

## Использование численных расчетов для выбора средств экранирования от действия магнитного поля

© М.М. Резинкина

Научно-исследовательский и проектно-конструкторский институт „Молния“ Национального технического университета „Харьковский политехнический институт“,  
61013 Харьков, Украина  
e-mail: marinar@kpi.kharkov.ua

(Поступило в Редакцию 9 января 2007 г.)

Для выбора параметров средств экранирования разработана методика численного расчета распределения трехмерного магнитного поля, источники которого расположены в открытых областях. Задача сформулирована и решена методом конечного интегрирования относительно векторного магнитного потенциала. Модификация метода хорошо согласованных поглощающих граничных слоев применительно к случаю магнитного поля позволила решить задачу расчета поля в реальных трехмерных экранирующих системах. Проведено тестирование численных решений с использованием поглощающих слоев путем сравнения с известными аналитическими решениями. Выполнен выбор параметров экранов конечных размеров, обеспечивающих эффективное снижение напряженности магнитного поля.

PACS: 41.20.Gz

### Введение

Известно, что магнитные поля могут оказывать влияние как на электронное оборудование, так и на здоровье человека. Поэтому в ряде практически важных случаев возникает задача выбора параметров средств экранирования от их действия. Для решения данной задачи могут быть использованы численные расчеты магнитного поля.

Следует отметить, что во многих случаях источники поля расположены в так называемых открытых областях. При этом нулевые условия для напряженности магнитного поля достигаются на больших расстояниях от источников их вызывающих. Известно, что для расчета электромагнитных полей в открытых областях наиболее эффективно применение метода интегральных уравнений. Однако использование этого метода связано с существенными сложностями при наличии большого количества границ раздела сред, а также при неравномерном распределении тока по сечению проводников, как например при скин-эффекте. Необходимость задания уровней напряженностей магнитного поля или их производных на границах расчетной области ограничивает использование для численных расчетов — в данном случае конечно-разностных методов. Преодолеть данную трудность можно путем применения так называемых поглощающих граничных условий и, в частности, метода одноосно хорошо согласованных слоев (ОХСС—UPML) [1–4]. Однако метод ОХСС разработан в основном для случая высокочастотных электромагнитных полей [1,2], а также низкочастотных электрических полей [4]. В данной работе этот метод адаптирован применительно к расчету магнитных полей.

### Постановка задачи

Рассмотрим распространенный на практике случай экранирования магнитных полей синусоидальных токов. При этом напряженности и потенциалы, характеризующие распределение магнитного поля, могут быть представлены в виде комплексных. Запишем уравнение Максвелла в виде

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = (\gamma + j\omega\varepsilon_0\varepsilon)\dot{\mathbf{E}} + \mathbf{j}^{\text{ext}}, \quad (1)$$

где  $\dot{\mathbf{H}}$  — комплексная амплитуда вектора напряженности магнитного поля;  $\dot{\mathbf{E}}$  — комплексная амплитуда вектора напряженности электрического поля;  $\mathbf{j}^{\text{ext}}$  — комплексная амплитуда вектора плотности тока сторонних источников;  $\gamma$  — удельная электропроводность;  $\varepsilon$  — относительная диэлектрическая проницаемость;  $\varepsilon_0 = 0.885 \cdot 10^{-11}$  F/m;  $\omega$  — круговая частота;  $j$  — комплексная единица.

Выразим напряженность электрического поля  $\dot{\mathbf{E}}$  и индукцию магнитного поля  $\dot{\mathbf{B}}$  через  $\dot{\mathbf{A}}$  — векторный магнитный — и  $\dot{\phi}$  — скалярный электрический потенциалы:

$$\dot{\mathbf{E}} = -j\omega\dot{\mathbf{A}} - \operatorname{grad} \dot{\phi}; \quad (2)$$

$$\dot{\mathbf{B}} = \mu\mu_0\dot{\mathbf{H}} = \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}}, \quad (3)$$

где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  H/m;  $\mu$  — относительная магнитная проницаемость.

Используя условие нормировки, выразим скалярный электрический потенциал через векторный магнитный потенциал [5]:

$$\dot{\phi} = -\frac{\operatorname{div} \dot{\mathbf{A}}}{(\gamma + j\omega\varepsilon_0\varepsilon)\mu_0\mu}.$$

Подставив выражение для  $\dot{\mathbf{E}}$  из (2), запишем плотность тока в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= (\gamma + j\omega\varepsilon_0\varepsilon) \cdot \dot{\mathbf{E}} \\ &= (\gamma + j\omega\varepsilon_0\varepsilon) \left\{ -j\omega\dot{\mathbf{A}} + \text{grad} \left[ \frac{\text{div}\dot{\mathbf{A}}}{(\gamma + j\omega\varepsilon_0\varepsilon)\mu_0\mu} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

При расчете конечно-разностными методами распределений электромагнитных полей в неоднородных средах целесообразным представляется применение так называемого метода конечного интегрирования (см., например, [6,7]). Данный метод состоит в том, что дифференциальные уравнения Максвелла, записанные для каждой элементарной ячейки, на которые разбита расчетная область, затем интегрируются по объему или сечению ячейки. Проинтегрировав (1) по сечению  $S$ , ограниченному контуром  $l$ , запишем выражение для закона полного тока в виде

$$\oint_1 \dot{\mathbf{H}} dl = \int_S (\gamma + j\omega\varepsilon_0\varepsilon) \cdot \dot{\mathbf{E}}_n ds + I_S^{\text{ext}}, \quad (5)$$

где  $\dot{\mathbf{E}}_n$  — нормальная к поверхности  $S$  компонента напряженности электрического поля;  $I_S^{\text{ext}}$  — сторонний ток через сечение  $S$ , ограниченное контуром  $l$ .

Для того чтобы не находить все компоненты векторов напряженности электрического и магнитного полей (всего 6 компонент для трехмерного случая), выразим  $\dot{\mathbf{E}}$  и  $\dot{\mathbf{H}}$  через векторный магнитный потенциал. В результате количество неизвестных компонент, определяемых в процессе решения, снижается в 2 раза. Используя (2) и (3), запишем (5) в виде

$$\begin{aligned} \oint_1 \frac{1}{\hat{\mu}} \text{rot} \dot{\mathbf{A}} dl &= \mu_0 \\ \times \int_S \left\{ -j\omega\dot{\mathbf{A}}_n + \frac{\partial}{\partial n} \left[ \frac{\text{div}\dot{\mathbf{A}}}{(\gamma + j\omega\varepsilon_0\varepsilon)\mu_0\mu} \right] \right\} &(\gamma + j\omega\varepsilon_0\varepsilon) ds + \mu_0 I_S^{\text{ext}}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\hat{\mu}$  — тензор относительной магнитной проницаемости (будет использован впоследствии при задании анизотропных свойств одноосно хорошо поглощающих слоев);  $\dot{\mathbf{A}}_n$  — нормальная к поверхности  $S$  компонента векторного магнитного потенциала;  $\partial/\partial n$  — производная по направлению нормали к поверхности  $S$ .

