{U_\varphi}{r} + \frac{\partial U_r}{r \partial \varphi} - ak_* \cos(k_* z) \left(\frac{\partial U_\varphi}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{r \partial \varphi} \right) = 0,$$

2) в качестве касательной выбран орт $\boldsymbol{\tau}_2 \approx \mathbf{e}_z + ak_* \cos(k_* z) \mathbf{e}_r$:

$$\frac{\partial U_z}{\partial r} + \frac{\partial U_r}{\partial z} + 2ak_* \cos(k_* z) \left(\frac{\partial U_r}{\partial r} - \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) = 0.$$

Динамическое граничное условие для нормальной компоненты тензора напряжений примет вид

$$-P^{(1)} + 2\nu \left[\frac{\partial U_r}{\partial r} - ak_* \cos(k_* z) \left(\frac{\partial U_z}{\partial r} + \frac{\partial U_r}{\partial z} \right) \right] + p_\sigma(\xi) - p_E(\xi) = 0,$$

где $p_\sigma(\xi)$ и $p_E(\xi)$ — линейные по $|\xi|$ компоненты давления сил поверхностного натяжения и электрического поля.

Граничное условие для электростатического потенциала примет вид

$$r = r(z) : \quad \Phi^{(1)} = -\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial z} \xi.$$

Напомним, что выписанные гидродинамические граничные условия отнесены к поверхности $r = r(z)$, а поскольку решение задачи предполагается проводить в цилиндрической системе координат, то перепишем их, отнеся к исходной невозмущенной цилиндрической

поверхности струи $r = 1$, проведя разложение границы вида

$$G(\mathbf{r})|_{r=1+a \sin(k_* z)} \approx G(\mathbf{r})|_{r=1} + [(a \sin(k_* z) \mathbf{e}_r) \nabla G(\mathbf{r})]_{r=1} \approx \left[G(\mathbf{r}) + a \sin(k_* z) \frac{\partial}{\partial r} G(\mathbf{r}) \right]_{r=1}.$$

В итоге получим систему гидродинамических граничных условий в виде

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} \Big|_{r=r(z)} = U_r - ak_* \cos(k_* z) U_z + a \sin(k_* z) \frac{\partial U_r}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad (3)$$

$$\left[\frac{\partial U_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial U_r}{r \partial \varphi} - \frac{U_\varphi}{r} - ak_* \cos(k_* z) \left(\frac{\partial U_\varphi}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{r \partial \varphi} \right) + a \sin(k_* z) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial U_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial U_r}{r \partial \varphi} - \frac{U_\varphi}{r} \right) \right]_{r=1} = 0, \quad (4)$$

$$\left[\frac{\partial U_z}{\partial r} + \frac{\partial U_r}{\partial z} + 2ak_* \cos(k_* z) \left(\frac{\partial U_r}{\partial r} - \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) + a \sin(k_* z) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial U_z}{\partial r} + \frac{\partial U_r}{\partial z} \right) \right]_{r=1} = 0, \quad (5)$$

$$2\nu \left[\frac{\partial U_r}{\partial r} - ak_* \cos(k_* z) \left(\frac{\partial U_z}{\partial r} + \frac{\partial U_r}{\partial z} \right) + a \sin(k_* z) \frac{\partial^2 U_r}{\partial r^2} \right]_{r=1} + [p_\sigma(\xi) - p_E(\xi) - P^{(1)}]_{r=r(z)} = 0. \quad (6)$$

Скаляризация задачи

Дальнейшее решение сформулированной задачи проведем методом операторной скаляризации [33].

Известно, что произвольное векторное поле $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ может быть разложено на сумму трех ортогональных векторных полей. Это, в частности, можно сделать при помощи векторных дифференциальных операторов $\hat{\mathbf{N}}_j$:

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = \sum_{j=1}^3 \hat{\mathbf{N}}_j \psi_j(\mathbf{r}, t), \quad (7)$$

где $\psi_j(\mathbf{r}, t)$ — скалярные функции, а операторы $\hat{\mathbf{N}}_j$ при $j = 1, 2, 3$ в цилиндрической системе координат удобно выбрать в виде

$$\hat{\mathbf{N}}_1 \equiv \nabla, \quad \hat{\mathbf{N}}_2 \equiv \nabla \times \mathbf{e}_z, \quad \hat{\mathbf{N}}_3 \equiv \nabla \times (\nabla \times \mathbf{e}_z). \quad (8)$$

В цилиндрической системе координат векторные поля $\hat{\mathbf{N}}_j \psi_j(\mathbf{r}, t)$ в соотношении (7) будут иметь следующие

компоненты:

$$\hat{\mathbf{N}}_1\psi_1(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_r \frac{\partial\psi_1}{\partial r} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial\psi_1}{\partial\varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial\psi_1}{\partial z},$$

$$\hat{\mathbf{N}}_2\psi_2(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{e}_z \psi_2 = \mathbf{e}_r \frac{1}{r} \frac{\partial\psi_2}{\partial\varphi} - \mathbf{e}_\varphi \frac{\partial\psi_2}{\partial r},$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{N}}_3\psi_3(\mathbf{r}, t) &= \nabla \times (\nabla \times \mathbf{e}_z)\psi_3 = \mathbf{e}_r \frac{\partial^2\psi_3}{\partial r \partial z} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial^2\psi_3}{\partial\varphi \partial z} \\ &- \mathbf{e}_z \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\psi_3}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\psi_3}{\partial\varphi^2} \right]. \end{aligned}$$

Несложно убедиться, что операторы (8) удовлетворяют условиям ортогональности

$$\hat{\mathbf{N}}_j^+ \cdot \hat{\mathbf{N}}_i = \delta_{ij} \hat{\mathbf{N}}_j^+ \cdot \hat{\mathbf{N}}_j, \quad (9)$$

и условиям коммутативности с оператором Лапласа

$$\Delta \hat{\mathbf{N}}_j = \hat{\mathbf{N}}_j \Delta,$$

где $\hat{\mathbf{N}}_j^+$ — операторы, эрмитово сопряженные к операторам $\hat{\mathbf{N}}_j$.

Подставим разложение (7) в линейризованное уравнение Навье–Стокса (2) и, пользуясь свойствами коммутативности операторов $\hat{\mathbf{N}}_j$ с оператором Лапласа, перепишем (2) в виде

$$\sum_{j=1}^3 \hat{\mathbf{N}}_j \left\{ \frac{\partial\psi_j}{\partial t} + P^{(1)}\delta_{1j} - \nu\Delta\psi_j \right\} = 0.$$

Последовательно умножая слева полученное равенство скалярным образом на операторы $\hat{\mathbf{N}}_j^+$, где $j = 1, 2, 3$, и пользуясь условиями ортогональности (9), вместо одного векторного линейризованного уравнения Навье–Стокса (2) получим систему

$$\hat{\mathbf{N}}_j^+ \cdot \hat{\mathbf{N}}_j \left\{ \frac{\partial\psi_j}{\partial t} + P^{(1)}\delta_{1j} - \nu\Delta\psi_j \right\} = 0. \quad (10)$$

