01;03

К теории температурного распределения по атмосфере Земли

© С.О. Гладков

Московский государственный областной университет,
105005 Москва, Россия
e-mail: Sglad@newmail.ru

(Поступило в Редакцию 26 декабря 2006 г. В окончательной редакции 15 июня 2007 г.)

Из общих принципов второго начала термодинамики описывается картина стационарного распределения температуры по атмосфере Земли, находящаяся во вполне удовлетворительном согласии с экспериментальными метеорологическими измерениями. С помощью построенной диссипативной функции $\dot{Q}$ дан строгий вывод нелинейного дифференциального уравнения, описывающего синергетику стационарного распределения температуры по всей атмосфере — от тропосферы до экзосферы.

Подробный анализ решений полученного уравнения позволил качественно объяснить нетривиальную зависимость $T(z)$ во всей неоднородной по химическому составу области атмосферы, что подтвердило корректность формального введения и необходимость учета взаимодействия между черным излучением и конвективным потоком. Утверждается, что в формировании теплового излучения, идущего с поверхности Солнца, принимают участие далекие от фиолетовой части спектра жесткие γ-кванты.

PACS: 91.60.Ki

Множество различных особенностей, проявляющихся при анализе (как теоретическом, так и экспериментальном) процессов рассеяния света или иного электромагнитного излучения, связано с формальным соотношением между длиной волны излучения λ, линейным размером рассеивателя a и длиной свободного пробега l (см. [1–3]).

Интерес автора к вопросу аналитического описания прогрева атмосферы Земли (включая тропосферу и заканчивая экзосферой) солнечным излучением неслучаен, что обусловлено прежде всего важностью изучения физических закономерностей воздействия потока солнечного тепла на реальную среду, роль которой в нашем случае играет атмосфера с переменной плотностью $\rho(z)$.

Диапазон изменения z лежит в некоторой абстрактной области $z \in [0, L]$, где L — протяженность атмосферы. При попадании солнечного теплового потока в область вакуума, в котором длина свободного пробега l каких-либо блуждающих в нем частиц весьма велика, рассеяние света на них происходит не интенсивно, что указывает лишь на очень слабые потери солнечного излучения.

Изменение температуры солнечного потока на некотором расстоянии r от Солнца можно оценить исходя из следующих простых соображений. С одной стороны, энергия равновесного черного излучения ε_b, уходящая с единицы поверхности в единицу времени от Солнца, есть $\varepsilon_b = 4\sigma T_c^4$, где

$$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-5} \left(\frac{\text{erg}}{\text{cm}^2\,\text{c}\,\text{K}^4}\right)$$

— постоянная Стефана–Больцмана, T_c — температура поверхности Солнца (примерно 6000 K), а с другой (в стационарном случае), она должна быть равной потоку тепла q на некотором произвольном расстоянии r в соответствии с законом Фурье

$$q = -\kappa \frac{dT}{dr},$$

где κ — коэффициент теплопроводности космоса.

Составив равенство

$$-\kappa k_B \frac{dT}{dr} = 4\sigma T^4,$$

где k_B — постоянная Больцмана, и проинтегрировав его, находим искомое распределение температуры

$$T(r) = \frac{T_c}{\left(1 + \frac{12\sigma r}{\kappa k_B} T_c^3\right)^{\frac{1}{3}}}, \tag{1}$$

где постоянная интегрирования выбрана из условия $T(r)|_{r-0} = T_c$.

Поскольку в газокинетическом приближении [4–6] коэффициент теплопроводности $\kappa = \frac{1}{3} c_V^{(c)} \chi$, где $c_V^{(c)}$ — теплоемкость едининицы объема поверхности Солнца, а коэффициент температуропроводности $\chi \approx c \cdot l$, где c — скорость света в вакууме, l — длина свободного пробега фотонов в космосе (!), то легко оценить и зависимость (1).