Разбиение рассматриваемой области на ячейки-параллелепипеды с однородными электрическими свойствами произведено таким образом, что узлы расчетной сетки  $(i, j, k)$  лежат на границах раздела сред.

Запишем выражения вида (6) для  $(i, j, k)$ -го узла, проинтегрировав (1) по сечениям  $X = \text{const} = S_x$ ,  $Y = \text{const} = S_y$ ,  $Z = \text{const} = S_z$  (см. заштрихованные площадки рис. 1). Поскольку узлы  $(i, j, k)$  лежат на границах раздела сред, во избежание попадания площадок  $S_x$ ,  $S_y$ ,  $S_z$  в грани, разделяющие ячейки с различными электрическими параметрами, и вызванную

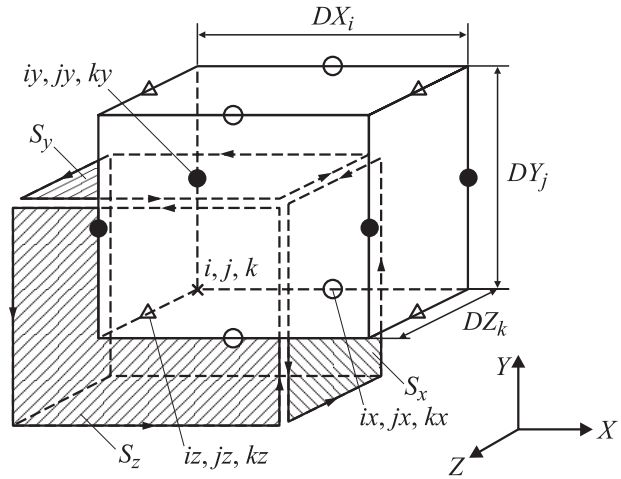


Рис. 1. Расчетная схема.

этим неопределенность при задании  $\hat{\mu}$  и  $\gamma$ , для записи закона полного тока через площадки  $X = \text{const}$ ,  $Y = \text{const}$ ,  $Z = \text{const}$  был использован обход различных наборов узлов (рис. 1). Так, интегрирование (1) по элементарным площадкам  $X = \text{const}$  производилось при обходе узлов, показанных на рис. 1 окружностями (они будут в дальнейшем обозначаться  $ix, jx, kx$ ), по площадкам  $Y = \text{const}$  — кругами ( $iy, jy, ky$ ), по площадкам  $Z = \text{const}$  — треугольниками ( $iz, jz, kz$ ). Причем площадки  $S_x, S_y, S_z$  проходят через каждый узел так, что их границы делят пополам расстояния между соседними узлами. Тогда для площадок  $S_x, S_y, S_z$  выражения вида (6) могут быть записаны в разностном виде через комплексные величины