Поскольку операторы $\hat{\mathbf{N}}_j$ коммутируют с оператором Лапласа, то в силу самосопряженности последнего операторы $\hat{\mathbf{N}}_j^+$ также будут с ним коммутировать. Но сказанное означает, что и операторы $\hat{\mathbf{N}}_j^+ \cdot \hat{\mathbf{N}}_j$ будут коммутировать с оператором Лапласа и, следовательно, будут иметь общую систему собственных функций $\{\phi_k\}$:

$$\hat{\mathbf{N}}_j^+ \cdot \hat{\mathbf{N}}_j \phi_k = \mu_k^j \phi_k, \quad \Delta\phi_k = \lambda_k \phi_k.$$

Разложим по бесконечному набору собственных функций $\{\phi_j\}$ искомые функции $\psi_j(\mathbf{r}, t)$, $P^{(1)}(\mathbf{r}, t)$, входящие в выражение, стоящее в (10) в фигурных скобках:

$$\psi_j(\mathbf{r}, t) = \sum_k G_k^{(j)} \phi_k, \quad P^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \sum_k H_k \phi_k.$$

Теперь подставим эти разложения в (10) и после несложных преобразований получим

$$\sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial t} G_k^{(j)} + D_k \delta_{1j} - \nu G_k^{(j)} \lambda_k \right\} \hat{\mathbf{N}}_j^+ \cdot \hat{\mathbf{N}}_j \phi_k = 0$$

или

$$\sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial t} G_k^{(j)} + D_k \delta_{1j} - \nu G_k^{(j)} \lambda_k \right\} \mu_k^j \phi_k = 0.$$

Поскольку система собственных функций $\{\phi_k\}$ в общем случае не нулевая, то полученное равенство может выполняться в двух случаях: равны нулю все собственные значения $\{\mu_k^j\}$, что в общем случае неверно, либо выражения, стоящие в фигурных скобках,

$$\frac{\partial}{\partial t} G_k^{(j)} + D_k \delta_{1j} - \nu G_k^{(j)} \lambda_k = 0.$$

Умножим теперь каждую скобку на собственную функцию ϕ_k с тем же номером и просуммировав по k , получим три скалярных уравнения для отыскания неизвестных функций ψ_j :

$$\frac{\partial\psi_j}{\partial t} + P^{(1)}\delta_{1j} - \nu\Delta\psi_j = 0, \quad j = 1, 2, 3. \quad (11)$$

Уравнение неразрывности (2) после подстановки в него разложения (7) и использования свойств ортогональности (9) приводится к виду

$$\Delta\psi_1(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (12)$$

Первое уравнение системы (11) при учете (12) позволяет получить выражение для гидродинамического давления внутри жидкости, связанного с волновым движением

$$P^{(1)}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial\psi_1(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \quad (13)$$

В итоге с учетом (13) соотношения (11), (12) можно переписать в виде

$$(1 - \delta_{1j}) \frac{\partial\psi_j(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \nu\Delta\psi_j(\mathbf{r}, t) = 0, \quad j = 1, 2, 3. \quad (14)$$

Проекция поля скоростей $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ на орты цилиндрической системы координат, выраженные через скалярные функции $\psi_j(\mathbf{r}, t)$, имеют вид

$$U_r(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial\psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi_2}{\partial\varphi} + \frac{\partial^2\psi_3}{\partial z \partial r},$$

$$U_\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{r} \frac{\partial\psi_1}{\partial\varphi} - \frac{\partial\psi_2}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2\psi_3}{\partial z \partial\varphi},$$

$$U_z(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial\psi_1}{\partial z} - \hat{L}\psi_3, \quad \hat{L} \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \quad (15)$$

Используя (15), переформулируем кинематическое условие (3) и динамические граничные условия для касательных компонент (4), (5) и нормальной компоненты (6) тензора напряжений через неизвестные функции $\psi_j(\mathbf{r}, t)$, полагая $a \sim k_*$ (иными словами, принимая, что ak_* является малой второго порядка):

$$r = 1 :$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \left(1 + a \sin(k_* z) \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z \partial r} \right),$$

$$\left(1 + a \sin(k_* z) \frac{\partial}{\partial r} \right) \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{2}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi} \right) - \left(r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{2}{r} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z \partial \varphi} \right) \right] = 0,$$

$$\left(1 + a \sin(k_* z) \frac{\partial}{\partial r} \right) \left[2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z \partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z^2} - \hat{L} \psi_3 \right) \right] = 0,$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial t} + 2\nu \left(1 + a \sin(k_* z) \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z \partial r} \right) + p_\sigma(a, \xi) - p_E(a, \xi) = 0.$$

Выражения для лапласовского давления $p_\sigma(a, \xi)$ и давления электрического поля $p_E(a, \xi)$, согласно «Приложению А» и «Приложению В», имеют вид:

$$p_\sigma(\xi) \equiv \int_0^\infty \sum_{m=0}^\infty D^{(m)} [k^2 + m^2 - 1 - 2am^2 \sin(k_* z)] \times \exp[i(kz + m\varphi) + st] dk,$$

$$p_E(\xi) = -4\pi\chi_0^2 \int \sum_{m=0}^\infty \exp[i(kz + m\varphi) + st] D^{(m)} \times \left\{ [1 + G'_m(k)] - a \sin(k_* z) [3 + (G'_m(k))^2 - G''_m(k)] \right\} dk,$$

$$G'_m(k) \equiv (kK'_m(k)/K_m(k)), \quad G''_m(k) \equiv (k^2 K''_m(k)/K_m(k)),$$

где $K_m(x)$ — модифицированные функции Бесселя второго рода; штрихами обозначены производные по аргументу; $D^{(m)}$ — коэффициенты разложения

$$\xi(\varphi, z, t) = \int_0^\infty \sum_{m=0}^\infty D^{(m)} \exp[i(kz + m\varphi) + st] dk. \quad (16)$$

Вывод дисперсионного уравнения

Решения уравнений (14) в цилиндрической системе координат, ограниченные на оси симметрии, будем ис-

кать в виде разложений по набору бегущих цилиндрических волн с различной симметрией

$$\psi_1(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty \sum_{m=0}^\infty C_1^{(m)} I_m(kr) \exp[i(kz + m\varphi) + st] dk,$$

$$\psi_j(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty \sum_{m=0}^\infty C_j^{(m)} I_m(qr) \exp[i(kz + m\varphi) + st] dk,$$

$$i = 2, 3, \quad (17)$$

где $q^2 \equiv k^2 + s/\nu$; s — комплексная частота; k — волновое число; m — азимутальные числа, характеризующие неосесимметричность частных решений; $I_m(x)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода; $C_i^{(m)}$ ($i = 1, 2, 3$) — коэффициенты разложений, зависящие от m и k .