В самом деле, энергия черного излучения, по определению, есть

$$E_b = \frac{4\sigma T_c^4}{c} V,$$

где V — объем вблизи поверхности Солнца. Отсюда теплоемкость единицы объема будет

$$c_V^{(c)} = \frac{\partial E_b}{k_B \partial T} = \frac{16\sigma T_c^3}{k_B c}$$

и поэтому

$$\kappa = \frac{16\sigma T_c^3}{c\, k_B}\, l\, c = \frac{16\sigma T_c^3\, l}{k_B}.$$

Подставив полученное выражение в формулу (1), находим простую и компактную зависимость изменения температуры с расстоянием r

$$T(r) = \frac{T_c}{\left(1 + \frac{3r}{4l}\right)^{1/3}}. \tag{2}$$

Так как расстояние до поверхности Земли есть $L = 1.5 \cdot 10^8$ km, то, выбрав длину свободного пробега в космическом вакууме равной $5.2 \cdot 10^5$ km, легко оценить температуру экзосферы:

$$T_e \approx 1000\,\mathrm{K}. \tag{3}$$

Формальная оценка (3) означает только, что если длина свободного пробега фотонов в потоке солнечного излучения составляет 52 000 km, то к околоземному пространству приносится температура примерно в 1000 K.

В приведенной оценке, однако, нет той качественной физики, которая позволила бы теоретически обосновать довольно хитрое перераспределение теплового потока, ведущего к нетривиальному поведению температуры, начиная от тропосферы и заканчивая экзосферой включительно (см. схематическое изображение этой зависимости согласно геофизическим и метеорологическим измерениям, проиллюистрированное рисунком).

Чтобы решить поставленную задачу математического описания температурного распределения, показанного на рисунке, мы начнем пока с некоторых простых оценок, но для начала покажем, что в формировании температуры солнечной поверхности принимают участие жесткие γ-кванты.

В самом деле, поскольку теплоповй поток, сформированный на поверхности Солнца и доходящий до атмосферы Земли есть приблизительно

$$q = -\kappa \frac{dT}{dr} \approx \kappa \frac{\Delta T}{L} = \kappa \frac{(T_c - T_A)}{L},$$

где T_A — средняя температура атмосферы, приблизительно равная 650 K, то можно считать, что он практически весь идет на ее нагрев. Отсюда получаем простое оценочное равенство

$$\kappa \frac{T_c}{L\,c} \approx c_V^{(A)}(T_A - T_0),$$

где T_0 — начальная температура атмосферы Земли в самый начальный момент времени до прихода первого солнечного потока в ее атмосферу, а $c_V^{(A)}$ — усредненная теплоемкость единицы объема атмосферы. Будем полагать, что $T_0 \ll T_A$. Так как

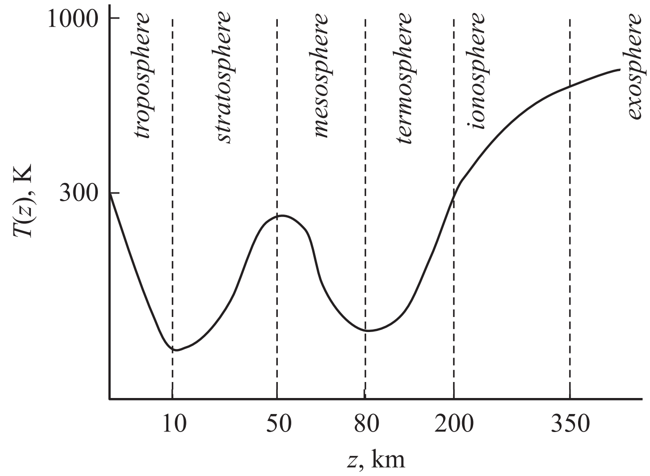
$$\kappa \approx \frac{1}{3} c_V^{(c)} c\, l_c,$$

где l_c — длина свободного пробега фотонов вблизи поверхности Солнца, имеем с учетом всего сказанного из равенства

$$\kappa \frac{T_c}{L\,c} \approx c_V^{(A)} T_A,$$

что

$$T_A = T_c \frac{l_c}{3L} \frac{c_V^{(c)}}{c_V^{(A)}}. \tag{4}$$



Метеорологически наблюдаемая схема стационарного распределения температуры по слоям атмосферы Земли.