$$\begin{aligned} &\left\{ \left( \frac{DZ_{k-1}/2}{\mu z_{i,j,k-1}} + \frac{DZ_k/2}{\mu z_{i,j,k}} \right) \right. \\ &\times \left[ -\frac{AX_{ix,jx+1,kx} - AX_{ix,jx,kx}}{DY_j} + \frac{AY_{iy+1,jy,ky} - AY_{iy,jy,ky}}{DX_i} \right] \\ &- \left( \frac{DZ_{k-1}/2}{\mu z_{i,j-1,k-1}} + \frac{DZ_k/2}{\mu z_{i,j-1,k}} \right) \left[ -\frac{AX_{ix,jx,kx} - AX_{ix,jx-1,kx}}{DY_{j-1}} \right. \\ &\left. \left. + \frac{AY_{iy+1,jy-1,ky} - AY_{iy,jy-1,ky}}{DX_i} \right] \right\} \\ &+ \left\{ -\left( \frac{DY_{j-1}/2}{\mu y_{i,j-1,k}} + \frac{DY_j/2}{\mu y_{i,j,k}} \right) \left[ \frac{AX_{ix,jx,kx+1} - AX_{ix,jx,kx}}{DZ_k} \right. \right. \\ &- \left. \frac{AZ_{iz+1,jz,kz} - AZ_{iz,jz,kz}}{DX_i} \right] - \left( \frac{DY_{j-1}/2}{\mu y_{i,j-1,k-1}} + \frac{DY_j/2}{\mu y_{i,j,k-1}} \right) \\ &\times \left[ \frac{AX_{ix,jx,kx} - AX_{ix,jx,kx-1}}{DZ_{k-1}} \right. \\ &- \left. \frac{AZ_{iz+1,jz,kz-1} - AZ_{iz,jz,kz-1}}{DX_i} \right] \left. \right\} \\ &+ \frac{SX_{i,j,k}}{\mu x_{i,j,k}(\gamma_{i,j,k} + j\omega\varepsilon_0\varepsilon_{i,j,k})} \left[ \frac{AX_{ix+1,jx,kx} - AX_{ix,jx,kx}}{DX_i} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{AX_{ix,jx,kx} - AX_{ix-1,jx,kx}}{DX_{i-1}} = -\mu_0 j \omega AX_{ix,jx,kx} SX_{i,j,k} \\
& + i x_{ix,jx,kx}^{\text{ext}} - \frac{SX_{i,j,k}}{\mu x_{i,j,k}(\gamma_{i,j,k} + j\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{i,j,k})} \\
& \times \left[ \frac{AY_{iy+1,jy,ky} - AY_{iy+1,jy-1,ky}}{0.5(DY_j + DY_{j-1})} - \frac{AY_{iy,jy,ky} - AY_{iy,jy-1,ky}}{0.5(DY_j + DY_{j-1})} \right] \\
& - \frac{SX_{i,j,k}}{\mu x_{i,j,k}(\gamma_{i,j,k} + j\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{i,j,k})} \left[ \frac{AZ_{iz+1,jz,kz} - AZ_{iz+1,jz,kz-1}}{0.5(DZ_k + DZ_{k-1})} \right. \\
& \left. - \frac{AZ_{iz,jz,kz} - AZ_{iz,jz,kz-1}}{0.5(DY_k + DZ_{k-1})} \right]; \quad (7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ - \left( \frac{DZ_{k-1}/2}{\mu z_{i,j,k-1}} + \frac{DZ_k/2}{\mu z_{i,j,k}} \right) \left[ \frac{AY_{iy+1,jy,kx} - AY_{iy,jy,ky}}{DX_i} \right. \right. \\
& - \frac{AX_{ix,jx+1,kx} - AX_{ix,jx,kx}}{DY_j} \left. \right] + \left( \frac{DZ_{k-1}/2}{\mu z_{i-1,j,k-1}} + \frac{DZ_k/2}{\mu z_{i-1,j,k}} \right) \\
& \times \left[ \frac{AY_{iy,jy,ky} - AY_{iy-1,jy,ky}}{DX_{i-1}} \right. \\
& \left. - \frac{AX_{ix-1,jx+1,kx} - AX_{ix-1,jx,kx}}{DY_j} \right] \left. \right\} \\
& + \left\{ \left( \frac{DX_{i-1}/2}{\mu x_{i-1,j,k}} + \frac{DX_i/2}{\mu x_{i,j,k}} \right) \left[ - \frac{AY_{iy,jy,ky} - AY_{iy,jy,ky+1}}{DZ_k} \right. \right. \\
& + \frac{AZ_{iz,jz+1,kz} - AZ_{iz,jz,kz}}{DY_j} \left. \right] - \left( \frac{DX_i/2}{\mu x_{i,j,k-1}} + \frac{DX_{i-1}/2}{\mu x_{i-1,j,k-1}} \right) \\
& \times \left[ - \frac{AY_{iy,jy,ky} - AY_{iy,jy,ky-1}}{DZ_{k-1}} \right. \\
& \left. + \frac{AZ_{iz,jz+1,kz-1} - AZ_{iz,jz,kz-1}}{DY_j} \right] \left. \right\} \\
& + \frac{SY_{i,j,k}}{\mu y_{i,j,k}(\gamma_{i,j,k} + j\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{i,j,k})} \left[ \frac{AY_{iy,jy+1,ky} - AY_{iy,jy,ky}}{DY_j} \right. \\
& \left. - \frac{AY_{iy,jy,ky} - AY_{iy,jy-1,ky}}{DY_{j-1}} \right] = -\mu_0 j \omega AY_{iy,jy,ky} SY_{i,j,k} \\
& + i y_{iy,jy,ky}^{\text{ext}} - \frac{SY_{i,j,k}}{\mu y_{i,j,k}(\gamma_{i,j,k} + j\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{i,j,k})} \\
& \times \left[ \frac{AX_{ix,jx+1,kx} - AX_{ix-1,jx+1,kx}}{0.5(DX_i + DX_{i-1})} \right. \\
& \left. - \frac{AX_{ix,jx,kx} - AX_{ix-1,jx,kx}}{0.5(DX_i + DX_{i-1})} \right] - \frac{SX_{i,j,k}}{\mu y_{i,j,k}(\gamma_{i,j,k} + j\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{i,j,k})} \\
& \times \left[ \frac{AZ_{iz,jz+1,kz} - AZ_{iz,jz+1,kz-1}}{0.5(DZ_k + DZ_{k-1})} \right. \\
& \left. - \frac{AZ_{iz,jz,kz} - AZ_{iz,jz,kz-1}}{0.5(DZ_k + DZ_{k-1})} \right]; \quad (8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ - \left( \frac{DX_{i-1}/2}{\mu x_{i-1,j,k}} + \frac{DX_i/2}{\mu x_{i,j,k}} \right) \left[ \frac{AZ_{iz,jz+1,kz} - AZ_{iz,jz,kz}}{DY_j} \right. \right. \\
& - \frac{AY_{iy,jy,ky+1} - AY_{iy,jy,ky}}{DZ_k} \left. \right] + \left( \frac{DX_{i-1}/2}{\mu x_{i-1,j-1,k}} + \frac{DX_i/2}{\mu x_{i,j-1,k}} \right) \\
& \times \left[ \frac{AZ_{iz,jz,kz} - AZ_{iz,jz-1,kz}}{DY_{j-1}} \right. \\
& \left. - \frac{AY_{iy,jy-1,ky+1} - AY_{iy,jy-1,ky}}{DZ_k} \right] \left. \right\} \\
& + \left\{ \left( \frac{DY_{j-1}/2}{\mu y_{i,j-1,k}} + \frac{DY_j/2}{\mu y_{i,j,k}} \right) \left[ - \frac{AZ_{iz+1,jz,kz} - AZ_{iz,jz,kz}}{DX_i} \right. \right. \\
& + \frac{AX_{ix,jx,kx+1} - AX_{ix,jx,kx}}{DZ_k} \left. \right] - \left( \frac{DY_{j-1}/2}{\mu y_{i-1,j-1,k}} + \frac{DY_j/2}{\mu y_{i-1,j,k}} \right) \\
& \times \left[ - \frac{AZ_{iz,jz,kz} - AZ_{iz-1,jz,kz}}{DX_{i-1}} \right. \\
& \left. + \frac{AX_{ix-1,jx,kx+1} - AX_{ix-1,jx,kx}}{DZ_k} \right] \left. \right\} \\
& + \frac{SZ_{i,j,k}}{\mu z_{i,j,k}(\gamma_{i,j,k} + j\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{i,j,k})} \left[ \frac{AZ_{iz,jz,kz+1} - AZ_{iz,jz,kz}}{DZ_k} \right. \\
& \left. - \frac{AZ_{iz,jz,kz} - AZ_{iz,jz,kz-1}}{DZ_{k-1}} \right] = -\mu_0 j \omega AZ_{iz,jy,kz} SZ_{i,j,k} \\
& + i z_{iz,jz,kz}^{\text{ext}} - \frac{SZ_{i,j,k}}{\mu z_{i,j,k}(\gamma_{i,j,k} + j\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{i,j,k})} \\
& \times \left[ \frac{AX_{ix,jx,kx+1} - AX_{ix-1,jx,kx+1}}{0.5(DX_i + DX_{i-1})} \right. \\
& \left. - \frac{AX_{ix,jx,kx} - AX_{ix-1,jx,kx}}{0.5(DX_i + DX_{i-1})} \right] - \frac{SZ_{i,j,k}}{\mu y_{i,j,k}(\gamma_{i,j,k} + j\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{i,j,k})} \\
& \times \left[ \frac{AY_{iy,jy,ky+1} - AY_{iy,jy-1,ky+1}}{0.5(DY_j + DY_{j-1})} \right. \\
& \left. - \frac{AY_{iy,jy,ky} - AY_{iy,jy-1,ky}}{0.5(DY_j + DY_{j-1})} \right]; \quad (9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
SX_{i,j,k} &= 0.25 [(\gamma_{i,j,k} + j\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{i,j,k}) DY_j DZ_k \\
&+ (\gamma_{i,j,k-1} + j\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{i,j,k-1}) DY_j DZ_{k-1} \\
&+ (\gamma_{i,j-1,k} + j\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{i,j-1,k}) DY_{j-1} DZ_k \\
&+ (\gamma_{i,j-1,k-1} + j\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{i,j-1,k-1}) DY_{j-1} DZ_{k-1}]. \\
SY_{i,j,k} &= 0.25 [(\gamma_{i,j,k} + j\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{i,j,k}) DX_i DZ_k \\
&+ (\gamma_{i,j,k-1} + j\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{i,j,k-1}) DX_i DZ_{k-1} \\
&+ (\gamma_{i-1,j,k} + j\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{i-1,j,k}) DX_{i-1} DZ_k \\
&+ (\gamma_{i-1,j,k-1} + j\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{i-1,j,k-1}) DX_{i-1} DZ_{k-1}].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
SZ_{i,j,k} = & 0.25[(\gamma_{i,j,k} + j\omega\varepsilon_0\varepsilon_{i,j,k})DX_iDY_j \\
& + (\gamma_{i-1,j,k} + j\omega\varepsilon_0\varepsilon_{i-1,j,k})DX_{i-1}DY_j \\
& + (\gamma_{i,j-1,k} + j\omega\varepsilon_0\varepsilon_{i,j-1,k})DX_iDY_{j-1} \\
& + (\gamma_{i-1,j-1,k} + j\omega\varepsilon_0\varepsilon_{i-1,j-1,k})DX_{i-1}DY_{j-1}],
\end{aligned}$$