Подставив выражения (16), (17) в гидродинамические граничные условия, отнесенные к поверхности $r = 1$ и используя линейную независимость функций $\exp(im\varphi)$ при разных m и функций $\exp(ikz)$ при различных значениях волнового числа k

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[i(m_1 - m_2)\varphi] d\varphi = \delta_{m_1, m_2},$$

$$\int_{-\infty}^\infty \exp[i(k_1 - k_2)z] dz = \delta(k_1 - k_2)$$

(δ_{m_1, m_2} — символ Кронекера; $\delta(k_1 - k_2)$ — дельта-функция Дирака), получим систему алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $C_i^{(m)}, D^{(m)}$ ($i = 1, 2, 3$):

$$C_1^{(m)} [kI'_m(k) + a \sin(k_* z) k^2 I''_m(k)] + C_2^{(m)} [im(I_m(q) + a \sin(k_* z) qI'_m(q))] + C_3^{(m)} [ik(qI'_m(q) + a \sin(k_* z) q^2 I''_m(q))] - D^{(m)} [s] = 0,$$

$$C_1^{(m)} [2im(kI'_m(k) - I_m(k)) + 2ima \sin(k_* z) (2I_m(k) - 2kI'_m(k) + k^2 I''_m(k))] - C_2^{(m)} [(m^2 I_m(q) - qI'_m(q) + q^2 I''_m(q)) + a \sin(k_* z) ((1 + m^2) qI'_m(q) - q^2 I''_m(q) + q^3 I'''_m(q) - 2m^2 I_m(q))] + C_3^{(m)} [2mk \{-I_m(q) + qI'_m(q) + a \sin(k_* z) (2I_m(q) - 2qI'_m(q) + q^2 I''_m(q))\}] = 0,$$

$$\begin{aligned}
& C_1^{(m)} [2ik(kI'_m(k) + a \sin(k_*z)k^2I''_m(k))] \\
& + C_2^{(m)} [-mk\{(1 - a \sin(k_*z))I_m(q) + a \sin(k_*z)qI'_m(q)\}] \\
& + C_3^{(m)} [-2m^2I_m(q) + (1 + m^2 - k^2)qI'_m(q) - q^2I''_m(q) \\
& - q^3I'''_m(q) + a \sin(k_*z)\{6m^2I_m(q) - 2(1 + m^2)qI'_m(q) \\
& + (2 + m^2 - k^2)q^2I''_m(q) - q^3I'''_m(q) - q^4I''''_m(q)\}] = 0, \\
& C_1^{(m)} [sI_m(k) + 2v(k^2I''_m(k) + a \sin(k_*z))k^3I'''_m(k)] \\
& + C_2^{(m)} [2vim\{-I_m(q) + qI'_m(q) + a \sin(k_*z)(I_m(q) \\
& - 2qI'_m(q) + q^2I''_m(q)\}] + C_3^{(m)} [2ivk\{q^2I''_m(q) \\
& + a \sin(k_*z)q^3I'''_m(q)\}] + D^{(m)} [k^2 + m^2 - 1 \\
& - 2m^2a \sin(k_*z) + 4\pi\chi_0^2\{1 + G'_m(k) \\
& - a \sin(k_*z)(3 + (G'_m(k))^2 - G''_m(k))\}] = 0. \quad (18)
\end{aligned}$$

Штрихами обозначены производные от модифицированных функций Бесселя первого и второго рода по их аргументам. Производные от модифицированных функций Бесселя m -го порядка по аргументу могут быть выражены через модифицированные функции Бесселя m -го и $(m+1)$ -го порядков с помощью следующих рекуррентных соотношений [34]:

$$\begin{aligned}
I'_m(z) &= \frac{m}{z} I_m(z) + I_{m+1}(z), \\
I''_m(z) &= \left[1 + \frac{m(m-1)}{z^2}\right] I_m(z) - \frac{1}{z} I_{m+1}(z), \\
I'''_m(z) &= \left[\frac{m-1}{z} + \frac{m(m-1)(m-2)}{z^3}\right] I_m(z) \\
&+ \left[1 + \frac{m^2+2}{z^2}\right] I_{m+1}(z), \\
I''''_m(z) &= \left[1 + \frac{2m(m-1)+3}{z^2} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{z^4}\right] \\
&\times I_m(z) - \left[\frac{2}{z} + \frac{6(m^2+1)}{z^3}\right] I_{m+1}(z), \\
K'_m(z) &= \frac{m}{z} K_m(z) - K_{m+1}(z), \\
K''_m(z) &= \left[1 + \frac{m(m-1)}{z^2}\right] K_m(z) + \frac{1}{z} K_{m+1}(z).
\end{aligned}$$

В итоге для отыскания четырех неизвестных $C_i^{(m)}$, $D^{(m)}$ ($i = 1, 2, 3$) получена система четырех однородных алгебраических уравнений. Система однородных уравнений имеет нетривиальные решения только при условии обращения в нуль определителя $\det a_{ij}$, составленного из коэффициентов a_{ij} при $C_i^{(m)}$, $D^{(m)}$ ($i = 1, 2, 3$) (коэффициенты при каждом из неизвестных стоят в квадратных скобках). Приравняв к нулю определитель системы,

несложно получить дисперсионное уравнение задачи. Оно имеет весьма громоздкий вид, но легко может быть получено с помощью современных компьютерных пакетов аналитических вычислений типа „Mathematica“ или „Maple“. В этой связи приводить дисперсионное уравнение задачи в полном виде не станем, а ограничимся более компактным, выписанным в линейном по a приближении, дисперсионным уравнением для маловязкой жидкости, когда выполняется соотношение $q \gg k$:

$$s^2 + 2sv/A(k, m, \mu) + B(k, m, \mu) = 0, \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
A(k, m, \mu) &\equiv [-F_m(k) + k^2 + m(m-1)] + 2\mu[k^2(m-1) \\
&+ (m-2)(m-1)m + F_m(k)(2 + k^2 + m^2)], \\
B(k, m, \mu) &\equiv (m + F_m(k))\{[k^2 + m^2 - 1 + W[1 + m \\
&- G_m(k)] - \mu[2m^2 + W(3 + (m - G_m(k))^2 - k^2 \\
&- m(m-1) - G_m(k))]\} + \mu[m(m-1) + k^2 - F_m(k)] \\
&\times [k^2 + m^2 - 1 + W(1 + m - G_m(k))],
\end{aligned}$$

$$\mu \equiv a \sin(k_*z), \quad F_m(k) \equiv \frac{kI_{m+1}(k)}{I_m(k)}, \quad D_m(k) \equiv \frac{kK_{m+1}(k)}{K_m(k)}.$$

Несложно видеть, что при $a = 0$ (при $\mu = 0$) выписанное дисперсионное уравнение приводится к дисперсионному уравнению для цилиндрической однородно поверхностно-заряженной струи электропроводной маловязкой жидкости [22]. Если дополнительно положить $W = 0$, то придем к дисперсионному уравнению для незаряженной струи маловязкой жидкости, подробно выведенному в [31].

Дисперсионное уравнение (19) выведено для модельной ситуации, когда деформация цилиндрической поверхности струи имеет синусоидальный вид $a \sin(k_*z)$ с весьма большой длиной волны. На его основе будем анализировать устойчивость капиллярных волн с волновыми числами $k \gg k_*$ (см. рис. 1), близкими к волновым числам волн, наиболее неустойчивых на однородно заряженной цилиндрической поверхности струи, найденным в ранее проведенном исследовании [22]. При этом в каждом конкретном случае будем относить дисперсионное уравнение не ко всей бесконечной струе, но к ее отрезку, пропорциональному характерному масштабу локальности волны, устойчивость которой исследуется: $\lambda = (2\pi/k)$, в пределах которого радиус струи и параметр W будем считать неизменными.