Теплоемкость воздуха при нормальных условиях примем равной

$$c_V^{(A)} = 3.1 \cdot 10^{-4} \left(\frac{1}{\mathrm{cm}^3}\right).$$

Теплоемкость солнечной поверхности оцениваем как

$$c_V^{(c)} = \frac{16\sigma T_c^3}{c\,k_B} = \frac{16 \cdot 5.67 \cdot 10^{-5} \cdot (6000)^3}{3 \cdot 10^{10} \cdot 1.38 \cdot 10^{-16}}$$
$$= 4.73 \cdot 10^{13} \left(\frac{1}{\mathrm{cm}^3}\right). \tag{5}$$

Поскольку $T_A \approx 650\,\mathrm{K}$, $T_c = 6000\,\mathrm{K}$, из (4) следует оценка для длины пробега

$$l_c = 3L \frac{T_A}{T_c} \frac{c_V^{(A)}}{c_V^{(c)}} \approx 3.2 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{cm}. \tag{6}$$

Обратное время, следовательно, есть

$$\frac{1}{\tau} = \frac{c}{l_c} \approx 10^{15} \left(\frac{1}{c}\right).$$

Поскольку частота излучения ω должна удовлетворять неравенству $\omega \gg \frac{1}{\tau}$, отсюда следует очевидный вывод о природе участвующего в установлении температуры поверхности Солнца в 6000 K излучения: это жесткий ультрафиолет с частотой $\approx 10^{17}\left(\frac{1}{c}\right)$, что соответствует длине волны 10^{-8} cm.

Изложенные оценки вполне понятны и не противоречат экспериментальным данным.

Переходим теперь непосредственно к основной цели настоящей работы — выводу дифференциального уравнения, позволяющего адекватно описать синергетику стационарного распределения температуры $T(z)$ во всей области изменения аргумента $z \in [0, L]$.

Рассмотрим несколько упрощенную ситуацию, которую условно назовем нулевым приближением относительно локальных возмущений (их роль могут играть различной силы ветры, извержения вулканов, осадки, землетрясения и другие подобные катаклизмы), хотя и влияющие на распределение температуры в околоземном пространстве, но которые тем не менее можно считать несущественными.

Пусть ось z направлена от поверхности Земли в экзосферу. Значение $z = 0$ отвечает свойствам вблизи поверхности Земли.

С увеличением расстояния от поверхности Земли плотность атмосферы $\rho(z)$ сильно уменьшается. Заметим, что барометрическая формула не позволяет корректно описать поведение плотности в высоких слоях атмосферы (начиная примерно от ионосферы и выше), в связи с чем следует подчеркнуть, что это заставляет нас (опираясь на эксперименты) аппроксимировать зависимость $\rho(z)$ не экспоненциальной, а степенно́й функцией.

Первая задача заключается в составлении наиболее общего выражения для диссипативной функции $\dot{Q}$. Сама функция $\dot{Q}$ включает в себя только три составляющие (других не существует).

Первое слагаемое совершенно прозрачно — это тепловой поток Фурье. Если через T' обозначить производную по координате, то

$$\dot{Q}_1 = k_B \int\limits_V \frac{\kappa T'^2}{2T}\, dV. \tag{7}$$

Второе слагаемое должно учесть взаимодействие черного излучения с конвективными потоками в атмосфере, представим его в виде

$$\dot{Q}_2 = 4\sigma \int\limits_S T^4 dS. \tag{8}$$

Последнее слагаемое, которое необходимо учесть — это чисто конвективная стационарная составляющая. Прежде чем написать ее общее выражение, следует вычислить энергию конвективного потока:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \int\limits_V \rho(z) u^2 dV, \tag{9}$$

где $u = u(z)$ — скорость потока.

Так как для конвективной составляющей скорости справедливо уравнение (см. [7])

$$\dot{u} = \beta g \delta T, \tag{10}$$

где средний коэффициент объемного расширения

$$\beta = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P,$$

здесь P — постоянное давление, g — ускорение силы тяжести, и хотя с ростом z параметр g уменьшается, мы это обстоятельство проигнорируем, поскольку соответствующее изменение g весьма плавное (как $\frac{1}{(R_0+z)^2}$, где R_0 — радиус Земли) и его влияние на температуру будет довольно слабым. Именно поэтому будем считать, что g — постоянно (так же, как и коэффициент объемного расширения)

$$\delta T = T_2 - T_1,$$

где $T_{1,2}$ — температура слоев, между которыми осуществляется конвекция.