где  $DX_i, DY_j, DZ_k$  — шаги по пространству в направлениях  $X, Y, Z$  соответственно (см. рис. 1);  $\mu_{x_{i,j,k}}, \mu_{y_{i,j,k}}, \mu_{z_{i,j,k}}$  — компоненты тензора относительной магнитной проницаемости  $(i, j, k)$ -й ячейки в направлениях  $X, Y, Z$  соответственно;  $\gamma_{i,j,k}$  — удельная электропроводность  $(i, j, k)$ -й ячейки;  $AX_{ix,jz,kx}, AY_{iy,jy,ky}, AZ_{iz,jz,kz}$  — комплексные амплитуды  $X, Y, Z$  компонент векторного магнитного потенциала в узлах  $(ix, jx, kx), (iy, jy, ky), (iz, jz, kz)$  соответственно;  $I_{ix,jx,kx}^{\text{ext}}, I_{iy,jy,ky}^{\text{ext}}, I_{iz,jz,kz}^{\text{ext}}$  — комплексные амплитуды величин стороннего тока в направлениях  $X, Y, Z$  в узлах  $(ix, jx, kx), (iy, jy, ky), (iz, jz, kz)$  соответственно;  $\omega$  — круговая частота.

Уравнения вида (6)–(9) были записаны для каждого узла расчетной сетки. Полученная система уравнений решалась с помощью прогонки итерационным методом переменных направлений (подробнее см., например, [8]).

Для расчета распределений магнитных полей воспользуемся методом поглощающих граничных условий [1–4,9]. Суть метода ОХСС заключается во введении на границе расчетной области дополнительных сред, поле в которых играет лишь вспомогательную роль. Причем анизотропные магнитные параметры данных сред таковы, что в них обеспечивается быстрое и безотражательное затухание электромагнитного поля. При расчете распределения трехмерного магнитного поля на границе расчетной области вводятся слои, магнитные параметры которых описываются трехдиагональным тензором относительной магнитной проницаемости

$$\hat{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_x & 0 & 0 \\ 0 & \mu_y & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{bmatrix}.$$

В слое  $Z = \text{const}$ , параллельном плоскости  $x-y$ :  $\mu_x = \mu_y = a$ ,  $\mu_z = 1/a < 1$ ; в слое  $X = \text{const}$ , параллельном плоскости  $y-z$ :  $\mu_y = \mu_z = a$ ,  $\mu_x = 1/a < 1$  и т.д. Например, для слоя, параллельного плоскости  $x-y$ , тензор относительной магнитной проницаемости имеет вид

$$\mu_s = \begin{bmatrix} a_s & 0 & 0 \\ 0 & a_s & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_s \end{bmatrix},$$

причем  $a_s > 1$ .

Таким образом, поглощающий „одноосно хорошо согласованный слой“ имеет анизотропные магнитные параметры, заданные в виде тензора, компонента которого в направлении, перпендикулярном граничной плоскости, например  $X = \text{const}$ , равна  $1/s_x$ , а в остальных равна  $s_x$ ,

причем  $s_x > 1$ . В угловых зонах расчетной области тензора пересекающихся слоев перемножаются

$$\hat{\mu} = \begin{bmatrix} s_x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & s_x & 0 \\ 0 & 0 & s_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_y & 0 & 0 \\ 0 & s_y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_z & 0 & 0 \\ 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & s_z^{-1} \end{bmatrix},$$

где  $s_x = \mu k_x$ ;  $s_y = \mu k_y$ ;  $s_z = \mu k_z$ ;  $k_x, k_y, k_z$  — коэффициенты. Согласно [3], следует задавать изменение по глубине (например, в направлении  $X$ ) параметров ОХСС толщиной  $d$  в соответствии с полиномиальным законом

$$k_x(x) = 1 + (k_{\text{max}} - 1)(x/d)^m, \quad (10)$$

где  $k_{\text{max}}$  — максимальная величина  $k_x$  на внешней границе ОХСС;  $m$  — показатель степени ( $3 \leq m \leq 4$  [3]).

Величины  $k_y(y)$  и  $k_z(z)$  вычисляются аналогичным образом:

$$k_y(y) = 1 + (k_{\text{max}} - 1)(y/d)^m,$$

$$k_z(z) = 1 + (k_{\text{max}} - 1)(z/d)^m.$$

число шагов в зоне ОХСС  $N_{UPML} = 5-10$  [3].

## Сравнение с аналитическими решениями

Для выбора параметров поглощающего слоя (величин  $k_x, k_y, k_z$ ) и числа шагов по пространству в поглощающем слое  $N_{UPML}$  применительно к расчету магнитного поля были проведены тестовые расчеты для имеющихся аналитических решение случаев расположения прямого и обратного токопроводов в воздухе (см., например, [10]), а также токопроводов, расположенных в воздухе над магнитным полупространством (см., например, [11]). Учитывая, что аналитические решения получены для плоскопараллельного поля, расчеты были выполнены в двумерной постановке.