Анализ дисперсионного уравнения

Для предварительного исследования влияния деформации струи на ее устойчивость по отношению к капиллярным волнам на основе дисперсионного уравнения (19) рассмотрим две предельные ситуации: $\mu = \pm a$. Решения квадратного алгебраического уравнения (19)

легко выписываются в аналитическом виде как зависимости: $s = s(k, m, \mu, \nu, W)$.

Поскольку безразмерный коэффициент кинематической вязкости ν принят малым, и также малым считается μ , то в приближении $\mu \geq \nu$ в решении уравнения (19) должны быть опущены слагаемые, содержащие более высокие степени μ и ν , чем первый, а также слагаемые $\sim \mu\nu$. Сказанное означает, что в используемом приближении нам не удастся исследовать влияние деформации струи на локальное значение безразмерной вязкости (подобное исследование требует проведения анализа в более высоких порядках малости по имеющимся малым параметрам k, μ и ν , чем первый). Слагаемое в решении дисперсионного уравнения, содержащее вязкость после отбрасывания компонент $\sim \mu\nu$, обеспечит равномерное по всем значениям величины деформации μ снижение величины инкремента неустойчивости в соответствии с ранее полученными результатами [22]. В этой связи дальнейший анализ проведем на модели идеальной жидкости, что позволит заметно снизить громоздкость расчетов. Само дисперсионное уравнение станет совсем простым

$$s^2 + B(k, m, \mu, W) = 0. \quad (20)$$

Инкременты неустойчивости волн γ определяются выражением

$$\gamma \equiv s = \sqrt{-B(k, m, \mu, W)} \geq 0. \quad (21)$$

Проанализируем вначале влияние давления электрического поля на устойчивость струи. На рис. 2 для цилиндрической струи ($\mu = 0$) приведены при различных значениях азимутального числа m пересеченные плоскостью $s^2 = 0$ зависимости от W и k квадрата частоты $s^2 = s^2(W, k)$. В области $s^2 > 0$ квадрат частоты совпадает с квадратом инкремента неустойчивости $\gamma^2 \equiv s^2$, в области $s^2 < 0$ — с квадратом частоты волн. Из приведенных рисунков видно, что наличие давления электрического поля на поверхность струи приводит к расширению диапазона капиллярных волн, претерпевающих неустойчивость, за счет его расширения в область малых длин волн. Инкременты неустойчивости волн с ростом W быстро увеличиваются. При $W = 0$ неустойчивы только осесимметричные волны с $m = 0$, а неосесимметричные устойчивы для любых значений волновых чисел. При увеличении давления электрического поля (при увеличении W) претерпевают неустойчивость неосесимметричные волны: сначала с $m = 1$ при достижении параметром W величины $W = 5$, а при дальнейшем увеличении W становятся неустойчивыми волны с $m = 2, 3, 4$ и т.д.

При любом фиксированном W неустойчивы капиллярные волны из целого диапазона длин, и общая картина распада струи на отдельные капли определится волной с максимальной величиной инкремента неустойчивости. Расчеты показывают, что при достаточно больших значениях W (например, при $W \approx 8$, см. рис. 2) максимальные значения инкрементов волн, различающихся

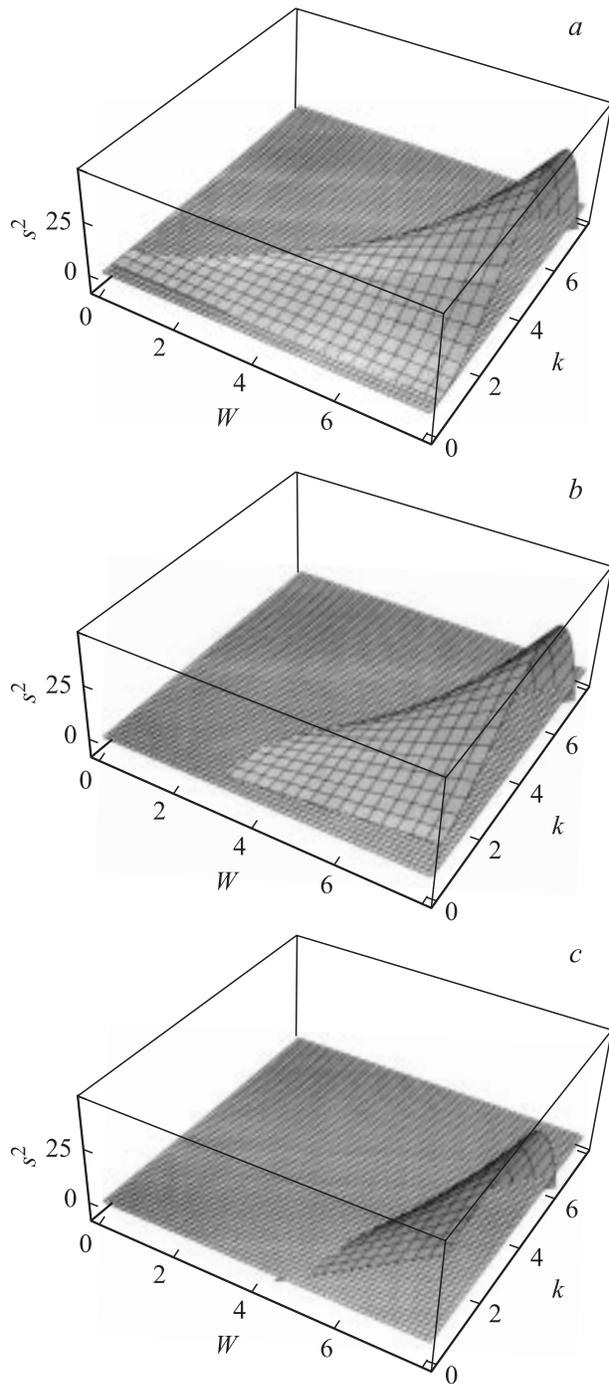


Рис. 2. Зависимость квадрата безразмерной частоты (инкремента) волны на поверхности цилиндрической струи от параметра W , характеризующего отношение давления электрического поля к капиллярному давлению на поверхности струи, и от безразмерного волнового числа k для различных значений азимутального числа: $a - m = 0, b - 2, c - 4$.

азимутальными числами m (степенью симметрии), примерно равны, но длина наиболее неустойчивой волны с ростом m снижается. Сказанное означает, что при достаточно большом W неустойчивость с примерно равными инкрементами будут испытывать сразу несколько

волн с различными азимутальными числами m . Следовательно, распад заряженной струи на отдельные капли при больших значениях параметра W принципиально полидисперсен.

Вернемся к исходной задаче исследования влияния деформации μ цилиндрической струи на величину инкрементов неустойчивости и длины наиболее неустойчивых волн.