Проинтегрировав (10), находим

$$\Delta u = \beta g \delta T \Delta t, \tag{11}$$

где $\Delta u = u - u_0$, а $\Delta t = t - t_0$, $u_0 = u(t_0)$. Так как $\Delta \dot{z} = \Delta u$, то проинтегрировав второй раз, получим

$$\Delta z = \frac{\beta g \delta T}{2} \Delta t^2. \tag{12}$$

Выразив из (12) Δt и подставив его в (11) (положив предварительно, что $u_0 = 0$), получим для скорости конвективного потока соотношение

$$u = \sqrt{2\beta g |T'|}\, \Delta z. \tag{13}$$

Если теперь подставить (11) в (9), то для энергии

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \int\limits_V \rho(z) (\beta g \delta T)^2 \Delta t^2 dV.$$

Отсюда следует выражение для третьего слагаемого в диссипативной функции

$$\dot{Q}_3 = \frac{\varepsilon}{\Delta t} = \frac{1}{2} \int\limits_V \rho(z) (\beta g \delta T)^2 \Delta t dV. \tag{14}$$

Если из (12) выразить теперь Δt и подставить в (14), то

$$\dot{Q}_3 = \frac{1}{2} \int\limits_V \rho(z) \beta g \sqrt{2\beta g}\, \left|T'\right|^{3/2} \Delta z^2 dV. \tag{15}$$

Нам осталось преобразовать $\dot{Q}_2$ как часть диссипативной функции, ответственной за взаимодействие между черным излучением и конвективными потоками. С этой целью перепишем (8) как

$$\dot{Q}_2 = 4\sigma \int\limits_S T^4 dS = \frac{4\sigma}{c} \int\limits_V \frac{T^4 dV}{\Delta t}. \tag{16}$$

Представим разность $\delta T = T_2 - T_1$ как

$$\delta T = T(z) - T(z - \Delta z) \approx T' \Delta z.$$

Если это разложение подставить в формулу (12), найдем

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2}{\beta g |T'|}}$$

и, таким образом, окончательно

$$\dot{Q}_2 = \frac{4\sigma}{c} \int\limits_V \frac{T^4 dV}{\Delta t} = \frac{2\sqrt{2}\sigma}{c} \int\limits_V T^4 \sqrt{\beta g |T'|}\, dV. \tag{17}$$

Собрав формулы (7), (15) и (17) вместе, получим искомое выражение для полной диссипативной функции исследуемой системы

$$\dot{Q} = k_B \int\limits_V \frac{\kappa T'^2}{2T} dV + \frac{1}{2} \int\limits_V \rho(z)\beta g \sqrt{2\beta g} \left|T'\right|^{3/2} \Delta z^2 dV + \frac{2\sqrt{2}\sigma}{c} \int\limits_V T^4 \sqrt{\beta g} |T'| \, dV. \quad (18)$$

При численном сравнении первого слагаемого со вторым и третьим оказывается, что оно значительно (от 5 до 8 порядков) меньше, а потому его влияние на стационарное распределение температуры по атмосфере несущественно.

Убрав в (18) первый член полагая $dV = Sdz$, где S (пусть даже и огромная) некоторая постоянная площадь, найдем из (18)

$$\dot{Q} = \frac{S\sqrt{2\beta g}}{2} \left[\int\limits_z \rho(z)\beta g \left|T'\right|^{3/2} (z-h)^2 + \frac{4\sigma}{c} \int\limits_z T^4 \sqrt{|T'|} \right] dz, \quad (19)$$

где учтено явное выражение $\Delta z = |z - h|$, здесь h — подгоночный параметр.

Для функционала (19) легко построить уравнение Эйлера–Лагранжа [8,9]. Если подынтегральную функцию в (19) обозначить через F, т. е.

$$F = \rho(z)\beta g \left|T'\right|^{3/2} (z-h)^2 + \frac{4\sigma}{c} T^4 \left|T'\right|^{1/2},$$

имеем

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\partial F}{\partial T'}\right) - \frac{\partial F}{\partial T} = 0.$$

Раскрыв это уравнение с помощью явного вида функции F, получим

$$\frac{3}{2} \rho' \beta g T'^3 (z-h)^2 + \frac{3}{2} \rho \beta g T'^{3/2} \left[T'^{3/2} (z-h)^2 \right]' - \frac{\sigma T'^3}{c} (8T'^2 + TT'') = 0. \quad (20)$$

Введем безразмерные параметры

$$x = \frac{z}{h}, \quad y = \frac{T}{T^*},$$

где T^* — постоянная размерности температуры, и аппроксимируем закон изменения плотности с высотой (привязавшись к хорошо проверенным многократно экспериментам [10]) зависимостью

$$\rho = \frac{\rho_0}{(x+1)^3}, \quad (21)$$

где постоянная ρ_0 соответствует плотности вблизи поверхности Земли ($x = 0$). При $x = 10^2$, что соответствует области экзосферы (в размерных величинах это будет расстояние 1000 km), из (21) получается правильное значение плотности, равное $10^{-6}\rho_0 = 10^{-9}\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$.