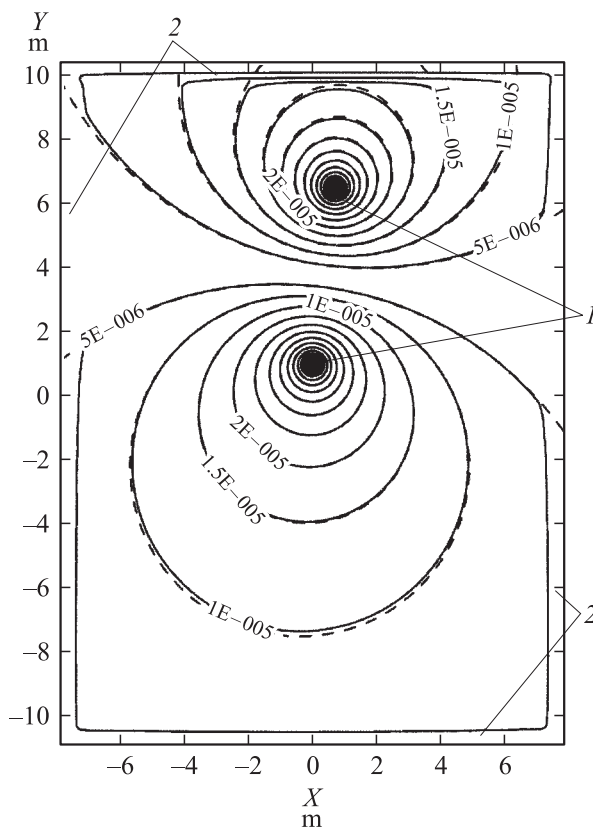
Для выбора параметров ОХСС была проведена серия расчетов при различном характере изменения компонент тензора магнитной проницаемости по его глубине. В результате численных расчетов при рекомендуемом [3] числе шагов по пространству в ОХСС зоне  $N_{UPML} = 10$  были определены значения  $k_{\text{max}}$  и  $m$ , обеспечивающие расчет распределения напряженности магнитного поля с относительной погрешностью не свыше 3%. На рис. 2 представлены полученное распределение линий равного векторного магнитного потенциала во всей расчетной области для случая прямого и обратного токопроводов ( $i_1 = 100$  А,  $i_2 = -100$  А), расположенных в однородной воздушной среде (аналитическое решение показано пунктиром). Расчеты выполнены при следующих параметрах ОХСС:  $k_{\text{max}} = 300$ ,  $m = 3$ . Максимальная погрешность вычисления модуля напряженности магнитного поля  $|\mathbf{B}|$  по сравнению с аналитическим решением [10] составила менее 3%.

На рис. 3 представлены рассчитанные распределения линий равного модуля индукции магнитного поля во

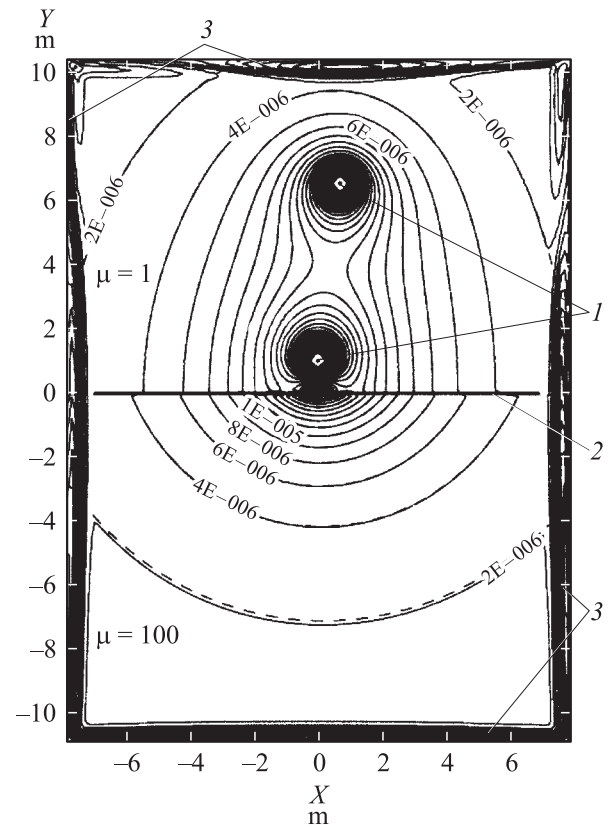
всей расчетной области для случая прямого и обратного токопроводов ( $i_1 = 100$  А,  $i_2 = -100$  А), расположенных в однородной воздушной среде при наличии на расстоянии 1 м от нижнего токопровода магнитного полупространства с  $\mu = 100$  (аналитическое решение показано пунктиром). Расчеты выполнены при следующих параметрах ОХСС:  $k_{\max} = 100$ ,  $m = 4$ . Максимальная погрешность вычисления модуля  $\mathbf{B}$  по сравнению с аналитическим решением [11] составила менее 3%.

Таким образом, рекомендуемые параметры ОХСС при расчете низкочастотного магнитного поля:  $N_{UPML} = 10$ ,  $k_{\max} = 300$ ,  $m = 3$  для случая, когда ОХСС не пересекает границы раздела сред;  $k_{\max} = 100$ ,  $m = 4$  для случая, когда ОХСС пересекает границу раздела сред.

В большинстве случаев габариты экранируемых объектов намного превышают толщину используемых экранов  $d$ . Поэтому в данном случае приходится использовать расчетные сетки с неравномерным шагом по пространству. Для выбора количества разбиений экрана  $N_a$  были проведены численные расчеты в одномерной постановке, результаты которых сравнивались с известным аналитическим решением для случая экранирования магнитного поля плоскими параллельными пластинами толщиной  $d$ , расположенными друг от друга



**Рис. 2.** Распределение линий равного векторного магнитного потенциала прямого и обратного токопроводов во всей расчетной системе (1 — токопроводы; 2 — зона ОХСС; аналитическое решение показано пунктиром; значения  $|\mathbf{A}|$  даны в Т/м).



**Рис. 3.** Распределение линий модуля равной индукции магнитного поля прямого и обратного токопроводов, расположенных над магнитным полупространством, во всей расчетной области (1 — токи; 2 — граница раздела сред; 3 — зона ОХСС; аналитическое решение показано пунктиром; значения  $|\mathbf{B}|$  даны в тесла).