Максимальной величиной инкремента будет обладать волна с волновым числом, определяющимся условием

$$\frac{\partial \gamma}{\partial k} \equiv \frac{\partial}{\partial k} \left(\sqrt{-B(k, m, \mu, W)} \right) = 0. \quad (22)$$

Однако уравнение (22) неразрешимо в виде $k = k(m, \mu, W)$, поскольку волновые числа входят в аргументы модифицированных функций Бесселя первого и второго рода. Поэтому отыскать критические условия неустойчивости из решения системы уравнений (21), (22), как это делается при анализе критических условий неустойчивости плоской заряженной поверхности электропроводной жидкости (см., например, [35]), в рассматриваемой ситуации не удастся. Поэтому несколько видоизменим математическую процедуру — из (22) найдем соотношение

$$W = W_{\max}(k_{\max}, m, \mu), \quad (23)$$

обращающее (22) в тождество и связывающее между собой величину волнового числа волны с максимальным инкрементом $k \equiv k_{\max}$ с азимутальным числом m , амплитудой деформации μ и локальным значением поверхностного заряда W_{\max} . Затем (23) подставим в (21) и надейм максимальное значение инкремента неустойчивости

$$\gamma_{\max} \equiv \sqrt{-B(k_{\max}, m, \mu)}. \quad (24)$$

Результаты расчетов по соотношениям (23) и (24) приведены на рис. 3 и 4 в виде соотношений

$$W = W_{\max}(k_{\max}, \mu), \quad \gamma = \gamma_{\max}(k_{\max}, \mu).$$

В качественном и количественном отношениях вид зависимостей $W = W_{\max}(k_{\max}, \mu)$ для волн с различными азимутальными числами сходен, поэтому на рис. 3 приведем только две из них (для $m = 3$ и 4), где наиболее заметны. Из рис. 3 видно, что при изменении μ в диапазоне $-0.05 \leq \mu \leq 0.05$ критическая величина W при фиксированном волновом числе k снижается, а с ростом m увеличивается. Что касается величины инкремента наиболее неустойчивой волны, то из проведенных расчетов и рис. 4 следует, что при изменении μ в диапазоне $-0.05 \leq \mu \leq 0.05$ при фиксированном волновом числе k величина инкремента увеличивается примерно на 18% для всех значений азимутального числа m . Поскольку все рассмотрение проводится в линейном по μ приближении, то аппроксимация (в рамках сохранения соотношений $a \sim k_* \ll 1$) полученного

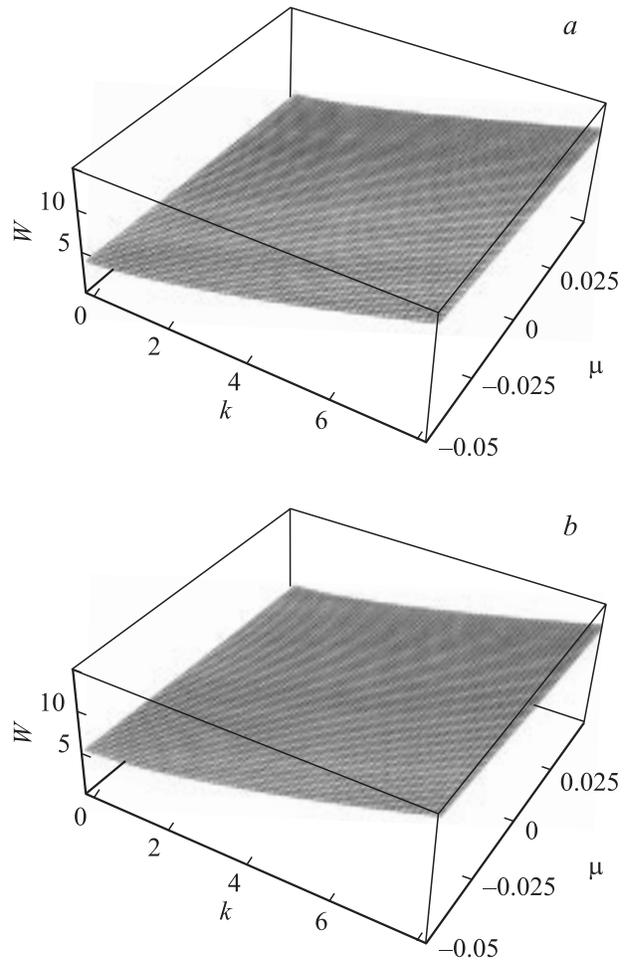


Рис. 3. Зависимости величины параметра W от безразмерного волнового числа k и безразмерной амплитуды деформации μ , при которых инкремент неустойчивости достигает максимального значения, рассчитанные при $a - m = 3$; $b - m = 4$.

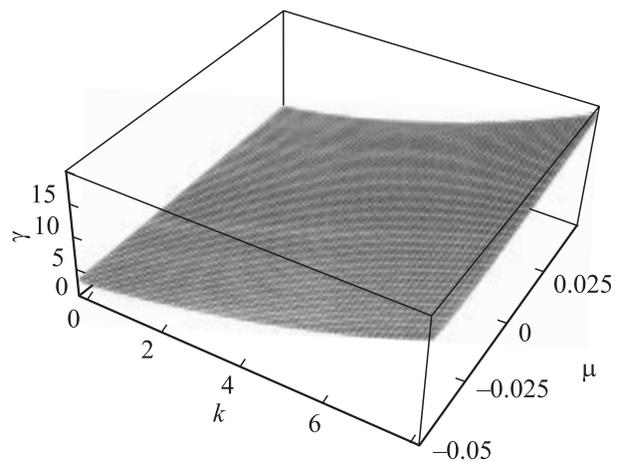


Рис. 4. Зависимость величины максимального инкремента неустойчивости γ волны от безразмерного волнового числа k и безразмерной амплитуды деформации μ , рассчитанная для $m = 4$.

Рассчитанные для $k = 8$ величины безразмерных инкрементов неустойчивости цилиндрических волн с различными азимутальными числами, найденные в крайних точках принятого диапазона изменения деформации

m	$\mu = -0.005$	$\mu = 0.005$
0	13.5467	16.2199
1	13.7452	16.4208
2	14.3361	17.0170
3	15.3165	17.9931
4	16.7013	19.3327

результата на бoльшие значения μ , чем использованные в расчетах, очевидна.

Влияние на величину инкремента азимутального параметра m (степени асимметрии волны) и величины деформации струи μ проиллюстрировано в таблице, где приведены результаты численных расчетов максимального инкремента при $k = 8$ и двух крайних значениях величины деформации из используемого диапазона: $\mu = -0.05$ и $\mu = 0.05$. Прежде всего бросается в глаза, что с ростом m и μ инкременты неустойчивости растут. Наиболее любопытно то обстоятельство, что величина инкремента неустойчивости волны с $m = 4$, рассчитанная при $\mu = -0.05$, превышает величины инкрементов неустойчивости волн с $m = 0$ и 1, рассчитанные при $\mu = 0.05$. Указанное обстоятельство позволяет объяснить результаты экспериментов [17], где был зафиксирован одновременный разрыв сразу в нескольких сечениях различного радиуса утоняющейся с расстоянием от места зарождения заряженной струи.

Заключение

Анализ выведенного дисперсионного уравнения для волн на поверхности заряженной струи электропроводной жидкости с формой, отличающейся от цилиндрической, показывает, что величины максимальных инкрементов неустойчивости и волновые числа наиболее неустойчивых волн сложным образом зависят как от азимутального числа m , так и от величины деформации μ цилиндрической формы струи. Указанное обстоятельство может оказывать существенное влияние на степень полидисперсности капель, образующихся при спонтанном электростатическом распаде струи, и на многообразие реализующихся режимов электродиспергирования.