С учетом введенных величин уравнение (20) примет вид

$$\lambda y^3 (8y'^2 + yy'') + \frac{9}{2} \frac{(x-1)^2}{2(x+1)^4} y'^3 - 3 \frac{(x-1)}{(x+1)^3} y'^3 - \frac{9}{4} \frac{(x-1)^2}{(x+1)^3} y'^2 y'' = 0, \quad (22)$$

где безразмерный параметр

$$\lambda = \frac{\sigma T^{*2}}{ch\rho_0 \beta^2 g}.$$

Проанализируем уравнение (22) в некоторых предельных случаях, чтобы доказать его корректность. Если $x \ll 1$, а параметр $\lambda \gg 1$, будем искать решение в виде

$$y = C_1 - C_2 x + C_3 x^2, \quad (23)$$

где C_1, C_2 и C_3 — постоянные, которые следует определить.

Подставив разложение (23) в уравнение (22) и ограничиваясь только квадратичным по x приближением, в результате довольно громоздких преобразований и упрощений, мы приходим к следующей нелинейной системе из трех алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 2\lambda(C_1C_3 + 4C_2^2)C_1^3 - \frac{9}{2} C_2^3 - 3C_2^3 - \frac{9}{2} C_3 C_2^2 = 0, \\ 24\lambda(C_1C_3 + C_2^2)C_1^2 - 27C_2(C_2 - 5C_3) \\ \quad - 6C_2(2C_2 + 3C_3) - \frac{9}{2} C_3(5C_2 + 4C_3) = 0, \\ \lambda(C_1^2C_2C_3 + 24C_2^4 + 36C_1C_2^2C_3 + 38C_1^2C_3^2)C_1 \\ \quad - \frac{9}{2}(19C_2^3 + 12C_2C_3^2) - 9(3C_2^2 + 8C_2C_3 + 4C_3^2)C_2 \\ \quad - \frac{9}{2}(13C_2^2 + 20C_2C_3 + 4C_3^2) = 0. \end{cases} \quad (24)$$

Если параметр λ велик, из системы (24) можно сделать вывод о поведении коэффициентов C_i, где $i = 1, 2, 3$. В самом деле, оказывается, что $C_1 \sim \frac{1}{\sqrt[6]{\lambda}}$, $C_2 \sim \sqrt[6]{\lambda}$, $C_3 \sim \sqrt{\lambda}$.

Если решение системы (24) представить таким образом:

$$\begin{cases} C_1 = \frac{\alpha}{\sqrt[6]{\lambda}}, \\ C_2 = \beta\sqrt[6]{\lambda}, \\ C_3 = \gamma\sqrt{\lambda}, \end{cases} \quad (25)$$

то для новых неизвестных коэффициентов α, β, γ получим более простую (хотя тоже нелинейную) систему уравнений

$$\begin{cases} 9\gamma^2 = 18\alpha^2\beta^2 + 19\gamma\alpha^3, \\ \gamma - \frac{16}{9} \frac{\alpha^3}{\beta^2}, \\ \gamma = \frac{4}{3} \alpha^2(\alpha\gamma + \beta^2). \end{cases} \quad (26)$$

Систему (26) можно решить:

$$\begin{cases} \alpha = \left(\frac{81}{120}\right)^{1/4} \approx 0.91, \\ \beta = 1, \\ \gamma = \frac{16}{9}\alpha^3 \approx 1.32. \end{cases} \quad (27)$$

Таким образом, окончательно асимптотическое решение при малых x будет выглядеть так:

$$y = \frac{0.91}{\sqrt[6]{\lambda}} - \sqrt[6]{\lambda}x + 1.32\sqrt{\lambda}\,x^2. \quad (28)$$

Поскольку в определении y фигурирует постоянная T^*, то ее можно всегда выбрать таким образом, чтобы при $x = 0$ соблюдалось условие $T(0) = T_0$, где T_0 — температура в локальном месте поверхности Земли.

Найденное решение качественно (и количественно тоже) вполне корректно описывает зависимость стационарной температуры над поверхностью Земли приблизительно до ионосферы.