на расстоянии  $D$  [12]. Данные расчетов показали, что при  $d \approx \Delta$  (где  $\Delta = \sqrt{2/(\gamma\mu\mu_0\omega)}$  — толщина скин-слоя) для сравнительно тонких экранов ( $D/d > 200$ ) обеспечивает завышение уровня напряженности магнитного поля внутри экрана с относительной погрешностью  $\delta$ , не большей, чем 5.5% при  $N_a = 10$ ;  $\delta \leq 2.7\%$  при  $N_a = 20$ ;  $\delta \leq 0.155\%$  при  $N_a = 400$ .

### Расчетный выбор параметров средств экранирования магнитного поля

Для того чтобы оценить характер проникновения, а также уровни напряженностей магнитного поля с учетом краевых эффектов в экранах, расчет необходимо выполнить в трехмерной постановке. Будем искать решение системы уравнений вида (6)–(9) с помощью итерационного метода. При нахождении, например,  $z$ -й компоненты векторного магнитного потенциала  $A_z$  остальные его компоненты полагаются известными, а их значения на первом итерационном шаге задаются равными начальному приближению (в нашем случае — 0), а затем берутся с предыдущей итерации. После этого

находятся остальные компоненты векторного магнитного потенциала  $A_X$  и  $A_Y$ . Данный итерационный процесс повторяется до тех пор, пока значения компонент векторного магнитного потенциала не перестают меняться в пределах заданной относительной погрешности.

Пусть экран расположен в плоскости, перпендикулярной одной из осей, например  $OY$ . При традиционном применении метода конечных разностей весьма мелкий шаг по пространству в зоне экрана в направлении оси  $OY$  ( $dy_j \sim d/20$ ), где это оправдано большими градиентами напряженности магнитного поля и векторного магнитного потенциала, должен использоваться также и в окружающей его среде, в том числе и в области ОХСС, лежащей с экраном в одной плоскости  $Y = \text{const}$ , где градиенты изменения  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{A}$  по направлению  $Y$  не наблюдаются. Это приводит к тому, что итерационный процесс получения решения сходится крайне медленно или не сходится вообще. Для того чтобы устранить данную трудность, был использован прием, аналогичный описанному в [13]: применены так называемые прогонки с перекрытием. В результате удалось существенно (на порядок и более) сократить количество итераций при получении решения за счет того, что использование весьма малого шага в направлении оси  $OY$ :  $dy \sim d/20$  происходит только в тонком проводящем экране и не происходит в окружающей его среде, лежащей с ним в одной плоскости.

Выполним расчет распределения магнитного поля в системе экранирования от действия магнитного поля (рис. 4). Примем за базовые следующие параметры системы: размер экрана в направлении оси  $Z$  —  $2L_z = 1.2$  м; размер экрана в направлении оси  $X$  —  $2L_x = 3$  м; расстояние от верхнего токопровода до экрана —  $a = 0.1$  м; расстояние от нижнего токопровода до экрана —  $b = 0.65$  м; толщина экрана 2 (рис. 4) —  $d = 0.002$  м; удельная проводимость материала экрана —  $\gamma = 0.377 \cdot 10^8$  С/м (алюминий). Источником экранируемого магнитного поля были параллельные оси  $OZ$  прямой и обратной токи  $I$  (рис. 4), амплитудой  $-2$  и  $+2$  А соответственно, изменяющиеся во времени по синусоидальному закону с частотой  $1.67$  кГц. При этом величина скин-слоя примерно равняется толщине экрана. Поскольку длина токопроводов намного превышает

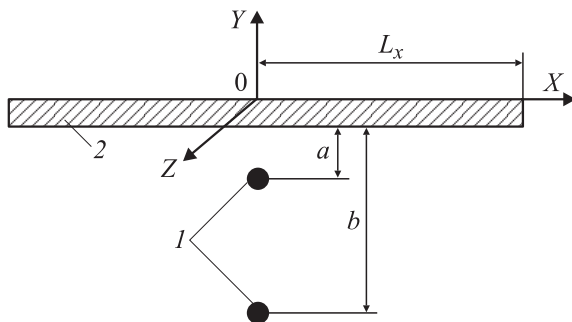


Рис. 4. Сечение плоскостью  $Z = 0$  системы прямого и обратного токопроводов (1) и экрана (2).

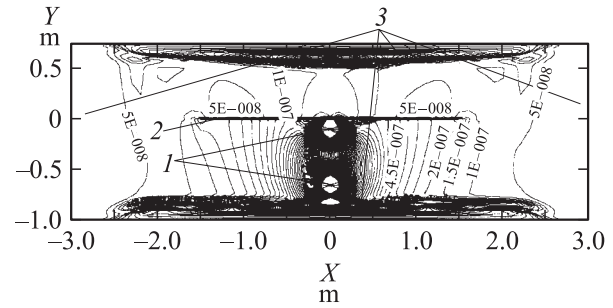


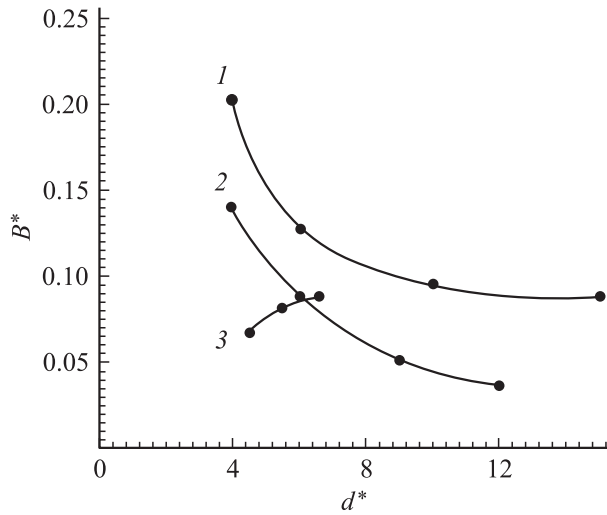
Рис. 5. Рассчитанные линии равного модуля индукции магнитного поля (в тесла) в сечении  $Z = 0$  для случая параметров базового варианта: 1 — токопроводы, 2 — экран, 3 — зона ОХСС.