Результаты расчетов по математической модели, исследованной в проведенном анализе, без особых трудностей могут быть проверены экспериментально на установке, используемой в вынужденном капиллярном распаде [8,12] одновременным возбуждением двух волн: волны с длиной λ_{\max} , обладающей максимальным инкрементом неустойчивости, и волны с длиной λ_* , много большей λ_{\max} . В итоге в зависимости от амплитуды волны с длиной λ_* , поверхностной плотности электрического

заряда на струе и физико-химических характеристик жидкости можно будет получить в контролируемых условиях различные режимы спонтанного распада струй.

Приложение А

Вывод выражения для давления сил поверхностного натяжения на возмущенную свободную поверхность струи

В размерных переменных давление сил поверхностного натяжения на искривленной свободной поверхности струи с коэффициентом поверхностного натяжения σ определяется выражением

$$P_\sigma = \sigma \operatorname{div} \mathbf{n},$$

где \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к свободной поверхности

$$F(r, \varphi, z, t) \equiv r - R - a \sin(k_* z) - \xi(\varphi, z, t) = 0.$$

Вектор нормали \mathbf{n} к поверхности $F = 0$ может быть вычислен по формуле

$$\mathbf{n} = (\nabla F(r, \varphi, z, t) / |\nabla F|).$$

В линейном по a и $|\xi|$ приближении $\nabla F(r, \varphi, z, t)$ записывается как

$$\nabla F(r, \varphi, z, t) \approx \mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi - \left[ak_* \cos(k_* z) + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right] \mathbf{e}_z.$$

Учтем, что

$$r = R + a \sin(k_* z) + \xi(\varphi, z, t),$$

где $|\xi| \ll a \ll R$, и в линейном по a и $|\xi|$ приближении получим

$$\begin{aligned} r^{-1} &= R^{-1} \left[1 + \frac{a}{R} \sin(k_* z) + \frac{\xi(\varphi, z, t)}{R} \right]^{-1} \\ &\approx \frac{1}{R} \left[1 - \frac{a}{R} \sin(k_* z) - \frac{\xi(\varphi, z, t)}{R} \right]. \end{aligned}$$

Тогда выражение для $\nabla F(\varphi, z, t)$ примет вид

$$\begin{aligned} \nabla F(r, \varphi, z, t) &\approx \mathbf{e}_r - \frac{1}{R} \left[1 - \frac{a}{R} \sin(k_* z) \right] \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \\ &\quad \times \mathbf{e}_\varphi \left(ak_* \cos(k_* z) + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_z, \end{aligned}$$

и можно выписать выражение для $|\nabla F(r, \varphi, z, t)|^{-1}$ при $r = r(\varphi, z, t)$:

$$\begin{aligned} |\nabla F(r, \varphi, z, t)|^{-1} &= \left[\sqrt{1 + \frac{1}{R^2} \left[1 - \frac{a}{R} \sin(k_* z) \right] \left(\frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \right)^2 + \left[ak_* \cos(k_* z) + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right]^2} \right]^{-1} \\ &\approx \left[\sqrt{1 + 2ak_* \cos(k_* z) \frac{\partial \xi}{\partial z}} \right]^{-1} \approx 1 - ak_* \cos(k_* z) \frac{\partial \xi}{\partial z}. \end{aligned}$$

В итоге финальное выражение единичного вектора нормали к возмущенной цилиндрической свободной поверхности струи примет вид

$$\mathbf{n} = \left[1 - ak_* \cos(k_*z) \frac{\partial \xi}{\partial z} \right] \mathbf{e}_r - \frac{1}{R} \left[1 - \frac{a}{R} \sin(k_*z) \right] \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi - \left[ak_* \cos(k_*z) + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right] \mathbf{e}_z.$$

Теперь несложно получить и аналитическое выражение для давления сил поверхностного натяжения на деформированной цилиндрической свободной поверхности струи

$$P_\sigma = \sigma \operatorname{div} \mathbf{n} \approx \sigma \left\{ \left(\frac{1}{R} - \frac{a}{R^2} \sin(k_*z) + ak_*^2 \sin(k_*z) \right) - \left(\frac{\xi}{R^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) + \left(\frac{2a}{R^3} \sin(k_*z) \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2} - \frac{ak_*}{R} \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \right\}.$$

В безразмерных переменных $R = \rho = \sigma = 1$ это выражение перепишем в виде

$$P_\sigma = (1 - a \sin(k_*z) + ak_*^2 \sin(k_*z)) - \left(\xi + \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) + \left(2a \sin(k_*z) \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2} - ak_* \frac{\partial \xi}{\partial z} \right)$$

или

$$P_\sigma = p_\sigma(z) + p_\sigma(a, \xi), \\ p_\sigma(z) \equiv (1 - a \sin(k_*z) + ak_*^2 \sin(k_*z)), \\ p_\sigma(a, \xi) \equiv - \left(\xi + \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) + \left(2a \sin(k_*z) \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2} - ak_* \frac{\partial \xi}{\partial z} \right).$$

При $a \sim k_*$ полученные выражения в используемом приближении упростятся

$$p_\sigma(z) \equiv (1 - a \sin(k_*z)), \\ p_\sigma(a, \xi) \equiv - \left(\xi + \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) + 2a \sin(k_*z) \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2}.$$

Учитывая, что волновое возмущение $\xi(\varphi, z, t)$ ищется в виде

$$\xi(\varphi, z, t) = \int_0^\infty \sum_{m=0}^\infty D^{(m)} \exp[i(kz + m\varphi) + st] dk,$$

аналитическое выражение для $p_\sigma(a, \xi)$ можно представить следующим образом:

$$p_\sigma(a, \xi) \equiv \int_0^\infty \sum_{m=0}^\infty D^{(m)} [k^2 + m^2 - 1 - 2am^2 \sin(k_*z)] \times \exp[i(kz + m\varphi) + st] dk.$$

Приложение В

Вывод выражения для давления электрического поля на возмущенную волновым движением заряженную свободную поверхность струи

1. Найдем аналитическое выражение для давления электрического поля на заряженную свободную поверхность струи идеально проводящей жидкости. Будем считать, что электрический ток внутри струи не течет и напряженность электрического поля в объеме жидкости равна нулю. Вектор напряженности на свободной поверхности имеет только нормальную компоненту, а заряд струи, приходящийся на единицу ее длины, сосредоточен по свободной поверхности. В отсутствие синусоидальной деформации заряд однородно распределен по поверхности с плотностью χ_0 . Учтем, что в модели идеально проводящей жидкости заряд по поверхности струи при ее деформации перераспределяется с бесконечно большой скоростью, мгновенно следуя за изменением рельефа поверхности струи и обеспечивая ее эквипотенциальность в любой момент времени. В связи со сказанным зависимость от времени потенциала электрического поля в окрестности струи полностью определяется изменением во времени рельефа поверхности струи, а его зависимость от пространственных переменных может быть найдена из уравнения Лапласа, поскольку гидродинамические скорости много меньше скорости света.