Поскольку уравнение (22) точно решить можно только численно, асимптотика (28) указывает на правильное качественное поведение температуры лишь вблизи поверхности.

Что касается области мезосферы, термосферы, ионосферы и экзосферы, то при больших x достаточно пренебречь последними тремя слагаемыми, содержащими в знаменателях x и x^2 в уравнении (22), и получить довольно простого вида нелинейное уравнение

$$\lambda y^3(8y'^2 + yy'') = 0. \quad (29)$$

Его решение находится элементарно, в результате получаем

$$y = (C_4x + C_5)^{1/9}, \quad (30)$$

где $C_{4,5}$ — константы интегрирования.

Если представить уравнение (22) при $x \gg 1$ в виде

$$\lambda y^3(8'^2 + yy'') + \frac{3}{2}\frac{y'^3}{x^2} - \frac{9}{4}\frac{y'^2y''}{x} = 0 \quad (31)$$

и искать решение

$$y = \frac{C}{x^\nu}, \quad (32)$$

то для ν и C получается следующее уравнение:

$$\frac{\lambda C^2}{x^{5\nu+2}}(9\nu + 1) - \frac{3\nu(3\nu + 5)}{4x^{3\nu+5}} = 0.$$

Отсюда сразу следует, что $\nu = \frac{3}{2}$, а $C \approx \frac{3}{4\sqrt{\lambda}}$.

Таким образом, (32) запишется как

$$y = \frac{3}{4x^{3/2}\sqrt{\lambda}}. \quad (33)$$

Следовательно, при больших значениях параметра λ и аргумента в области мезосферы будет превалировать решение (33), а для термосферы и ионосферы — (30), их можно написать в виде суммы

$$y = \frac{3}{4x^{3/2}\sqrt{\lambda}} + (C_4x + C_5)^{1/9}. \quad (34)$$

Константы C_4 и C_5 легко оценить с помощью данных метеорологических наблюдений из рисунка. Следует заметить, что все аналитическое описание, даваемое решениями (28) и (34), качественно вполне удовлетворительно „ложится“ на экспериментально наблюдаемые результаты, проиллюстрированные рисунком.

Точку в теории можно будет поставить, когда будет проведено точное численное интегрирование уравнения (22) и которое позволит выяснить все тонкости получаемой зависимости от параметра λ. Это связано с недоступностью аналитического и асимптотического решений в том случае, если $\lambda x \approx 1$.

Именно $x \sim 1/\lambda$ будут давать существенный вклад в стационарное температурное распределение $T(z)$.

Подведем основные итоги и отметим результаты исследования.

1. Получено общее выражение для диссипативной функции, в которой феноменологическим путем удалось учесть взаимодействие черного излучения и конвективных потоков.

2. Исходя из явного выражения для диссипативной функции получено уравнение, описывающее синергетическое распределение стационарной температуры по атмосфере, начиная от области тропосферы и заканчивая экзосферой.

3. Проведенный анализ полученного уравнения в асимптотических случаях показал вполне удовлетворительное качественное и количественное согласие теории с наблюдаемым метеорологами поведением температуры по слоям атмосферы.

4. Отмечена очень важная зависимость решения от единственного параметра задачи λ: в зависимость λ входят две величины T^* и геометрический фактор h, которые легко оценить из условия экстремума решения (28) и значения температуры на поверхности Земли, т.е. при $z = 0$.

Список литературы

[1] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. Т. 8. М.: Наука, 1982. 620 с.

[2] *Делоне Н.С., Крайнов В.П.* Атом в сильном световом поле. М.: Энергоатомиздат, 1984. 224 с.

[3] *Гладков С.О.* // ЖТФ. 1999. Т. 69. Вып. 7. С. 89–94.

[4] *Лифшиц И.М., Азбель М.Я., Каганов М.И.* Электронная теория металлов. М.: Наука, 1971. 415 с.

[5] *Гладков С.О.* // ЖЭТФ. 1982. Т. 83. Вып. 7. С. 806–809.

[6] *Гладков С.О.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 8. С. 19–24.

[7] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. Т. 6. М.: Наука, 1988. 733 с.

[8] *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.

[9] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. Т. 1. М.: Наука, 1973. 207 с.

[10] Физическая энциклопедия. М.: Сов. энциклопедия, 1988. С. 140.