размер экрана в направлении оси  $OZ$ , при расчете они полагались бесконечно длинными. Параметры словес ОХСС, принятые при расчете:  $k_{\text{max}} = 300$ ,  $m = 3$ ,  $N_{\text{UPML}} = 10$ . Задача была решена в комплексном виде. Граничные условия:  $\mathbf{A}|_{x=x_{\text{min}}, x=x_{\text{max}}} = 0$ ,  $\mathbf{A}|_{y=y_{\text{min}}, y=y_{\text{max}}} = 0$ ,  $\partial \mathbf{A} / \partial z|_{z=z_{\text{min}}, z=z_{\text{max}}} = 0$ . Была использована расчетная сетка, величина шага которой в направлениях  $X$  и  $Z$  равнялась  $0.1$  м (за исключением зоны  $-0.6 < x < 0.6$  м,  $-0.6 < z < 0.6$  м, где шаг по  $X$  и  $Z$  равнялся  $0.025$  м), в направлении  $Y$  —  $0.025$  м (за исключением зоны экрана:  $0 < y < d$ , где шаг по  $Y$  равнялся  $d/20$ ).

На рис. 5 представлено рассчитанное для рассматриваемого случая распределение линий равного модуля индукции магнитного поля  $|\mathbf{B}| = \sqrt{\dot{B}_x^2 + \dot{B}_y^2 + \dot{B}_z^2}$  (в тесла) в сечении  $Z = 0$ , проходящем через середину экрана, во всей расчетной области.

Для того чтобы проанализировать влияние соотношения геометрических параметров экрана, а также источника магнитного поля — прямого и обратного токопроводов — была проведена серия расчетов. На рис. 6 представлены рассчитанные зависимости модуля индукции магнитного поля на небольшом расстоянии за экраном ( $y = 0.05$  м) в точке, имеющей те же координаты  $x$  и  $z$ , что и сторонние токи, от величины  $d^*$ . Индукция магнитного поля выражена в относительных единицах:  $\dot{B} = |\mathbf{B}|/|\dot{\mathbf{B}}_0|$ , где  $|\mathbf{B}|$  — модуль напряженности магнитного поля при наличии экрана;  $|\dot{\mathbf{B}}_0|$  — модуль напряженности магнитного поля при отсутствии экрана. Кривая 1 представляет собой зависимость  $B^*$  от ширины экрана в направлении оси  $X$ ,  $d^*$  для данной кривой равняется:  $d^* = L_x/a$ , где  $a$  — расстояние от экрана до ближайшего к нему токопровода. Кривая 2 показывает зависимость  $B^*$  от ширины экрана в направлении оси  $Z$ , причем  $d^*$  для данной кривой равняется  $d^* = L_z/a$ . Кривая 3 представляет собой зависимость  $B^*$  от соотношения между расстояниями от экрана до прямого ( $a$ ) и обратного ( $b$ ) токопроводов, и  $d^*$  для данной кривой равняется:  $d^* = b/a$ . Как видно из рис. 6 (кривая 2), увеличение  $L_z$  существенно снижает уровень напряженности магнитного поля за экраном. Как следует





**Рис. 6.** Зависимости уровня  $B^* = |\dot{\mathbf{B}}|/|\dot{\mathbf{B}}_0|$  за экраном: кривая 1 — от ширины экрана в направлении, перпендикулярном оси сторонних токов ( $d^* = L_x/a$ ); 2 — от ширины экрана в направлении оси сторонних токов ( $d^* = L_z/a$ ); 3 — от отношения расстояний между экраном и токопроводами ( $d^* = b/a$ ).

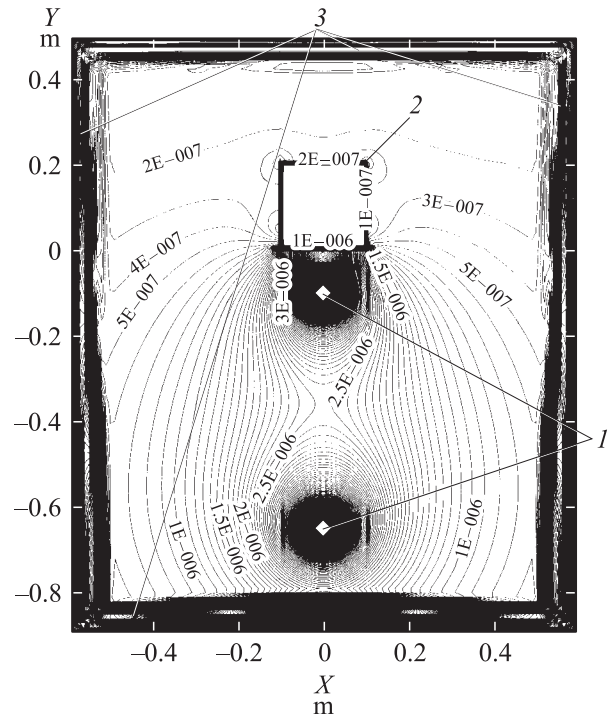
из зависимости  $B^*(L_x)$  (рис. 6, кривая 1), величина  $L_x$  также оказывает влияние на защитные свойства рассматриваемого экрана. Однако увеличение  $L_x$  свыше определенного уровня не приводит к существенному снижению индукции магнитного поля (так, увеличение  $L_x/a$  с 10 до 15 вызывает снижение уровня  $B^*$  лишь на 8%).

Были также проведены расчеты, целью которых являлась оценка степени влияния расстояния от экрана до прямого и обратного токопроводов. При этом варьировалось расстояние до более удаленного от экрана токопровода  $b$  (рис. 5, кривая 3). Остальные параметры системы при расчете соответствовали базовому варианту. Как видно из данной зависимости, в рассмотренном диапазоне отношение  $a/b$  существенно влияет на защитные свойства рассматриваемого экрана. Так, увеличение  $a/b$  в 1.44 раза приводит к росту  $B^*$  почти на 30%.

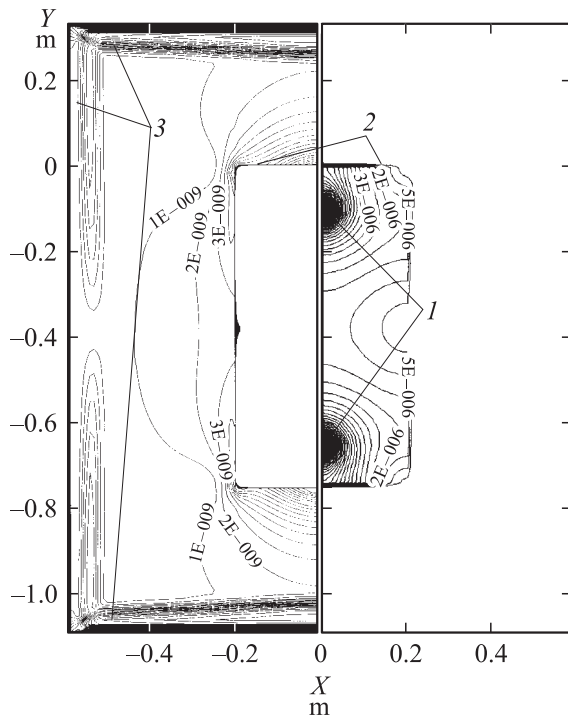
Известно, что тонкая пластина может оказывать экранирующее действие даже в том случае, когда ее толщина  $d$  меньше толщины скин-слоя  $\Delta$ . Для того чтобы оценить для рассматриваемого случая степень влияния  $d/\Delta$  на уровень  $B^*$  за экраном, был проведен расчет распределения магнитного поля при частоте  $f$ , в 100 раз большей, чем для базового варианта. Несмотря на то что толщина скин-слоя уменьшилась в 10 раз и  $d/\Delta$  стало примерно равным 10, величина максимальной индукции магнитного поля за экраном изменилась весьма незначительно. Как показывают проведенные расчеты, дальнейшее снижение  $d/\Delta$  (до 0.5 и ниже) приводит к существенному росту  $B^*$  (для  $d/\Delta = 0.5$  величина  $B^*$  возрастает почти на 40% по сравнению с базовым вариантом).