Давление электрического поля на поверхность заряженной электропроводной струи P_E определяется выражением

$$P_E = (-\nabla\Phi/8\pi)^2,$$

где потенциал электрического поля вне струи $\Phi(\mathbf{r}, t)$ является решением краевой задачи

$$\Delta\Phi = 0, \quad r = r(\varphi, z, t) : \Phi = \Phi_*, \quad r \rightarrow \infty : |\nabla\Phi| \rightarrow 0. \quad (\text{B.1})$$

2. Поскольку в решаемой задаче рельеф свободной поверхности струи $r = r(\varphi, z, t)$ определяется суперпозицией виртуальной деформации конечной амплитуды $a \sin(k_*z)$ и капиллярным волновым движением теплового происхождения с весьма малой амплитудой $\xi(\varphi, z, t)$, то разделим полный потенциал электрического поля вне струи $\Phi(\mathbf{r}, t)$ на компоненты

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi_0(\mathbf{r}, t) + \Phi_1(\mathbf{r}, t) + \Phi_2(\mathbf{r}, t) + \Phi_3(\mathbf{r}, t), \quad (\text{B.2})$$

где Φ_0 — потенциал, получаемый при $R = \rho = \sigma = 1$ в нулевом порядке по малым безразмерным параметрам $|\xi|$ и a ; Φ_1 — добавка к потенциалу $\sim a$; Φ_2 — добавка к потенциалу $\sim |\xi|$; Φ_3 — добавка к потенциалу $\sim a|\xi|$.

Подставив (В.2) в (В.1), несложно получить набор краевых задач для отыскания $\Phi_j(\mathbf{r}, t)$, где $j = 0, 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_j &= 0, \quad r \rightarrow \infty: \quad |\nabla\Phi_j| \rightarrow 0, \\ r = 1: \quad \Phi_0 &= \Phi_*, \quad \mathbf{E}_0 \equiv -\nabla\Phi_0 = 4\pi\chi_0\mathbf{e}_r, \\ \Phi_1 &= -a \sin(k_*z) \frac{\partial\Phi_0}{\partial r}, \quad \Phi_2 = -\xi \frac{\partial\Phi_0}{\partial r}, \\ \Phi_3 &= -\left\{ \xi(\varphi, z, t) \left[\frac{\partial\Phi_1}{\partial r} + a \sin(k_*z) \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial r^2} \right] \right. \\ &\quad \left. + a \sin(k_*z) \frac{\partial\Phi_2}{\partial r} \right\}. \end{aligned}$$

Решения краевых задач для функций $\Phi_0(r)$ и $\Phi_1(r, z)$ легко выписываются в виде

$$\begin{aligned} \Phi_0(r) &= -4\pi\chi_0 \ln(r) + \Phi_*, \\ \Phi_1(r, z) &= 4\pi\chi_0 a \sin(k_*z) \frac{K_0(k_*r)}{K_0(k_*)}, \end{aligned} \quad (\text{В.3})$$

где $K_0(k_*r)$ — модифицированная функция Бесселя второго рода.

Решения краевых задач для отыскания функций $\Phi_2(\mathbf{r}, t)$ и $\Phi_3(\mathbf{r}, t)$ в цилиндрической системе координат, убывающие при $r \rightarrow \infty$, будем искать в виде разложения по бегущим цилиндрическим волнам

$$\begin{aligned} \Phi_j(\mathbf{r}, t) &= \int_0^\infty \sum_{m=0}^\infty A_j^{(m)} K_m(kr) \exp[i(kz + m\varphi) + st] dk, \\ j &= 2, 3, \end{aligned} \quad (\text{В.4})$$

где m — азимутальное число; k — волновое число; $A_j^{(m)}$ — коэффициенты разложений.

В виде аналогичного разложения представляется и функция $\xi(\varphi, z, t)$:

$$\xi(\varphi, z, t) = \int_0^\infty \sum_{m=0}^\infty D^{(m)} \exp[i(kz + m\varphi) + st] dk, \quad (\text{В.5})$$

где $D^{(m)}$ — коэффициенты разложения.

Подставив (В.4), (В.5) в граничное условие на поверхности струи для функции $\Phi_2(\mathbf{r}, t)$, несложно получить связь коэффициентов $D^{(m)}$ и $A_2^{(m)}$:

$$A_2^{(m)} = \frac{4\pi\chi_0}{K_m(k)} D^{(m)}.$$

В итоге выражение для $\Phi_2(\mathbf{r}, t)$ получается в виде

$$\begin{aligned} \Phi_2(\mathbf{r}, t) &= 4\pi\chi_0 \\ &\times \int_0^\infty \sum_{m=0}^\infty D^{(m)} \frac{K_m(kr)}{K_m(k)} \exp[i(kz + m\varphi) + st] dk. \end{aligned} \quad (\text{В.6})$$

Из краевой задачи для отыскания $\Phi^{(3)}(\mathbf{r}, t)$ несложно получить связь коэффициентов $D^{(m)}$ и $A_3^{(m)}$ в виде

$$\begin{aligned} A_3^{(m)} &= \frac{4\pi\chi_0 a \sin(k_*z)}{K_m(k)} \\ &\times \left[1 + \frac{k_*}{K_0(k_*)} \frac{dK_0(k_*)}{dk_*} - \frac{k}{K_m(k)} \frac{dK_m(k)}{dk} \right] D^{(m)}, \end{aligned}$$

а для самой поправки $\Phi^{(3)}(\mathbf{r}, t)$ — аналитическое выражение

$$\begin{aligned} \Phi_3(\mathbf{r}, t) &= 4\pi\chi_0 a \sin(k_*z) \int_0^\infty \sum_{m=0}^\infty D^{(m)} \left[1 + \frac{k_*}{K_0(k_*)} \frac{dK_0(k_*)}{dk_*} \right. \\ &\quad \left. - \frac{k}{K_m(k)} \frac{dK_m(k)}{dk} \right] \frac{K_m(kr)}{K_m(k)} \exp[i(kz + m\varphi) + st] dk. \end{aligned}$$

При $a \sim k_*$ полученное выражение для $\Phi^{(3)}(\mathbf{r}, t)$ в используемом приближении упростится:

$$\begin{aligned} \Phi_3 &= 4\pi\chi_0 a \sin(k_*z) \int_0^\infty \sum_{m=0}^\infty D^{(m)} \left[1 - \frac{k}{K_m(k)} \frac{dK_m(k)}{dk} \right] \\ &\quad \times \frac{K_m(kr)}{K_m(k)} \exp[i(kz + m\varphi) + st] dk. \end{aligned} \quad (\text{В.7})$$

3. Выразим давление электрического поля на свободную поверхность струи через $\Phi_j(\mathbf{r}, t)$ в линейном по малым безразмерным параметрам $|\xi|$ и a приближении:

$$\begin{aligned} P_E|_{r=r(\varphi, z, t)} &= [-\nabla\Phi(\mathbf{r}, t)]^2 / 8\pi|_{r=r(\varphi, z, t)} \\ &= [\nabla(\Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3)]^2 / 8\pi|_{r=r(\varphi, z, t)} \approx \frac{1}{8\pi} \left[(\nabla\Phi_0)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2\nabla\Phi_0(\nabla\Phi_1 + \nabla\Phi_2 + \nabla\Phi_3) + 2\nabla\Phi_1 \cdot \nabla\Phi_2 \right]_{r=r(\varphi, z, t)} \\ &\approx \frac{1}{8\pi} \left\{ [(\nabla\Phi_0)^2 + 2\nabla\Phi_0(\nabla\Phi_1 + \nabla\Phi_2 + \nabla\Phi_3) \right. \\ &\quad \left. + 2\nabla\Phi_1 \cdot \nabla\Phi_2] + (a \sin(k_*z) + \xi) \frac{\partial}{\partial r} [\nabla\Phi_0]^2 \right. \\ &\quad \left. + 2\xi \frac{\partial}{\partial r} [\nabla\Phi_0 \cdot \nabla\Phi_1] + 2a \sin(k_*z) \frac{\partial}{\partial r} (\nabla\Phi_0 \cdot \nabla\Phi_2) \right. \\ &\quad \left. + 2a \sin(k_*z) \xi \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial r^2} [\nabla\Phi_0]^2 \right\}_{r=1}. \end{aligned}$$