В результате проведенного расчетного анализа влияния геометрических параметров рассматриваемой системы на ее защитные свойства можно сделать вывод, что параметры экрана, обеспечивающие наибольшее снижение магнитного поля в ограниченной области за экраном, а также наименьший расход материала экрана, могут быть определены следующим образом:  $L_z/a \sim 10$ ;  $L_x/a \geq 10$ ,  $d/\Delta \geq 1$ . При необходимости экранирования больших областей размеры экрана нужно увеличивать, однако полученные соотношения остаются справедливыми при оценке эффективности экранирования границ защищаемой зоны.

Для того чтобы обеспечить эффективное снижение магнитных полей протяженных токоведущих проводников (например, линий электропередачи, источников питания электротранспорта, токоподводящих шин высоковольтных трансформаторов и др.), необходимо обеспечить замкнутость контура индуцируемых в экранах токов. Причем желательно, чтобы индуцируемые токи замыкались не по плоскости экрана, а имели дополнительный путь обхода. Исходя из возможностей экранирования конкретных систем замкнутыми экранами можно экранировать как зоны, подлежащие защите (рис. 7), так и сами токи — источники магнитного поля (рис. 8). Данные расчеты проводились при тех же параметрах сторонних токов, что и в базовом варианте. Увеличение высоты замкнутого экрана в направлении, перпендикулярном основной экранирующей плоскости (в рассматриваемом случае — в направлении оси  $OY$ ,



**Рис. 7.** Рассчитанные линии равного модуля индукции магнитного поля (в тесла) в сечении  $Z=0$  замкнутой системы, экранирующей защищаемую зону (1 — токопроводы, 2 — экран, 3 — зона ОХСС).



**Рис. 8.** Рассчитанные линии равного модуля индукции магнитного поля (в тесла) в сечении  $Z = 0$  замкнутой системы, экранирующей токопроводы (1 — токопроводы, 2 — экран, 3 — зона ОХСС;  $x < 0$  — распределение поля в зоне вне экрана;  $x > 0$  — распределение поля в зоне внутри экрана).

рис. 7), позволяет добиться снижения индукции магнитного поля внутри экрана до требуемых уровней. Как показали проведенные расчеты, для рассмотренной геометрии протяженного в направлении протекания сторонних токов экрана (см. рис. 7) происходит снижение уровня  $B^*$  по сравнению с базовым вариантом в 13 раз. Экранирование самих сторонних источников протяженным в направлении оси  $Z$  замкнутым экраном рассмотренной геометрии (рис. 8) обеспечило снижение уровня  $B^*$  по отношению к базовому варианту в 18.6 раз.

## Выводы

1. Разработана численная методика расчета трехмерного магнитного поля, позволяющая оценить эффективность экранирования магнитного поля сторонних токов тонкими проводящими пластинами конечных размеров. Использование метода конечного интегрирования и формулировка задачи через векторный магнитный потенциал (а не через векторы индукции и напряженности электромагнитного поля), а также модификация метода поглощающих граничных слоев применительно к расчету магнитного поля позволили существенно (не менее чем на порядок) сократить требуемые ресурсы памяти и времени вычислительных средств, обеспечив тем самым возможность расчета трехмерных магнитных полей с учетом краевых эффектов.

2. Проведенное тестирование разработанной численной методики путем сравнения с известными аналитическими решениями для расположенных в воздухе, а также над магнитным полупространством прямого и обратного токопроводов показало, что относительная погрешность численного расчета не превышает 3%.

3. На основе проведенного численного анализа влияния геометрических параметров плоской пластины выбраны диапазоны их изменения, обеспечивающие наибольшее снижение за экраном уровня внешнего магнитного поля прямого и обратного токопроводов, а также наименьший расход материала экрана.

4. С помощью расчетов распределений магнитного поля показано, что замкнутые экраны обеспечивают снижение уровня индукции магнитного поля на порядок и более по отношению к случаю экранирования плоскими проводящими пластинами (для рассмотренных систем в 13 раз при экранировании области вблизи сторонних токов и в 18.6 раза при экранировании самих токов).

## Список литературы

- [1] Berenger J.-P. // J. of Computational Physics. 1994. Vol. 114. P. 185–200.
- [2] Berenger J.-P. // J. of Computational Physics. 1996. Vol. 127. P. 363–379 (<http://www.utdallas.edu/~cantrell/ee6351/3-dpml.pdf>).
- [3] Taflov A., Hagness S. Computational electrodynamics: the finite difference time domain method. Boston–London: Artech House, 2000. 852 p.
- [4] Frontiers in electromagnetics / Ed. by D.H. Werner, R. Mittra. N. Y.: IEEE Press, 1999. 876 p.
- [5] Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высш. шк., 1970. 710 с.
- [6] Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 150 с.
- [7] Clemens M., Weiland T. // IEEE Trans. on Magnetics. 2002. Vol. 38. N 2. P. 569–572.
- [8] Резинкина М.М. // Электричество. 2003. № 8. С. 50–55.
- [9] Резинкина М.М. ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 6. С. 85–92.
- [10] Стрэттон Дж.А. Теория электромагнетизма. М.–Л.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1948. 539 с.
- [11] Круг К.А. Физические основы электротехники. Т. 1. М.–Л.: Госэнергоиздат, 1946. 472 с.
- [12] Каден Г. Электромагнитные экраны в высокочастотной технике и технике электросвязи. М.–Л.: Госэнергоиздат, 1957. 327 с.
- [13] Резинкина М.М. // Электричество. 2003. № 4. С. 44–48.