Отметим, что $\nabla\Phi_1 \sim ak_*$, а потому в полученном выражении для давления при $a \sim k_*$ слагаемые $\sim \nabla\Phi_1$ в используемом приближении должны быть опущены. В итоге получим

$$\begin{aligned} P_E|_{r=r(\varphi, z, t)} &\approx [P_E(z) + p_E(a, \xi)]_{r=1}, \\ r = 1: \quad P_E(z) &\equiv \frac{1}{8\pi} \left\{ (\nabla\Phi_0)^2 + a \sin(k_*z) \frac{\partial}{\partial r} [\nabla\Phi_0]^2 \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_E(a, \xi) \equiv & \frac{1}{4\pi} \left\{ \xi \nabla \Phi_0 \cdot \frac{\partial}{\partial r} \nabla \Phi_0 + \nabla \Phi_0 \cdot \nabla \Phi_2 \right. \\
& + \nabla \Phi_0 \cdot \nabla \Phi_3 + a \sin(k_* z) \frac{\partial}{\partial r} (\nabla \Phi_0 \cdot \nabla \Phi_2) \\
& \left. + a \sin(k_* z) \xi \left(\nabla \Phi_0 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \nabla \Phi_0 + \left(\frac{\partial}{\partial r} \nabla \Phi_0 \right)^2 \right) \right\}. \quad (B.8)
\end{aligned}$$

Подставим (B.3), (B.5)–(B.7) в (B.8) получим волное аналитическое выражение для линейной по $\xi(\varphi, z, t)$ добавки к давлению электрического поля на виртуально синусоидально деформированную свободную поверхность струи

$$\begin{aligned}
r = 1: p_E(a, \xi) = & -4\pi\chi^2 \int \sum_{m=0}^{\infty} \exp[i(kz + m\varphi) + st] \\
& \times D^{(m)} \left\{ \left[1 + \frac{k}{K_m(k)} \frac{dK_m(k)}{dk} \right] - a \sin(k_* z) \right. \\
& \left. \times \left[3 + \left(\frac{k}{K_m(k)} \frac{dK_m(k)}{dk} \right)^2 - \frac{k^2}{K_m(k)} \frac{dK_m^2(k)}{dk^2} \right] \right\} dk.
\end{aligned}$$

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 05-08-01147-а и № 06-01-00066-а.

Список литературы

- [1] Коженков В.И., Фукс Н.А. // Успехи химии. 1976. Т. 45. № 12. С. 2274–2284.
- [2] Bailey A.G. // Atomization and Spray Technology. 1986. Vol. 2. P. 95–134.
- [3] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
- [4] Габович М.Д. // УФН. 1983. Т. 140. № 1. С. 137–151.
- [5] Енотов В.М., Ярин А.Л. // ВИНТИ. Итоги науки и техники. Сер. „Механика жидкости и газа“. 1984. Т. 17. С. 112–197.
- [6] Дудников В.Г., Шабалин А.Л. Электрогидродинамические источники ионных пучков (обзор). Препринт 87-63 ИЯФ СО АН СССР. Новосибирск, 1987. 66 с.
- [7] Fenn J.B., Mann M., Meng C.K. et al. // Science. 1989. Vol. 246. N 4926. P. 64–71.
- [8] Аметистов Е.В., Блаженков В.В., Городов А.К. и др. Монодиспергирование вещества: принципы и применение / Под ред. В.А. Григорьева. М.: Энергоатомиздат, 1991. 336 с.
- [9] Chen C.H., Saville D.A., Aksay I.A. // Appl. Phys. Lett. 2006. Vol. 88. N 3 154 104. P. 1–3.
- [10] Фукс Н.А., Сутугин А.Г. // Успехи химии. 1965. Т. 34. № 2. С. 276–299.
- [11] Тимохин А.Д. // Тр. Моск. энерг. ин-та. 1981. Вып. 54. С. 3–24.
- [12] Безруков В.И. Основы электрокаплетруйных технологий. СПб: Судостроение, 2001. 237 с.
- [13] Masky W.A. // Pros. Roy. Soc. London, 1931. Vol. 133. N A822. P. 565–587.
- [14] Magarvey R., Outhouse L. // J. Fluid Mech. 1962. Vol. 13. N 1. P. 151–157.
- [15] Huebner A., Chu H. // J. Fluid Mech. 1971. Vol. 49. N 2. P. 361–372.
- [16] Hoburg J.F., Melcher J.R. // IEEE Transaction on Power Apparatus System. 1975. Vol. 94. N 1. P. 128–136.
- [17] Cloupeau M., Prunet Foch B. // J. Electrostatics. 1990. Vol. 25. P. 165–184.
- [18] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Святченко А.А. Классификация режимов работы электрогидродинамических источников жидкокапельных пучков. Препринт ИМ РАН № 25. Ярославль, 1993. 118 с.
- [19] Ширяева С.О., Григорьев А.И. // ЖТФ. 1994. Т. 64. Вып. 3. С. 13–25.
- [20] Shiryayeva S.O., Grigor'ev A.I. // J. Electrostatics. 1995. Vol. 34. P. 51–59.
- [21] Jaworek A., Krupa A. // J. Aerosol Sci. 1999. Vol. 30. N 7. P. 873–893.
- [22] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Левчук Т.В., Рыбакова М.В. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 4. С. 5–12.
- [23] Ширяева С.О., Воронина Н.В., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2006. Т. 76, Вып. 6. С. 31–41.
- [24] Ширяева С.О., Воронина Н.В., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2007. Т. 77. Вып. 2. С. 46–55.
- [25] Шутов А.А., Захарьян А.А. // ПМТФ. 1998. Т. 39. № 4. С. 12–15.
- [26] Григорьев А.И., Ширяева С.О., Воронина Н.В., Егорова Е.В. // ЭОМ. 2006. № 6. С. 15–27.
- [27] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1994. Т. 64. Вып. 9. С. 202–207.
- [28] Ширяева С.О. // ЖТФ. 1998. Т. 68. Вып. 4. С. 20–27.
- [29] Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 2006. № 2. С. 17–30.
- [30] Назин С.С., Изотов А.Н., Шикин В.Б. // ДАН СССР. 1985. Т. 283. № 1. С. 121–125.
- [31] Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 700 с.
- [32] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1999. Т. 69. Вып. 7. С. 10–14.
- [33] Ширяева С.О., Лазаряни А.Э., Григорьев А.И. и др. Метод скаляризации векторных краевых задач. Препринт ИМ РАН. № 27. Ярославль, 1994. 125 с.
- [34] Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовиц, И.М. Стиган. М.: Наука, 1979. 831 с.
- [35] Григорьев А.И. // ЖТФ. 2007. Т. 77. Вып. 2. С. 31–40.